应用数学和力学，第12卷第12期（1991年12月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

推导刚体动力学方程的张量方法*

陶 庆 生

（浙江大学力学系，1990年10月15日收到）

摘 要

本文提出了基于连续介质力学概念推导刚体动力学方程的张量方法，运用具有零共旋率的惯性张量的时间导数公式，证明了Lagrange方程、Nielsen方程、Gibbs-Appell方程、Kane 方程和广义动量式Kane方程等五种方法的等价性。给出了角速度、角加速度之间的一些微分关系式。

关键词 刚体动力学 动力学方程 张量

一、引 言

理性力学中，对构造张量的客观变化率(objective rates)公式研究得较为深入[1][2]，已知所有的二阶张量的客观变化率事实上均为Lie 导数[1]，如弹塑性有限变形中常常提及的Jaumann应力变化率和 Truesdell 应力变化率等[1][3][4]。Jaumann 应力变化率可视为Cauchy应力张量的共旋率 (corotational rates)[5][2]。不同于变质量体，刚体的惯性张量的共旋率为零，这样所得到的惯性张量时间导数的公式[6]，可用来推导各种刚体动力学方程。

经典的Lagrange 方程[7]~[9]涉及动能函数，如果将刚体的动能表达式直接代入方程进行张量运算，需要对惯性张量求导。本文代入惯性张量的导数公式后证明了得到的方程即为著名的Kane方程[8]。用同样的方法本文还证明：对Nielsen 方程[10]、Gibbs-Appell 方程[7][9][10]和广义动量式Kane方程[11]进行张量运算，结果均为Kane方程。由此得出了完整系统下这五种典型的刚体动力学方程的等价性结论。文中还给出了有关刚体运动量之间一些有用的偏微分关系式。

二、基 本 公 式

1. 惯性张量的共旋率及时间导数

设p为刚性三维连续体$\mathscr{B}$中的一质点。p在固定参照构形和在时间 t时的当前构形中的位置矢量分别记为$\mathbf{X}$和$\mathbf{x}$，$\mathscr{B}$的每一运动具有如下形式：

$$\mathbf{x}=\mathbf{Q}(t)\cdot\mathbf{X}+\mathbf{c}(t) \tag{2.1}$$

* 郭仲衡推荐。

其中$\mathbf{Q}(t)$为正规正交张量，$\mathbf{c}(t)$为矢量。

p的速度可表示为[12]

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{\Omega}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{c})+\dot{\mathbf{c}}=\boldsymbol{\omega}\times(\mathbf{x}-\mathbf{c})+\dot{\mathbf{c}} \tag{2.2}$$

其中$\boldsymbol{\omega}$，$\mathbf{\Omega}$分别为角速度矢量和角速度张量，并有如下关系式：

$$\mathbf{\Omega}=\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T=-\mathbf{Q}\dot{\mathbf{Q}}^T=-\mathbf{\Omega}^T \tag{2.3}$$

令$\boldsymbol{\beta}$，$\mathbf{B}$分别为与刚体相关的矢量场和张量场，它们的时间导数为[6]：

$$\dot{\boldsymbol{\beta}}=\mathring{\boldsymbol{\beta}}+\mathbf{\Omega}\cdot\boldsymbol{\beta} \tag{2.4}$$

$$\dot{\mathbf{B}}=\mathring{\mathbf{B}}+\mathbf{\Omega}\mathbf{B}-\mathbf{B}\mathbf{\Omega} \tag{2.5}$$

$\mathring{\boldsymbol{\beta}}$和$\mathring{\mathbf{B}}$分别表示矢量$\boldsymbol{\beta}$和张量$\mathbf{B}$的共旋率。

由于刚体惯性张量$\mathbf{I}$的共旋率为零，我们有

$$\mathring{\mathbf{I}}=0 \tag{2.6}$$

$$\dot{\mathbf{I}}=\mathbf{\Omega}\mathbf{I}-\mathbf{I}\mathbf{\Omega} \tag{2.7}$$

所以，对于任意矢量$\boldsymbol{\beta}_1$和$\boldsymbol{\beta}_2$，如下关系成立。

$$\boldsymbol{\beta}_1\cdot\dot{\mathbf{I}}\cdot\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\beta}_1\cdot\boldsymbol{\omega}\times(\mathbf{I}\cdot\boldsymbol{\beta}_2)-\boldsymbol{\beta}_1\cdot\mathbf{I}\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\beta}_2) \tag{2.8}$$

2. 五种动力学方程

考虑惯性参考系中的完整系统$\mathscr{S}$，由N个质点$p_1,\cdots,p_N$组成，p_i的质量为m_i，矢径为$\mathbf{r}_i$，速度为$\mathbf{v}^i$，加速度为$\mathbf{a}^i$。设系统的广义坐标为$q_r(r=1,\cdots,n)$，广义力为F_r，动能为T，加速度能为S，分别定义为：

$$F_r=\sum_{i=1}^N\mathbf{F}_i\cdot\frac{\partial\mathbf{v}^i}{\partial\dot{q}_r}=\sum_{i=1}^N\mathbf{F}_i\cdot\frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_r}\qquad(r=1,\cdots,n) \tag{2.9}$$

$$T=\sum_{i=1}^N\frac{1}{2}m_i\mathbf{v}^i\cdot\mathbf{v}^i \tag{2.10}$$

$$S=\sum_{i=1}^N\frac{1}{2}m_i\mathbf{a}^i\cdot\mathbf{a}^i \tag{2.11}$$

(2.9)式中$\mathbf{F}_i$为所有作用在质点p_i上的接触力和体力的合力。

(A) Lagrange方程[7]~[10]

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_r}-\frac{\partial T}{\partial q_r}=F_r\qquad(r=1,\cdots,n) \tag{2.12}$$

(B) Nielsen方程[10]

$$\frac{\partial\dot{T}}{\partial\dot{q}_r}-2\frac{\partial T}{\partial q_r}=F_r\qquad(r=1,\cdots,n) \tag{2.13}$$

(C) Gibbs-Appell方程[7][9][10]

$$\partial S/\partial\ddot{q}_r=F_r\qquad(r=1,\cdots,n) \tag{2.14}$$

(D) Kane方程[8][9]

$$F_r+F_r^*=0\qquad(r=1,\cdots,n) \tag{2.15}$$

其中F_r^*为广义惯性力，定义为

$$F_r^*=\sum_{i=1}^N(-m_i\mathbf{a}^i)\cdot\mathbf{v}_r^i\qquad(r=1,\cdots,n) \tag{2.16}$$

$\mathbf{v}_r^i$为p_i的第r个偏速度。

(E) 广义动量式Kane方程[11]

$$\dot{P}_r - F_r^{\diamond} = F_r \qquad (r=1,\cdots,n) \tag{2.17}$$

其中P_r为广义动量，$F_r^{\diamond}$为拉格朗日力[13]：

$$P_r = \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{v}^i \cdot \mathbf{v}_r^i \qquad (r=1,\cdots,n) \tag{2.18}$$

$$F_r^{\diamond} = \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{v}^i \cdot \dot{\mathbf{v}}_r^i \qquad (r=1,\cdots,n) \tag{2.19}$$

$\dot{\mathbf{v}}_r^i$为第r个偏速度$\mathbf{v}_r^i$对时间的导数。

三、五种刚体动力学方程的等价性

对于质量为M、惯性张量为$\mathbf{I}$的刚体，其质心速度、质心加速度、角速度和角加速度分别记为$\mathbf{v}^c$，$\mathbf{a}^c$，$\boldsymbol{\omega}$和$\boldsymbol{\alpha}$，用通过刚体质心的主矢$\mathbf{F}$和主矩$\mathbf{T}$等效代替作用在刚体上的所有主动力，则前面五种动力学方程中的一些量可以表为：

$$F_r = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}_r^c + \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\omega}_r \qquad (r=1,\cdots,n) \tag{3.1}$$

$$T = M\mathbf{v}^c \cdot \mathbf{v}^c/2 + \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}/2 \tag{3.2}$$

$$S = M\mathbf{a}^c \cdot \mathbf{a}^c/2 + \boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{I}\cdot\boldsymbol{\alpha}/2 + \boldsymbol{\omega}\times(\mathbf{I}\cdot\boldsymbol{\omega})\times\boldsymbol{\alpha} \tag{3.3}$$ [9]

$$F_r^* = -M\mathbf{a}^c\cdot\mathbf{v}_r^c - [\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{I} + \boldsymbol{\omega}\times(\mathbf{I}\cdot\boldsymbol{\omega})]\cdot\boldsymbol{\omega}_r \qquad (r=1,\cdots,n) \tag{3.4}$$ [8]

$$P_r = M\mathbf{v}^c\cdot\mathbf{v}_r^c + \boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{I}\cdot\boldsymbol{\omega}_r \qquad (r=1,\cdots,n) \tag{3.5}$$ [11]

$$F_r^{\diamond} = M\mathbf{v}^c\cdot\dot{\mathbf{v}}_r^c + \boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{I}\cdot\dot{\boldsymbol{\omega}}_r \qquad (r=1,\cdots,n) \tag{3.6}$$ [11]

将上面公式代入四种动力学方程 (2.12)、(2.13)、(2.14)、(2.17)，进行矢量、张量运算后，可以证明如下等式成立：

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial T}{\partial q_r} = -F_r^* \qquad (r=1,\cdots,n) \tag{3.7}$$

$$\frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_r} - 2\frac{\partial T}{\partial q_r} = -F_r^* \qquad (r=1,\cdots,n) \tag{3.8}$$

$$\partial S/\partial \ddot{q}_r = -F_r^* \qquad (r=1,\cdots,n) \tag{3.9}$$

$$\dot{P}_r - F_r^{\diamond} = -F_r^* \qquad (r=1,\cdots,n) \tag{3.10}$$

即：Lagrange方程、Nielsen方程、Gibbs-Appell方程和广义动量式Kane方程均导致Kane方程(2.15)。下面给出证明。

首先给出下列六组恒等式：

$$\boldsymbol{\omega}\cdot\dot{\mathbf{I}}\cdot\boldsymbol{\omega}=0,\ \boldsymbol{\omega}\cdot(\partial\mathbf{I}/\partial q_r)\cdot\boldsymbol{\omega} = -2\boldsymbol{\omega}\times(\mathbf{I}\cdot\boldsymbol{\omega})\cdot\boldsymbol{\omega}_r \tag{3.11a,b}$$

$$\boldsymbol{\omega}\cdot\dot{\mathbf{I}}\cdot\boldsymbol{\omega}_r = \boldsymbol{\omega}\times(\mathbf{I}\cdot\boldsymbol{\omega})\cdot\boldsymbol{\omega}_r \tag{3.12}$$

$$\dot{\mathbf{v}}_r^c = \partial\mathbf{v}^c/\partial q_r,\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_r = \partial\boldsymbol{\omega}/\partial q_r + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega}_r \tag{3.13a,b}$$

$$\partial\mathbf{a}^c/\partial\dot{q}_r = 2\partial\mathbf{v}^c/\partial q_r \tag{3.14}$$

$$\partial\boldsymbol{\alpha}/\partial\dot{q}_r = 2\partial\boldsymbol{\omega}/\partial q_r + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega}_r \tag{3.15}$$

$$\partial\mathbf{a}^c/\partial\ddot{q}_r = \mathbf{v}_r^c,\ \partial\boldsymbol{\alpha}/\partial\ddot{q}_r = \boldsymbol{\omega}_r \tag{3.16a,b}$$

(3.11a)和(3.12)式可由(2.8)式导出，(3.11b)式由(2.7)式导出。推导(3.15)式时利用了

以下关系式：

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathbf{a}^i}{\partial \dot{q}_r}=\frac{\partial \mathbf{a}^c}{\partial \dot{q}_r}+\frac{\partial \boldsymbol{\alpha}}{\partial \dot{q}_r}\times\mathbf{d}+\boldsymbol{\omega}_r\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{d})+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}_r\times\mathbf{d})\\
&\frac{\partial \mathbf{a}^i}{\partial \dot{q}_r}-\frac{\partial \mathbf{a}^c}{\partial \dot{q}_r}=2\left(\frac{\partial \mathbf{v}^i}{\partial q_r}-\frac{\partial \mathbf{v}^c}{\partial q_r}\right)=2\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial q_r}\times\mathbf{d}+2\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}_r\times\mathbf{d})
\end{aligned}\right\} \tag{3.17}
$$

其中$\mathbf{d}$为质点p_i相距质心的矢径。

（1） 关于Lagrange方程

由(3.2)和(3.11b)式得

$$\partial T/\partial q_r=M\mathbf{v}^c\cdot\partial\mathbf{v}^c/\partial q_r+\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{I}\cdot\partial\boldsymbol{\omega}/\partial q_r-\boldsymbol{\omega}\times(\mathbf{I}\cdot\boldsymbol{\omega})\cdot\boldsymbol{\omega}_r \tag{3.18}$$

$$\partial T/\partial \dot{q}_r=M\mathbf{v}^c\cdot\mathbf{v}_r^c+\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{I}\cdot\boldsymbol{\omega}_r \tag{3.19}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}=M\mathbf{a}^c\cdot\mathbf{v}_r^c+\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{I}\cdot\boldsymbol{\omega}_r+\boldsymbol{\omega}\cdot\dot{\mathbf{I}}\cdot\boldsymbol{\omega}_r+M\mathbf{v}^c\cdot\dot{\mathbf{v}}_r^c+\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{I}\cdot\dot{\boldsymbol{\omega}}_r \tag{3.20}$$

将(3.12)和(3.13a,b)式代入上式，得

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}=M\mathbf{a}^c\cdot\mathbf{v}_r^c+[\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{I}+\boldsymbol{\omega}\times(\mathbf{I}\cdot\boldsymbol{\omega})]\cdot\boldsymbol{\omega}_r+M\mathbf{v}^c\cdot\frac{\partial\mathbf{v}^c}{\partial q_r}+\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{I}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial q_r} \tag{3.21}$$

由(3.13)、(3.21)和(3.4)式可证得(3.7)式成立。

（2） 关于Nielsen方程

由(3.2)和(3.11a)式得

$$\dot{T}=M\mathbf{a}^c\cdot\mathbf{v}^c+\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{I}\cdot\boldsymbol{\omega} \tag{3.22}$$

$$\partial\dot{T}/\partial\dot{q}_r=M\mathbf{a}^c\cdot\mathbf{v}_r^c+\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{I}\cdot\boldsymbol{\omega}_r+M\mathbf{v}^c\cdot\partial\mathbf{a}^c/\partial\dot{q}_r+\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{I}\cdot\partial\boldsymbol{\alpha}/\partial\dot{q}_r \tag{3.23}$$

将(3.14)和(3.15)式代入(3.23)式便得到

$$\frac{\partial\dot{T}}{\partial\dot{q}_r}=M\mathbf{a}^c\cdot\mathbf{v}_r^c+\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{I}\cdot\boldsymbol{\omega}_r+2M\mathbf{v}^c\cdot\frac{\partial\mathbf{v}^c}{\partial q_r}+2\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{I}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial q_r}-\boldsymbol{\omega}\times(\mathbf{I}\cdot\boldsymbol{\omega})\cdot\boldsymbol{\omega}_r \tag{3.24}$$

由(3.24)、(3.18)和(3.4)式可证得(3.8)式成立。

（3） 关于Gibbs-Appell方程

由(3.3)和(3.16a,b)式得

$$\partial S/\partial\ddot{q}_r=M\mathbf{a}^c\cdot\mathbf{v}_r^c+\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{I}\cdot\boldsymbol{\omega}_r+\boldsymbol{\omega}\times(\mathbf{I}\cdot\boldsymbol{\omega})\cdot\boldsymbol{\omega}_r \tag{3.25}$$

显然由上式和(3.4)式可证得(3.9)式成立。

（4） 关于广义动量式Kane方程

由(3.5)和(3.12)式得

$$\dot{P}_r=M\mathbf{a}^c\cdot\mathbf{v}_r^c+[\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{I}+\boldsymbol{\omega}\times(\mathbf{I}\cdot\boldsymbol{\omega})]\cdot\boldsymbol{\omega}_r+M\mathbf{v}^c\cdot\dot{\mathbf{v}}_r^c+\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{I}\cdot\dot{\boldsymbol{\omega}}_r \tag{3.26}$$

由(3.26)、(3.6)和(3.4)式可证得(3.10)式成立。

四、讨 论

刚体情况下各种动力学方程等价性的证明过程，比较深刻地揭示了不同方法的特点和相互关系，还具体反映了不同方法处理刚体运动量的难易。就单个刚体证明的结论不失一般性，对多刚体系统，(3.7)～(3.10)式依然成立。

对于非完整系统，两类Kane方程和Gibbs-Appell 方程形式不变[9][10][11]，只须在准坐标下进行分析即可，它们的等价性证明过程基本如前。Lagrange方程和Nielsen方程均

基于动能函数，但分别采用Euler算子和 Nielsen 算子[14]。基于动能函数的非完整系统动力学方程的形式较为复杂，其中包括采用 Euler 算子的广义 Чаплыгин 方程[10]和采用 Nielsen算子的广义 Nielsen 方程[10]等。用类似前面介绍的方法可以证明准坐标下的广义Чаплыгин方程和广义Nielsen方程均导致Kane方程。限于本文篇幅，证明过程从略。

如果惯性张量的共旋率不为零，则利用公式(2.5)采取类似的张量方法可建立相适应的动力学方程。

将理性力学的概念和方法更多地引入刚体动力学中，无疑会扩大刚体动力学研究的天地，而且有助于对复杂柔性构件进行运动和变形的耦合分析。

感谢郭仲衡教授对本文不吝指教。

参 考 文 献

[1] Marsden, J. E. and T. J. R. Hughes, *Mathematical Foundations of Elasticity*, Prentice-Hall, Inc. (1983).

[2] Guo Zhong-heng, Time derivatives of tensor fields in nonlinear continuum mechanics, *Arch. Mech. Stosowanej*, 1(15) (1963), 131—163.

[3] Hughes, T. J. R., Numerical implementation of constitutive models: rate-independent deviatoric plasticity, *Workshop on Theoretical Foundations for Large-Scale Computations of Nonlinear Material Behavior*, Northwestern Univ., Evanston, IL., USA (1983).

[4] 孟凡中，《弹塑性有限变形理论和有限元方法》，清华大学出版社 (1985).

[5] Truesdell, C. and R. A. Toupin, *The Classical Field Theories, Handbuch der Physik*, Bd Ⅲ/1, Springer (1960).

[6] Casey, J., A treatment of rigid body dynamics, *J. Appl. Mech.*, 50 (1983), 905—907.

[7] 汪家訸，《分析力学》，高等教育出版社 (1982).

[8] Kane, T. R., *Dynamics*, 3rd ed., Stanford University, Stanford, California, USA (1978).

[9] Kane, T. R. and D. A. Levinson, Formulation of equations of motions for complex spacecraft, *J. Guidance and Control*, 3(2) (1980), 99—112.

[10] 梅凤翔，《非完整系统力学基础》，北京工业学院出版社 (1985).

[11] 陶庆生，新型广义动量式动力学方程，浙江大学学报，23(3) (1989), 450—458.

[12] Truesdell, C., *A First Course in Rational Continuum Mechanics*, 1, Academic Press (1977).

[13] 梁昆淼，《力学》(下册)，人民教育出版社 (1980).

[14] 梅凤翔，分析力学中的Nielsen算子和Euler算子，力学学报，16(6) (1984), 596—603.

A Tensor Method for the Derivation of the Equations of Rigid Body Dynamics

Tao Qing-sheng

(*Zhejiang University, Zhejiang*)

Abstract

A tensor method for the derivation of the equations of rigid body dynamics, based on the concepts of continuum mechanics, is presented. The formula of time derivative of the inertia tensor with zero corotational rate is used to prove the equivalences of five methods, namely, Lagrange's equations, Nielsen's equations, Gibbs-Appell's equations, Kane's equations and the generalized momentum type of Kane's equations. Some differential identities on angular velocity and angular acceleration are given.

Key words rigid body dynamics, dynamical equation, tensor