

粘弹流体的绕流特性研究*

马丹林 黄宽渊

(成都 西南交通大学, 1990年2月26日收到)

摘 要

本文建立了分析粘弹流体平面流的基本方程, 并采用摄动法和加权余量法, 在小Deborah数条件下, 进行了粘弹流体流动的有限元分析, 探讨了粘弹流体的绕流特性, 分析了粘弹流体在绕流中所表现的分离点滞后及减阻现象的机理。结果表明, 本文的方法, 对于粘弹流体流动特性的分析工作, 具有简便和准确的优点。

关键词 粘弹流 绕流特性 分离点滞后 减阻

一、引 言

近年来, 天然高分子材料、生物流体、润滑剂、涂料、高聚物溶液的发展, 为粘弹性流体力学的进展, 形成了雄厚的现实背景。

对于粘弹流体力学问题进行分析, 远不如经典流体力学那样方便。与具有单一本构关系的牛顿流体力学不同, 粘弹流体力学问题, 由于粘弹流体组成上的多样性和结构上的复杂性, 本构方程十分复杂; 又由于其力学响应对流场的依赖性, 故进行数学描述甚为困难。其数值模拟技术与计算分析工作之困难, 盖源于此。

粘弹流体的绕流问题是一个具有重要理论意义和应用背景的基本问题。在理论上, 它们的解构成了粘弹流体力学中的一类问题的基本解。在应用上, 对于粘弹流体的物理参数的测定, 以及对粘弹流体的物理行为的研究, 往往要通过绕流实验来进行。近年来, Zana^[1], Sigli^[2]等通过实验方法研究了球体绕流问题, 并试图通过压力的测定来分析非牛顿流体的流动特性。Gudazhi和Tanner^[3]用有限元方法计算了幂律流的绕球流。Mañero和Mena^[4]通过实验研究了粘弹性慢流通过圆柱的特性。Luikov^[5]通过实验观察到: 粘弹流体绕圆柱流动时, 出现分离点滞后现象。Acharya^[6]通过研究粘弹流体绕球流实验, 发现减阻现象。对于粘弹流体绕流问题的理论分析, 由于计算上的困难, 直到1987年, Harnoy^[7]才利用附面层理论和差分方法, 研究了粘弹流经过圆柱时出现的某些特点; 并指出: 粘弹流体的松弛过程, 导致分离点滞后和表面摩擦力减少现象。

粘弹流体的复杂的物理特性, 使其绕流问题至今尚未得到很好的解决。特别是, 在一般雷诺数下, 对于粘弹性流体尚未建立较合理的分析方法。利用附面层理论, 虽然简便, 但由

* 陈大鹏推荐。

于忽略了流场中大部份的粘弹性,故不能合理地描述整个流场的流动特性。同时,附面层理论也不能准确地描述流体在分离点附近的流动行为。这给附面层理论的应用,带来了极大的局限性。本文通过理论分析,建立了粘弹流体平面流的基本方程,并通过摄动法和加权余量法,在小Deborah数的条件下,建立了分析粘弹流体流动的有限元方法。在此基础上,本文分析了粘弹性流体的绕流特性;探讨了粘弹流体沿物面的压力分布和剪应力分布特点,以及沿物面的速度剖面;分析了粘弹性流体在绕流中所表现的分离点滞后及减阻现象的机理。结果表明,对于粘弹性流体的流动特性的分析工作,本文的方法简便易行,提供答案亦较准确。

二、基本方程

众所周知,线性粘弹性方程仅在应变率和应力很小时才成立。为使这些方程在一般范围内也成立,Oldroyd^[8]建议把线性粘弹性方程放在随动坐标系里来考虑。于是有Kelvin-Voigt型的本构方程:

$$\mathbf{T} + \lambda_1 \frac{\delta \mathbf{T}}{\delta t} = 2\mu (\mathbf{A}_1 + \lambda_2 \frac{\delta \mathbf{A}_1}{\delta t}) \quad (2.1)$$

其中, \mathbf{T} 为偏应力张量, λ_1 , μ , λ_2 分别为材料参数, $\mathbf{A}_1 = 2\mathbf{D}$ 为一阶 Rivlin-Ericksen 张量, \mathbf{D} 为应变率张量, $\delta/\delta t$ 为随动导数; 二阶张量 \mathbf{B} 的分量 b_{ij} 的随动导数定义为:

$$\frac{\delta b_{ij}}{\delta t} = \frac{\partial b_{ij}}{\partial t} + v^k \frac{\partial b_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial v^k}{\partial x^j} b_{ik} + \frac{\partial v^k}{\partial x^i} b_{kj} \quad (2.2)$$

t 为时间, x^i 为随体坐标。本文采用爱因斯坦求和约定。

推广本构方程的另一种方法是将它们参照一个共转坐标系来考虑。广义Jeffreys模型^[9]定义为:

$$\mathbf{T} + \lambda_1 \frac{\mathcal{D} \mathbf{T}}{\mathcal{D} t} = 2\mu (\mathbf{A}_1 + \lambda_2 \frac{\mathcal{D} \mathbf{A}_1}{\mathcal{D} t}) \quad (2.3)$$

其中, $\mathcal{D}/\mathcal{D} t$ 为Jaumann导数。

Deborah数是一个反映粘弹流体物理特性的参数,它定义为:

$$De = \lambda / \tau_m \quad (2.4)$$

其中, λ 是松弛时间, τ_m 是一个与流动相联系的特征时间。当 De 数很小时,流动的弹性效应较小;当 De 数很大时,流动有很高的弹性效应。在小Deborah数条件下,类似于Harnoy^[7],粘弹流体的本构关系(2.3)式可简化为:

$$\mathbf{T} = 2\mu (\mathbf{A}_1 - \lambda \mathcal{D} \mathbf{A}_1 / \mathcal{D} t) \quad (2.5)$$

其中, μ 为动力粘性系数。在直角坐标系下,其分量形式为:

$$T_{ij} = 2\mu (d_{ij} - \lambda \mathcal{D} d_{ij} / \mathcal{D} t) \quad (2.6)$$

其中, $d_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2$; $u_{i,j}$ 为速度分量梯度。

对于二维稳定流,在笛卡尔坐标系下,(2.6)式可表述为:

$$T_{ij} = \mu \{ u_{i,j} + u_{j,i} - \lambda [u_s \frac{\partial}{\partial x^s} (u_{i,j} + u_{j,i}) + (u_{s,i} u_{s,j} - u_{i,s} u_{j,s})] \} \quad (2.7)$$

其中, $i, j = 1, 2$, $u_1 = u$, $u_2 = v$, $u_{i,j} = \partial u_i / \partial x_j$, $x_1 = x$, $x_2 = y$ 。

粘性不可压缩均质流体的运动方程为:

$$\rho \frac{d\bar{v}}{dt} = \rho \bar{F} - \text{grad}P + \text{div}\mathbf{T} \quad (2.8)$$

其中, ρ 为密度, \bar{F} 是体积力, P 是运动流体的压力函数.

根据上述两式, 再加上连续性方程:

$$\text{div}\bar{v} = 0 \quad (2.9)$$

即可得到非牛顿流体定常流的基本方程. 对于二维平面流其基本方程可表述为:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.10a)$$

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \nabla^2 u - \nu \lambda \left[\left(u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) \right. \\ & \left. + \left(u \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + v \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x^2} + 5 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.10b)$$

$$\begin{aligned} u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \nabla^2 v - \nu \lambda \left[\left(u \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} + v \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \right. \\ & \left. + \left(u \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + v \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2} + 5 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.10c)$$

其中,
$$\nu = \frac{\mu}{\rho}, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

为了分析上的方便, 将上式进行无量纲化. 引入无量纲参数:

$$\bar{u} = \frac{u}{u_\infty}; \quad \bar{v} = \frac{v}{v_\infty}; \quad \bar{y} = \frac{y}{L}; \quad \bar{x} = \frac{x}{L}; \quad \bar{P} = \frac{P - P^*}{u_\infty^2 \rho / 2} \quad (2.11)$$

其中, u_∞ 为无穷远处的来流速度, L 为特征长度, P^* 为大气压.

无量纲化后的基本方程可表述为:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0 \quad (2.12a)$$

$$\begin{aligned} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = & -\frac{1}{2} \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{x}} + \frac{2}{Re} \nabla^2 \bar{u} - \frac{2}{Re} De \left[\left(\bar{u} \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}^2} + \bar{v} \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial \bar{y}^3} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} \right) \right. \\ & \left. + \left(\bar{u} \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial \bar{x}^3} + \bar{v} \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial \bar{y} \partial \bar{x}^2} + 5 \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + 2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.12b)$$

$$\begin{aligned} \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = & -\frac{1}{2} \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{y}} + \frac{2}{Re} \nabla^2 \bar{v} - \frac{2}{Re} De \left[\left(\bar{u} \frac{\partial^3 \bar{v}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}^2} + \bar{v} \frac{\partial^3 \bar{v}}{\partial \bar{y}^3} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} \right) \right. \\ & \left. + \left(\bar{u} \frac{\partial^3 \bar{v}}{\partial \bar{x}^3} + \bar{v} \frac{\partial^3 \bar{v}}{\partial \bar{y} \partial \bar{x}^2} + 5 \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} + 2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.12c)$$

其中, 雷诺数 $Re = 2u_\infty L / \nu$, Deborah数 $De = \lambda u_\infty / L$.

可见, 直接求解高阶非线性偏微分方程(2.12), 在数学上存在较大的困难. 在小Deborah数条件下, 设:

$$\bar{u} = \bar{u}_0 + De \bar{u}_1 + O(De^2), \quad \bar{v} = \bar{v}_0 + De \bar{v}_1 + O(De^2), \quad \bar{P} = \bar{P}_0 + De \bar{P}_1 + O(De^2) \quad (2.13a, b, c)$$

其中, 下标0代表关于De数的零阶解, 下标1表示关于De的一阶解. 下文中, 为了方便起见, 对无量纲化后的诸量, 不再做出特殊标记; 例如, 无量纲速度分量 \bar{u} 将记为 u .

这样,基本方程的零阶近似方程为:

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} = 0, u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u_0}{\partial y} = -\frac{1}{2} \frac{\partial P_0}{\partial x} + \frac{2}{Re} \nabla^2 u_0 \quad (2.14a, b)$$

$$u_0 \frac{\partial v_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial v_0}{\partial y} = -\frac{1}{2} \frac{\partial P_0}{\partial y} + \frac{2}{Re} \nabla^2 v_0 \quad (2.14c)$$

一阶近似方程为:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0 \quad (2.15a)$$

$$\begin{aligned} u_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_1 \frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u_1}{\partial y} + v_1 \frac{\partial u_0}{\partial y} = & -\frac{1}{2} \frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{2}{Re} \nabla^2 u_1 - \frac{2}{Re} \left[\left(u_0 \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} + v_0 \frac{\partial^3 u_0}{\partial y^3} \right. \right. \\ & + \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial u_0}{\partial y} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \left. \right) + \left(u_0 \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + v_0 \frac{\partial^3 u_0}{\partial y \partial x^2} + 5 \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial u_0}{\partial y} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \right. \\ & \left. \left. + 2 \frac{\partial v_0}{\partial x} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.15b)$$

$$\begin{aligned} u_1 \frac{\partial v_0}{\partial x} + u_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_0 \frac{\partial v_1}{\partial y} + v_1 \frac{\partial v_0}{\partial y} = & -\frac{1}{2} \frac{\partial P_0}{\partial y} + \frac{2}{Re} \nabla^2 v_1 - \frac{2}{Re} \left[\left(u_0 \frac{\partial^3 v_0}{\partial x \partial y^2} + v_0 \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} \right. \right. \\ & + \frac{\partial v_0}{\partial y} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y \partial x} \left. \right) + \left(u_0 \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^3} + v_0 \frac{\partial^3 v_0}{\partial y \partial x^2} + 5 \frac{\partial v_0}{\partial y} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} \right. \\ & \left. \left. + 2 \frac{\partial u_0}{\partial y} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.15c)$$

通过摄动方法,我们将粘弹流的解分解成为粘性流体解和弹性流体解。在 De 数较大的情况下,通过高阶展开,使解达到要求的精度。直接求解上述方程十分困难。本文将采用有限元法进行数值求解。

三、非线性有限元计算方法

利用加权余量法, (2.14) 式的Галеркин积分表达式为:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u_{0k}}{\partial x_k} \delta P_0 d\Omega = 0 \quad (3.1a)$$

$$\int_{\Omega} \left(u_{0k} \frac{\partial u_{0l}}{\partial x_k} + \frac{1}{2} \frac{\partial P_0}{\partial x_l} - \frac{2}{Re} \frac{\partial^2 u_{0l}}{\partial x_k \partial x_k} \right) \delta u_{0k} d\Omega = 0 \quad (3.1b)$$

其中, $k, l=1, 2$, $u_{01}=u_0$, $u_{02}=v_0$ 。

(2.15) 式的Галеркин积分表达式为:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u_{1k}}{\partial x_k} \delta P_1 d\Omega = 0 \quad (3.2a)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(u_{0k} \frac{\partial u_{1l}}{\partial x_k} + u_{1k} \frac{\partial u_{0l}}{\partial x_k} + \frac{1}{2} \frac{\partial P_1}{\partial x_l} - \frac{2}{Re} \frac{\partial^2 u_{1l}}{\partial x_k \partial x_k} \right) \delta u_{1l} d\Omega \\ = -\frac{2}{Re} \left(\int_{\Omega} \left[u_{0k} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x_k} \right) + \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial u_0}{\partial y} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + 5 \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\partial u_0}{\partial y} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial v_0}{\partial x} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \right] \delta u_{1l} d\Omega \right) \end{aligned} \quad (3.2b)$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \left(u_{0k} \frac{\partial v_1}{\partial x_k} + u_{1k} \frac{\partial v_0}{\partial x_k} + \frac{1}{2} \frac{\partial P_1}{\partial y} - \frac{2}{Re} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_k \partial x_k} \right) \delta u_1 d\Omega \\
 &= - \frac{2}{Re} \left(\int_{\Omega} \left[u_{0k} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} \left(\frac{\partial v_0}{\partial x_k} \right) + \frac{\partial v_0}{\partial y} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + 5 \frac{\partial v_0}{\partial y} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \frac{\partial v_0}{\partial x} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial u_0}{\partial y} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} \right] \delta u_1 d\Omega \right) \quad (3.2c)
 \end{aligned}$$

其中, $k, j=1, 2$.

对速度采用8节点等参元插值, 压力采用4节点线性等参元插值. 设速度和压力在单元 e 中的近似函数表达式为:

$$u_i = u_{il} N_l \quad (i=1, 2, \dots, 8, l=1, 2) \quad (3.3a)$$

$$P = P_j N F_j \quad (j=1, 2, 3, 4) \quad (3.3b)$$

对(3.1a)、(3.2a)式取权函数 $N F_j (j=1, 2, 3, 4)$, 对(3.1b)、(3.2b)式取权函数 $N_l (l=1, 2, \dots, 8)$, 就分别得到单元的零阶近似、一阶近似有限元特征方程式.

四、粘弹流体的绕流特性研究

对于粘弹流体的绕圆柱流问题, 注意到关于 x 轴的对称性(图1), 故只考虑上半平面. 这里, 无量纲量 u_{∞} 为来流速度, 特征长度 $L=R$ 为圆柱半径. 边界条件为:

$$\left. \begin{aligned}
 & x^2 + y^2 = 1, u_0 = v_0 = 0, u_1 = v_1 = 0 \\
 & y = 0, \quad v_0 = v_1 = 0 \\
 & \text{在无穷远处 } u_0 = 1, u_1 = v_1 = 0 \\
 & \quad P_0 = P_1 = 0, v_0 = 0
 \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

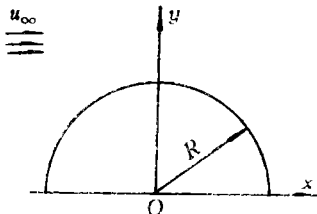


图1 圆柱绕流的问题

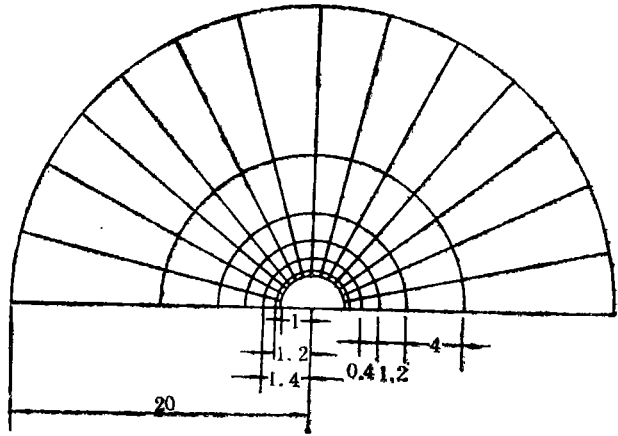


图2 84个单元的网格剖分示意图

单元的剖分如图2所示.

图3给出了在 $Re=20$ 时, 压力的“零阶解”沿物面上的分布情况, 并与 Dennis和 Chang^[10]、Tuann和Olson^[11]的计算结果进行了比较. 不难看出, 本文采用的计算格式的精度是可靠的.

图4在 $Re=20$ 时, 给出了压力的“零阶解”和“一阶解”沿物面的分布情况. 它表明, 在相同的雷诺数下, 粘弹流体压力分布的波动, 比粘性流体的压力分布的波动要大些. 而且, 粘弹流体沿物面的压力值, 要比粘性流体的压力值小一些. 图5在不同雷诺数下, 给出了压力的“一阶解”沿物面分布的情况. 可以看到, 雷诺数愈大, P_1 曲线振荡愈大. 这说明粘弹流体沿物面的压力分布对雷诺数有较强的敏感性.

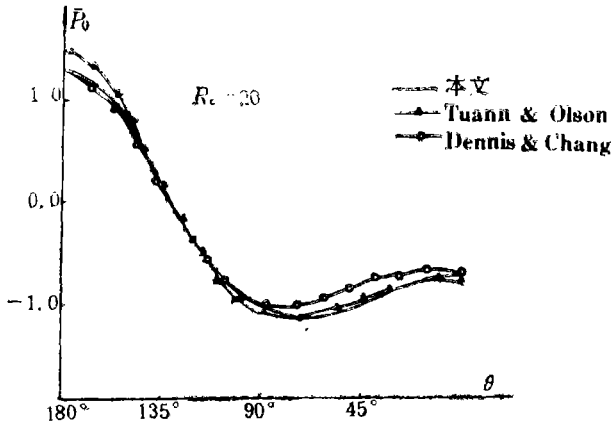


图3 $Re=20$ 时, \bar{P}_0 沿物面压力分布图

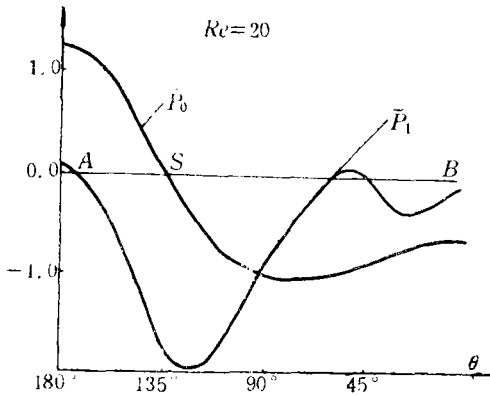


图4 $Re=20$ 时, \bar{P}_0, \bar{P}_1 沿物面压力分布图

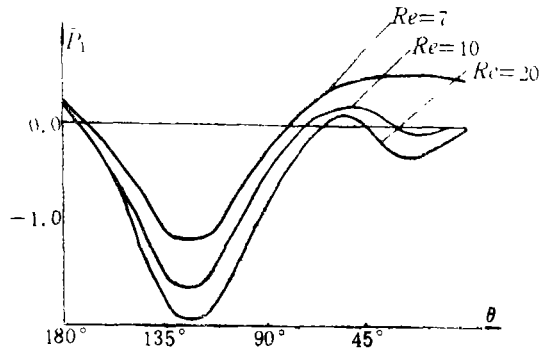


图5 与不同雷诺数对应的 \bar{P}_1 沿物面压力分布图

通过本构方程, 同样对速度、应力偏张量进行摄动展开, 分别得到零阶近似和一阶近似的应力表达式, 对应 De 数的零阶项为:

$$\mathcal{S}_{xx}^0 = 2 \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial x}, \quad \mathcal{S}_{yy}^0 = 2 \frac{\partial \bar{v}_0}{\partial y}, \quad \mathcal{S}_{xy}^0 = \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}_0}{\partial x} \quad (4.2a, b, c)$$

对应 De 数的一阶项为:

$$\mathcal{S}_{xx}^1 = 2 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x} - \left(\frac{\partial \bar{v}_0}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{u}_0}{\partial y} \right)^2 \quad (4.3a)$$

$$\mathcal{S}_{yy}^1 = 2 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial y} + \left(\frac{\partial \bar{v}_0}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial \bar{u}_0}{\partial y} \right)^2 \quad (4.3b)$$

$$\mathcal{S}_{xy}^1 = \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x} - 2 \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial x} \frac{\partial \bar{u}_0}{\partial y} - 2 \frac{\partial \bar{v}_0}{\partial y} \frac{\partial \bar{v}_0}{\partial x} \quad (4.3c)$$

其中,
$$\mathcal{S}_{ij}^0 = \frac{S_{ij}^0}{\rho u_\infty^2 / 2} \cdot \frac{Re}{4}, \quad \mathcal{S}_{ij}^1 = \frac{S_{ij}^1}{\rho u_\infty^2 / 2} \cdot \frac{Re}{4}$$

沿物面的剪应力分布:

$$\bar{\tau} = (\mathcal{S}_{yy}^1 - \mathcal{S}_{xx}^1) \sin\theta \cos\theta + \mathcal{S}_{xy}^1 (\cos^2\theta - \sin^2\theta) \quad (4.4)$$

因此, 粘弹流体的分离条件为:

$$\bar{\tau}_0 + De \bar{\tau}_1 = 0 \quad (4.5)$$

图6和图7分别在 $Re=10$ 和 20 时,给出了物面上的剪应力分布情况。可以看出,由于 $\bar{\tau}_1$ 出现负值,故粘弹流体将发生减阻现象。同时,在雷诺数较大时,当 $\bar{\tau}_0$ 接近于零时, $\bar{\tau}_1$ 为正,这将使粘弹流体发生分离点滞后现象。这与Harnoy^[7]的附面层理论一致。但在较小的雷诺数和Deborah数下,粘弹流体将不会出现分离点滞后现象。这是一个与附面层理论不同的结论。与附面层理论的计算结果对比, $\bar{\tau}_1$ 的分布情况与附面层理论的计算结果也不一致。这是由于附面层理论本身仅适用于大雷诺数的条件。同时,由于它忽略了流场中大部份流域中的弹性影响,它也不能正确地计算分离点附近的情况。所以,在一般雷诺数条件下,附面层理论并不一定能合理地描述粘弹流绕流的力学特性。

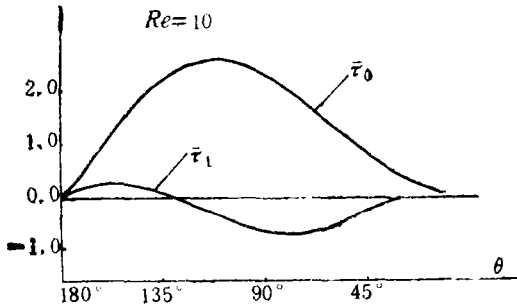


图6 $Re=10$ 时,物面剪应力分布图

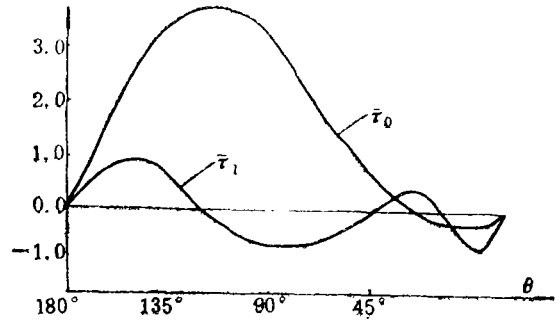


图7 $Re=20$ 时,物面剪应力分布图

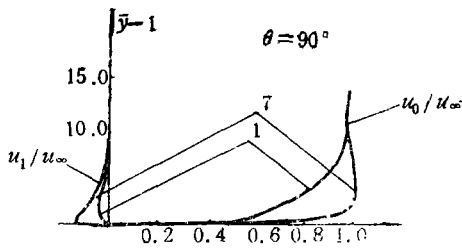


图8 $Re=1, 7, \theta=90^\circ$ 速度剖面图

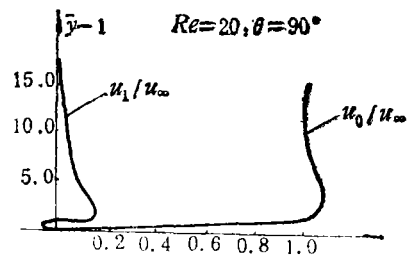


图9 $Re=10, \theta=90^\circ$ 速度剖面图

对于粘弹流体绕圆柱流的速度分布情况,仅仅在大雷诺数下,Harnoy^[7]利用附面层理论给出了一些速度剖面的情况。但在一般雷诺数下,对粘弹流体绕流的速度分布,至今仍缺乏了解。而且,即使在大雷诺数下,对粘弹流的绕流问题,借用粘性流中的附面层理论分析方法,忽略场中大部分区域中的流体的粘弹性对流动行为的影响,也不能完全合理地描述粘弹流体在流场中的速度分布情况。为此利用本文的方法,我们计算了粘弹流体绕圆柱流的速度分布情况。

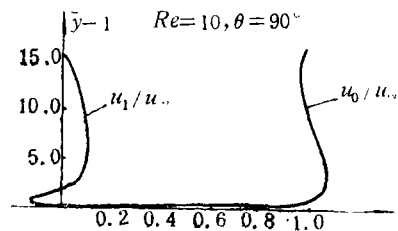


图10 $Re=20, \theta=90^\circ$ 速度剖面图

图8~图10分别在雷诺数 $Re=1, 7, 10, 20$ 时,给出了 $\theta=90^\circ$ 处的速度剖面。可以看出,在绕流时,粘弹流体的速度剖面与粘性流体的速度剖面有很大差异。粘弹流体在绕流中表现出了很强的振荡性。这种振荡性与雷诺数相关, Re 数值愈大,流动中的振荡性愈大。而且,随着雷诺数增大,在物面附近,“一阶解”有非常强烈的变化梯度。从这些图中还可看到,随着雷诺数增大,粘弹性影响仍在流场的一定区域内存在。所以,在一般雷诺数下,用附面层理论

显然不能合理地描述粘弹流体的流动特性。

五、结 束 语

本文通过引入适当的本构关系,建立了分析粘弹流体平面流动的基本方程;并在小 De 数条件下,通过摄动法和加权余量法,建立了粘弹流体的有限元分析方法。在此基础上,本文分析了粘弹流体的绕流特性,研究了压力及剪应力沿物面的分布情况和速度场的分布特点,以及雷诺数的影响。计算结果表明,粘弹流体在绕流中存在着分离点滞后及减阻现象。本文分析了产生这些现象的物理机制。结果表明,本文的方法,对于粘弹流体平面流动特性的分析,具有简便和准确的优点。结果同时表明,牛顿流体和粘弹流体的流动特性之间存在着较大差异。因此,沿用牛顿流体力学中所采用的方法(如附面层理论)来分析粘弹流体的绕流特性具有较大的局限性。

作者对陈大鹏教授对本文工作所给予的许多有益建议和帮助表示由衷的谢意。

参 考 文 献

- [1] Zana, E., F. Tiefenbruck and L. G. Leal, A note on the creeping motion of a viscoelastic fluid past a sphere, *Rheol. Acta.*, **14** (1975), 891—898.
- [2] Sigli, D. and M. Coutanceau, Effect of finite boundaries on the slow laminar-isothermal flow of a viscoelastic fluid around a spherical obstacle, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **2** (1977), 1—21.
- [3] Gudazhi and R.I. Tanner, The drag on a sphere in a power-law fluid, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **17** (1985), 1—12.
- [4] Manero, O. and B. Mena, On the slow flow of viscoelastic liquids past a circular cylinder, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **9** (1981), 379—387.
- [5] Luikov, A.V., Zp. Shulman and Bi Puris, *J. Engg. Physics*, **14** (1968), 11—28.
- [6] Acharya, A., R.A. Mashelkar and J. Ulbrecht, *Rheol. Acta.*, **15** (1976), 471—478.
- [7] Harnoy, A., An investigation into the flow of elastico-viscous fluids past a circular cylinder, *Rheol. Acta.*, **26** (1987), 493—498.
- [8] Oldroyd, J.G., On the formulation of rheological equations of state, *Proc. Roy. Soc.*, **A200**(532) (1950).
- [9] Jeffreys, H., *Rheol. Acta.*, **22**(1) (1983), 1
- [10] Dennis, S.C.R. and G.Z. Chang, Numerical solutions for steady flow past a circular cylinder at Reynolds numbers up to 100, *J. Fluid Mech.*, **42** (1970), 471—489.
- [11] Tuann, S.Y. and D. Olson, Numerical studies of the flow around a circular cylinder by a finite element method, *Computers and Fluids*, **6** (1978), 219—240.

On the Properties of Elastic-Viscous Fluid Flow past an Obstacle

Ma Dan-lin Huang Kuan-yuan

*(Dept. of Engineering Mechanics, Southwest Jiaotong University,
Chengdu)*

Abstract

Fundamental equations for the analysis of plane flow of elastic-viscous fluid are established. On such a basis, a perturbed-weighted residual finite element model for small Deborah number situations is formulated. The model is further incorporated for investigations on the behavioral characteristics of the elastic-viscous fluid flow when passing an obstacle, which include the mechanisms of the retardation of separation point, and the reduction of drag forces and so forth. The numerical investigations demonstrate the favorable advantages of the present model in its remarkable simplicity and reasonable accuracy attained in plane flow analysis.

Key words elastic-viscous fluid, fluid passing an obstacle, retardation of separation point, reduction of drag force, perturbation, FEM