应用数学和力学，第12卷第11期（1991年11月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

概率收缩偶与非阿基米德Menger概率赋范空间中非线性方程组的解*

张石生　　彭永成

（四川大学数学系）　　（韶关大学数学系）

（1990年9月27日收到）

摘　要

本文在非阿基米德Menger概率赋范空间中引入了概率收缩偶的概念，研究了非阿基米德Menger概率赋范空间中具概率收缩偶的非线性方程组的解的存在性与唯一性．发展和改进了引文[1～5]的相应结果．

关键词　非阿基米德Menger概率赋范空间　概率收缩偶　选择映象　非线性方程组

一、引言与预备知识

1977年，Altman[1]在Banach空间中所建立的收缩理论对研究Banach空间中非线性算子方程解的存在性和唯一性起着重要的作用，因此引起许多作者的极大兴趣．作为[1]的发展，Lee和Padgett[2~4]建立了随机收缩理论，为进一步研究随机算子和随机方程开辟了新的道路．继而，[5]在概率赋范空间中引入了概率收缩的概念，研究了具概率收缩的非线性算子方程的解的存在性与唯一性．作为[5]的继续，本文在N. A. Menger PN-空间中引入了概率收缩偶的概念，研究了具概率收缩偶的非线性方程组的解的存在性和唯一性，并讨论了N. A. Menger PN-空间中映象对的公共不动点问题，发展和改进了引文[1～5]的相应结果．

本文以下记$R=(-\infty,+\infty)$，$R^+=[0,+\infty)$，$\mathscr{D}$表一切左连续的分布函数的集合．$H:R\to[0,1]$表一特殊的分布函数，其定义为

$$H(t)=\begin{cases}1 & (t>0)\\ 0 & (t\leqslant 0)\end{cases}$$

* 国家自然科学基金资助课题．

三元组$(E,\mathscr{F},\Delta)$称为非阿基米德Menger概率赋范空间(简称N. A. Menger PN-空间)，如果E是一实线性空间，$\mathscr{F}:E\to\mathscr{D}$ (以后记$\mathscr{F}(x)=F_x$，而$F_x(t)$表分布函数F_x在$t\in R$处的值)，Δ是一t-范数，且满足条件：

(PN-1) $F_x(0)=0$

(PN-2) $F_x(t)=H(t)$ ($\forall t\geqslant 0$当且仅当$x=0$)

(PN-3) $F_{\alpha x}(t)=F_x\left(\frac{t}{|\alpha|}\right)$ ($\forall \alpha\in R$, $\alpha\neq 0$)

(PN-4) $F_{x+y}(\max\{t_1,t_2\})\geqslant\Delta(F_x(t_1),F_y(t_2))$

$(\forall x,\ y\in E,\ t_1,\ t_2\in R^+)$

如果 $(E,\mathscr{F},\Delta)$ 是一N. A. Menger PN-空间，Δ满足条件：

$$\sup_{0<t<1}\Delta(t,t)=1 \tag{1.1}$$

则 $(E,\mathscr{F},\Delta)$ 是由邻域系

$$\{U_y(\varepsilon,\lambda),\ y\in E,\ \varepsilon>0,\ \lambda>0\} \tag{1.2}$$

导出的拓扑τ的可度量化的Hausdorff线性拓扑空间，其中

$$U_y(\varepsilon,\lambda)=\{x\in E;\ F_{x-y}(\varepsilon)>1-\lambda\}$$

按照这一拓扑τ，$\{x_n\}\subset E$称为τ-收敛于$x\in E$，如果

$$\lim_{n\to\infty}F_{x_n-x}(t)=H(t)\qquad(\forall t\geqslant 0)$$

$\{x_n\}\subset E$称为τ-Cauchy列，如果

$$\lim_{n,m\to\infty}F_{x_n-x_m}(t)=H(t)\qquad(\forall t\geqslant 0)$$

E称为τ-完备的，如果E中的每一τ-Cauchy列都τ-收敛于E中的某一点。

定义1 设 $(X,\mathscr{F},\Delta)$，$(Y,\tilde{\mathscr{F}},\Delta)$是二N. A. Menger PN-空间，$\Delta$满足条件(1.1)。而$\tau_1$和$\tau_2$分别是$(X,\mathscr{F},\Delta)$和 $(Y,\tilde{\mathscr{F}},\Delta)$ 上由 (1.2) 型的邻域系所导出的拓扑。映象$p:D(p)\subset X\to Y$称为τ-闭的，如果对任意的序列$\{x_n\}\subset D(p)$，当$x_n\xrightarrow{\tau_1}x_0$，$px_n\xrightarrow{\tau_2}y_0$时，就有$x\in D(p)$，且$px_0=y_0$。

定义2 函数φ：$[0,+\infty)\to[0,+\infty)$称为满足条件($\Phi$)，如果它是严格增的，$\varphi(0)=0$，且

$$\lim_{n\to\infty}\varphi^n(t)=+\infty\qquad(\forall t>0) \tag{1.3}$$

注 由[6]中引理9.3.5知，如果φ满足条件(Φ)，则$\varphi(t)>t$ ($\forall t>0$)。

定义3 设Γ：$Y\to X$，称Γ为奇算子，如果

$$\Gamma(-y)=-\Gamma(y)\qquad(\forall y\in Y)$$

我们记$S(Y,X)$为$Y\to X$的一切奇算子的集合。

二、概率收缩偶与非线性集值映射方程组

定义4 设P：$D\subset X\to 2^Y$是一集值映象，p：$D\subset X\to Y$称为P的选择映象，如果$p(x)\in$

$P(x)$，$\forall x\in D$。

定义5 设$(X, \mathscr{F}, \Delta)$，$(Y, \mathscr{F}, \Delta)$是二N. A. Menger PN-空间。设Γ_i：$X\to S(Y,X)$，$i=1, 2$。设P，Q：$D\subset X\to 2^Y$，p，q：$D\to Y$分别为P，Q的选择映象。(Γ_1, Γ_2)称为集值映射P，Q的概率收缩偶，如果存在满足条件（Φ）的函数φ：$[0, +\infty)\to[0, +\infty)$，使得对一切$t\geqslant 0$，$x\in D$和$y\in Y$有

$$\left.\begin{aligned}&\tilde{F}_{p(x+\Gamma_1(x)y)-q(x)-y}(t)\\&\quad\geqslant\min\{\tilde{F}_y(\varphi(t)),\ \tilde{F}_{p(x+\Gamma_1(x)y)}(\varphi(t)),\ \tilde{F}_{q(x)}(\varphi(t)),\\&\qquad\tilde{F}_{p(x+\Gamma_1(x)y)-q(x)}(\varphi(t)),\ \tilde{F}_{q(x)+y}(\varphi(t)),\\&\qquad\tilde{F}_{p(x+\Gamma_1(x)y)-y}(\varphi(t))\}\\&\tilde{F}_{q(x+\Gamma_2(x)y)-p(x)-y}(t)\\&\quad\geqslant\min\{\tilde{F}_y(\varphi(t)),\ \tilde{F}_{q(x+\Gamma_2(x)y)}(\varphi(t)),\ \tilde{F}_{p(x)}(\varphi(t)),\\&\qquad\tilde{F}_{q(x+\Gamma_2(x)y)-p(x)}(\varphi(t)),\ \tilde{F}_{p(x)+y}(\varphi(t)),\\&\qquad\tilde{F}_{q(x+\Gamma_2(x)y)-y}(\varphi(t))\}\end{aligned}\right\}\tag{2.1}$$

定义6 设P，Q：$D\subset X\to 2^Y$，对于给定的$y_0\in Y$，若存在一个$x_*\in D$，使

$$\left.\begin{aligned}y_0\in P(x_*)\\y_0\in Q(x_*)\end{aligned}\right\}\tag{2.2}$$

则称非线性集值映射方程组（2.2）有解。

定理1 设$(X, \mathscr{F}, \Delta)$，$(Y, \mathscr{F}, \Delta)$均为τ-完备的N. A. Menger PN-空间，$\Delta=\min$。设P，Q：$D\subset X\to 2^Y$。设p，q分别是P，Q的选择映象，且是τ-闭的。Γ_i：$X\to S(Y,X)$ $(i=1, 2)$，若下列条件被满足：

(i) $x+\Gamma_i(x)y\in D$，$\forall x\in D$，$y\in Y$。

(ii) (Γ_1,Γ_2)是P，Q的概率收缩偶。

(iii) 存在非负严格增函数$g(t)$，且$g(0)=0$，使得对一切$x\in D$，$y\in Y$，有

$$F_{\Gamma_i(x)y}(t)\geqslant\tilde{F}_y(g(t))\qquad(\forall t\geqslant 0)\tag{2.3}$$

则对任给的$y_0\in Y$，非线性集值映射方程组

$$\left.\begin{aligned}y_0\in P(x)\\y_0\in Q(x)\end{aligned}\right\}\tag{2.4}$$

在D中有解。且对任给的$x_0\in D$，迭代序列

$$\left.\begin{aligned}x_{2n+1}&=x_{2n}-\Gamma_1(x_{2n})(q(x_{2n})-y_0)\\x_{2n+2}&=x_{2n+1}-\Gamma_2(x_{2n+1})(p(x_{2n+1})-y_0)\end{aligned}\right\}\tag{2.5}$$

τ-收敛于（2.4）之一解。

证明 不失一般性，可设$y_0=0$，事实上，若$y_0\neq 0$，则令$P_1(x)=\{u-y_0|u\in P(x)\}$，$Q_1(x)=\{u-y_0|u\in Q(x)\}$，则$p_1(x)=p(x)-y_0$，$q_1(x)=q(x)-y_0$，$D(P_1)=D(Q_1)=D$，且$P_1$，$Q_1$也满足定理中的所有条件，故可转化为对方程

$$\begin{cases}0\in P_1(x)\\0\in Q_1(x)\end{cases}$$

的讨论。

由条件(i)及（2.5）对每一$n=0, 1, \cdots$，$x_n\in D$，有

$$
\begin{aligned}
\tilde{F}_{p(x_{2n+1})}(t)&=\tilde{F}_{p(x_{2n}+\Gamma_1(x_{2n})(-q(x_{2n})))-q(x_{2n})-(-q(x_{2n}))}(t)\\
&\geqslant\min\{\tilde{F}_{q(x_{2n})}(\varphi(t)),\ \tilde{F}_{p(x_{2n+1})}(\varphi(t)),\ \tilde{F}_{q(x_{2n})}(\varphi(t)),\\
&\qquad\tilde{F}_{p(x_{2n+1})-q(x_{2n})}(\varphi(t)),\ \tilde{F}_{q(x_{2n})-q(x_{2n})}(\varphi(t)),\ \tilde{F}_{p(x_{2n+1})+q(x_{2n})}(\varphi(t))\}\\
&=\min\{\tilde{F}_{q(x_{2n})}(\varphi(t)),\ \tilde{F}_{p(x_{2n+1})}(\varphi(t)),\ \tilde{F}_{p(x_{2n+1})-q(x_{2n})}(\varphi(t)),\\
&\qquad\tilde{F}_{p(x_{2n+1})+q(x_{2n})}(\varphi(t))\}\\
&\geqslant\min\{\tilde{F}_{q(x_{2n})}(\varphi(t)),\ \tilde{F}_{p(x_{2n+1})}(\varphi(t)),\ \tilde{F}_{p(x_{2n+1})}(\varphi(t)),\ \tilde{F}_{q(x_{2n})}(\varphi(t))\}\\
&=\tilde{F}_{q(x_{2n})}(\varphi(t))
\end{aligned}
$$

又

$$
\begin{aligned}
\tilde{F}_{q(x_{2n})}(\varphi(t))&=\tilde{F}_{q(x_{2n-1}+\Gamma_2(x_{2n-1})(-p(x_{2n-1})))-p(x_{2n-1})-(-p(x_{2n-1}))}(\varphi(t))\\
&\geqslant\min\{\tilde{F}_{p(x_{2n-1})}(\varphi^2(t)),\ \tilde{F}_{q(x_{2n})}(\varphi^2(t)),\ \tilde{F}_{p(x_{2n-1})}(\varphi^2(t)),\\
&\qquad\tilde{F}_{q(x_{2n})-p(x_{2n-1})}(\varphi^2(t)),\ \tilde{F}_{p(x_{2n-1})-p(x_{2n-1})}(\varphi^2(t)),\\
&\qquad\tilde{F}_{q(x_{2n})-p(x_{2n-1})}(\varphi^2(t))\}\\
&\geqslant\min\{\tilde{F}_{p(x_{2n-1})}(\varphi^2(t)),\ \tilde{F}_{q(x_{2n})}(\varphi^2(t))\}\\
&=\tilde{F}_{p(x_{2n-1})}(\varphi^2(t))
\end{aligned}
$$

....

由归纳法，一般可得

$$\tilde{F}_{p(x_{2n+1})}(t)\geqslant\tilde{F}_{p(x_1)}(\varphi^{2n}(t))\qquad(\forall t\geqslant0,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)\tag{2.6}$$

同理可证

$$\tilde{F}_{q(x_{2n})}(t)\geqslant\tilde{F}_{q(x_0)}(\varphi^{2n}(t))\qquad(\forall t\geqslant0,\ n=1,\ 2,\ \cdots)\tag{2.7}$$

由条件(iii)及(2.6)，(2.7)，当n为奇数时可得

$$
\begin{aligned}
F_{x_{n+1}-x_n}(t)&=F_{\Gamma_2(x_n)p(x_n)}(t)\\
&\geqslant\tilde{F}_{p(x_n)}(g(t))\geqslant\tilde{F}_{p(x_1)}(\varphi^{n-1}(g(t)))\qquad(\forall t\geqslant0)
\end{aligned}
$$

当n为偶数时可得

$$
\begin{aligned}
F_{x_{n+1}-x_n}(t)&=F_{\Gamma_1(x_n)q(x_n)}(t)\\
&\geqslant\tilde{F}_{q(x_n)}(g(t))\geqslant\tilde{F}_{q(x_0)}(\varphi^{n}(g(t)))\qquad(\forall t\geqslant0)
\end{aligned}
$$

于是对一切正整数m，n；$m>n$（为叙述方便，不妨设n为奇数，m为偶数，对其余情况完全可以类似地证明），由（PN-4）有

$$
\begin{aligned}
F_{x_m-x_n}(t)&\geqslant\min\{F_{x_m-x_{m-1}}(t),\ F_{x_{m-1}-x_n}(t)\}\\
&\geqslant\min\{F_{x_m-x_{m-1}}(t),\ F_{x_{m-1}-x_{m-2}}(t),\ \cdots,\ F_{x_{n+1}-x_n}(t)\}\\
&\geqslant\min\{\tilde{F}_{p(x_1)}(\varphi^{m-2}(g(t))),\ \tilde{F}_{q(x_0)}(\varphi^{m-2}(g(t))),\ \cdots,\\
&\qquad\tilde{F}_{q(x_0)}(\varphi^{n+1}(g(t))),\ \tilde{F}_{p(x_1)}(\varphi^{n-1}(g(t)))\}\qquad(\forall t\geqslant0)
\end{aligned}
$$

因$\varphi(t)$满足条件(Φ)，故有$\varphi(t)>t$，$\forall t>0$，所以

$$F_{x_m-x_n}(t)\geqslant\min\{\tilde{F}_{q(x_0)}(\varphi^{n+1}(g(t))),\ \tilde{F}_{p(x_1)}(\varphi^{n-1}(g(t)))\}\qquad(\forall t\geqslant0)$$

又由(Φ)，当$n\to\infty$时，$\varphi^n(g(t))\to0$（$\forall t>0$）故

$$\lim_{n,m\to\infty}F_{x_m-x_n}(t)=H(t)\qquad(\forall t\geqslant0)$$

即，$\{x_n\}$是X中的τ_1-Cauchy列，因X是τ-完备的，设$x_n\xrightarrow{\tau_1}x_*$。于是在(2.6)，(2.7)中取$n\to\infty$，由（$\Phi$）得

$$\lim_{n\to\infty}\tilde{F}_{p(x_{2n+1})}(t)=H(t)\qquad(\forall t\geqslant0)$$

$$\lim_{n\to\infty}\tilde{F}_{q(x_{2n})}(t)=H(t)\qquad(\forall t\geqslant 0)$$

因而$p(x_{2n+1})\xrightarrow{\tau_2}0$，$q(x_{2n+2})\xrightarrow{\tau_2}0$

由p，q的τ-闭性知$x_*\in D$，且$p(x_*)=0$，$q(x_*)=0$，即有

$$\begin{cases}0\in P(x_*)\\0\in Q(x_*)\end{cases}$$

故x_*是（2.4）当$y_0=0$时的解，而且迭代序列（2.5）（其中$y_0=0$）τ_1-收敛于x_*。证毕。

三、概率收缩偶与非线性算子方程组

定义7 设$(X,\mathscr{F},\varDelta)$，$(Y,\mathscr{F},\varDelta)$是二N. A. Menger PN-空间，设$\Gamma_i$: $X\to S(Y,X)$，设P，Q: $D\subset X\to Y$是两个单值映象。(Γ_1,Γ_2)称为P，Q的概率收缩偶，如果存在满足条件（Φ）的函数φ：$[0,+\infty)\to[0,+\infty)$使得对一切$x\in D$和$y\in Y$，有

$$\left.\begin{aligned}&\tilde{F}_{P(x+\Gamma_1(x)y)-Q(x)-y}(t)\\&\quad\geqslant\min\{\tilde{F}_y(\varphi(t)),\ \tilde{F}_{P(x+\Gamma_1(x)y)}(\varphi(t)),\ \tilde{F}_{Q(x)}(\varphi(t)),\\&\qquad\tilde{F}_{P(x+\Gamma_1(x)y)-Q(x)}(\varphi(t)),\ \tilde{F}_{Q(x)+y}(\varphi(t)),\\&\qquad\tilde{F}_{P(x+\Gamma_1(x)y)-y}(\varphi(t))\}\\&\tilde{F}_{Q(x+\Gamma_2(x)y)-P(x)-y}(t)\\&\quad\geqslant\min\{\tilde{F}_y(\varphi(t)),\ \tilde{F}_{Q(x+\Gamma_2(x)y)}(\varphi(t)),\ \tilde{F}_{P(x)}(\varphi(t)),\\&\qquad\tilde{F}_{Q(x+\Gamma_2(x)y)-P(x)}(\varphi(t)),\ \tilde{F}_{P(x)+y}(\varphi(t)),\\&\qquad\tilde{F}_{Q(x+\Gamma_2(x)y)-y}(\varphi(t))\}\end{aligned}\right\}\qquad(3.1)$$

定理2 设$(X,\mathscr{F},\varDelta)$，$(Y,\mathscr{F},\varDelta)$均为$\tau$-完备的N. A. Menger PN-空间，$\varDelta=\min$。设$P$，$Q$: $D\subset X\to Y$是τ-闭算子。Γ_i: $X\to S(Y,X)$ $(i=1,2)$。若下列条件被满足：

(i) $x+\Gamma_i(x)y\in D$，$\forall x\in D$，$y\in Y$。

(ii) (Γ_1,Γ_2)是P，Q的概率收缩偶。

(iii) 存在非负严格增函数$g(t)$，且$g(0)=0$，使得对一切$x\in D$，$y\in Y$，有

$$F_{\Gamma_i(x)y}(t)\geqslant\tilde{F}_y(g(t))\qquad(\forall t\geqslant 0)\qquad(3.2)$$

则对任给的$y_0\in Y$非线性算子方程组

$$\left.\begin{aligned}Px&=y_0\\Qx&=y_0\end{aligned}\right\}\qquad(3.3)$$

在D中有解，而且对任给的$x_0\in D$，迭代序列

$$\left.\begin{aligned}x_{2n+1}&=x_{2n}-\Gamma_1(x_{2n})(Qx_{2n}-y_0)\\x_{2n+2}&=x_{2n+1}-\Gamma_2(x_{2n+1})(Px_{2n+1}-y_0)\end{aligned}\right\}\qquad(3.4)$$

τ_1-收敛于方程组（3.3）之一解。

特别，若存在某一$\bar{x}\in X$，使得$\Gamma_1(\bar{x})$，$\Gamma_2(\bar{x})$之一是$Y\to X$的满映象，则方程组（3.3）对给定的$y_0\in Y$在D中有唯一解。

证明 定理的前半部分，作为定理1的特例是成立的。

现设存在某一$\bar{x}\in D$，使$\Gamma_i(\bar{x})$ $(i=1,2)$之一是满映象。不妨设$\Gamma_1(\bar{x})$是满映象。下证方程组(3.3)解的唯一性。

设x_*，x_{**}是方程组(3.3)的两个解，则由$\Gamma_1(\bar{x})$的满射性，$\exists\, y\in Y$，使得

$$x_{**}-x_*=\Gamma_1(\bar{x})y$$

所以

$$\begin{aligned}\tilde{F}_y(t)&=\tilde{F}_{Tx_{**}-Sx_*-y}(t)\\&=\tilde{F}_{T(x_*+\Gamma_1(\bar{x})y)-Sx_*-y}(t)\\&\geqslant\min\{\tilde{F}_{Tx_{**}}(\varphi(t)),\ \tilde{F}_{Sx_*}(\varphi(t)),\ \tilde{F}_y(\varphi(t)),\\&\quad\ \tilde{F}_{Tx_{**}-Sx_*}(\varphi(t)),\ \tilde{F}_{Sx_*+y}(\varphi(t)),\ \tilde{F}_{Tx_{**}-y}(\varphi(t))\}\\&=\tilde{F}_y(\varphi(t))\\&\geqslant\cdots\geqslant\tilde{F}_y(\varphi^n(t))\quad(n=1,2,\cdots;\ \forall t\geqslant 0)\end{aligned}$$

令$n\to\infty$，即得$\tilde{F}_y(t)=H(t)$　$(\forall t\geqslant 0)$

故$y=0$，即$x_*=x_{**}$.　　证毕.

四、N. A. Menger PN-空间映象对的公共不动点定理

定理3　设$(X,\mathscr{F},\Delta)$是τ-完备的N. A. Menger PN-空间，$\Delta=\min$。设S，T：$X\to X$满足条件：

$$\begin{aligned}&F_{Tx-Sy}(t)\geqslant\min\{F_{x-y}(\varphi(t)),\ F_{x-Tx}(\varphi(t)),\ F_{y-Sy}(\varphi(t)),\\&\quad F_{x-Sy}(\varphi(t)),\ F_{y-Tx}(\varphi(t)),\ F_{(x-Tx)-(y-Sy)}(\varphi(t))\}\quad(\forall t\geqslant 0)\end{aligned}\tag{4.1}$$

其中φ：$[0,+\infty)\to[0,+\infty)$满足条件$(\Phi)$。则$S$，$T$在$X$中存在唯一公共不动点，而且对任一$x_0\in X$，迭代序列：

$$\left.\begin{aligned}x_{2n+1}&=S(x_{2n})\\x_{2n+2}&=T(x_{2n+1})\end{aligned}\right\}\tag{4.2}$$

τ-收敛于该不动点。

证明　令$P(x)=x-S(x)$，$Q(x)=x-T(x)$，$\forall x\in X$并取$\Gamma_i(x)\equiv I$，$x\in X$ $(i=1,2)$ (I为恒等映象)

下证P，Q，Γ_1，Γ_2满足定理2的所有条件。

事实上，条件(i)，(iii)成立是显然的　而对$\forall x$，$y\in X$，及任意的$t\geqslant 0$，由(4.1)有

$$\begin{aligned}&F_{P(x+\Gamma_1(x)y)-Q(x)-y}(t)=F_{P(x+y)-Q(x)-y}(t)\\&\quad=F_{x+y-S(x+y)-x+Tx-y}(t)=F_{Tx-S(x+y)}(t)\\&\quad\geqslant\min\{F_{x-(x+y)}(\varphi(t)),\ F_{x-Tx}(\varphi(t)),\ F_{(x+y)-S(x+y)}(\varphi(t)),\\&\qquad F_{x-S(x+y)}(\varphi(t)),\ F_{x+y-Tx}(\varphi(t)),\ F_{x-Tx-((x+y)-S(x+y))}(\varphi(t))\}\\&\quad=\min\{F_y(\varphi(t)),\ F_{Q(x)}(\varphi(t)),\ F_{P(x+y)}(\varphi(t)),\ F_{P(x+y)-y}(\varphi(t)),\\&\qquad F_{Q(x)+y}(\varphi(t)),\ F_{P(x+y)-Q(x)}(\varphi(t))\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&F_{Q(x+\Gamma_2(x)y)-P(x)-y}(t)=F_{x+y-T(x+y)-x+Sx-y}(t)\\&\quad=F_{T(x+y)-Sx}(t)\\&\quad\geqslant\min\{F_{x+y-x}(\varphi(t)),\ F_{(x+y)-T(x+y)}(\varphi(t)),\ F_{x-Sx}(\varphi(t)),\\&\qquad F_{x+y-Sx}(\varphi(t)),\ F_{x-T(x+y)}(\varphi(t)),\ F_{x+y-T(x+y)-(x-Sx)}(\varphi(t))\}\end{aligned}$$

$$=\min\{F_y(\varphi(t)),\ F_{Q(x+y)}(\varphi(t)),\ F_{P(x)}(\varphi(t)),$$
$$F_{P(x)+y}(\varphi(t)),\ F_{Q(x+y)-y}(\varphi(t)),\ F_{Q(x+y)-P(x)}(\varphi(t))\}$$

即条件 (ii) 满足。

又$\Gamma_1(x)=\Gamma_2(x)\equiv I$，满映象，故由定理2知迭代序列：

$$x_{2n+1}=x_{2n}-\Gamma_1(x_{2n})(Qx_{2n})=Sx_{2n}$$
$$x_{2n+2}=x_{2n+1}-\Gamma_2(x_{2n+1})(Px_{2n+1})=Tx_{2n+1}$$

τ-收敛于方程组

$$\begin{cases}P(x)=0\\ Q(x)=0\end{cases}$$

的唯一解$x_*\in X$，即有

$$x_*=Sx_*,\quad x_*=Tx_*\quad .$$

因而x_*是S，T在X中的唯一不动点。 证毕。

参 考 文 献

[1] Altman, M., *Contractors and Contractor Directions, Theory and Applications*, Marcel Dekker, New York (1977).

[2] Lee, A. C. and W. J. Padgett, Random contractors with random nonlinear majorant functions, *Nonlinear Anal. TMA*, 3 (1979), 707—715.

[3] Lee, A. C. and W. J. Padgett, Solutions of random operator equations by random step-contractors, *Nonlinear Anal. TMA*, 4 (1980), 145—151.

[4] Lee, A. C. and W. J. Padgett, Random contractors and the solution of random nonlinear equations, *Nonlinear Anal. TMA*, 1 (1977), 173—185.

[5] 张石生，概率收缩和概率赋范空间中非线性方程的解，科学通报，15 (1990).

[6] 张石生，《不动点理论及应用》，重庆出版社 (1984).

[7] Schweizer, B. and A. Sklar, *Probabilistic Metric Metric Spaces*, North-Holland (1983).

Probabilistic Contractor Couple and Solutions for a System of Nonlinear Equations in Non-Archimedean Menger Probabilistic Normed Spaces

Zhang Shi-sheng

(Department of Mathematics, Sichuan Universty, Chengdu)

Peng Yong-cheng

(Department of Mathematics, Shaoguan University, Guangdong)

Abstract

The purpose of this paper is to introduce the concept of probabilistic contractor couple in non-Archimedean probabilistic normed spaces and to study the existence and uniqueness of solutions for a system of nonlinear operator equations with probabilistic contractor couples in non-Archimedean probabilistic normed spaces. The results presented in this paper improve and extend the corresponding results in [1～5].

Key words non-Archimedean probabilistic normed space, probabilistic contractor couple, selection function, system of nonlinear equations