

复合材料圆锥壳体的外压稳定性*

王 虎 王俊奎

(北京航空航天大学飞行器设计与应用力学系, 1990年3月24日收到)

摘 要

本文采用 Donnell 型扁壳理论, 在文献[1]的基础上, 应用能量变分法分析了在均布外压作用下复合材料叠层圆锥壳体的稳定性问题, 得到了临界载荷的近似表达式。数值结果表明, 临界载荷的理论预示值与实验结果非常吻合。最后, 讨论了材料弹性常数、铺层参数等因素对临界载荷的影响。本文所得结果对航空航天结构设计具有重要参考价值。

关键词 复合材料壳 圆锥壳 稳定性 能量变分法

一、前 言

圆锥壳是一种常用薄壁承载结构, 在航空航天工程中被广泛地用作为发动机喷嘴, 飞机雷达罩, 多级火箭级间连接件, 卫星结构部件和导弹的局部壳体等。自从1937年 Pflüger^[2]最早研究圆锥壳稳定性问题以来, 人们对各向同性材料(如金属材料)制成的圆锥壳的力学性能进行了不少研究^[3~5]。随着科学技术的发展, 高强度纤维增强复合材料在宇航等工程中的应用日趋广泛, 弹性稳定性问题的研究也逐步涉及到复合材料叠层圆锥壳^[6~9]。由于在航空航天工程中, 大部份复合材料圆锥壳都在外压环境下工作, 因此, 研究这类结构在外压作用下的稳定性问题具有重要的工程意义。

本文在文献[1]的基础上, 应用能量变分法分析了在均布外压作用下复合材料叠层圆锥壳的稳定性问题。数值结果表明, 本文分析方法给出的临界载荷的理论预示值与实验结果非常吻合。本文还对有关参数对临界载荷的影响进行了讨论。文献[1]所建立的混合型理论和本文所得结果对于宇航结构设计具有重要参考价值。

二、基 本 方 程

考虑图1所示的截顶圆锥壳体, 对于线性稳定问题, 则有以下基本方程^[1]

$$L_{11}(w) + L_{12}(F) - N_{s_0} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} - N_{\theta_0} \left(\frac{1}{s} \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{1}{s^2 \sin^2 \alpha} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right)$$

* 钱伟长、蒋咏秋推荐。
国家教委高等学校博士点资金资助项目。

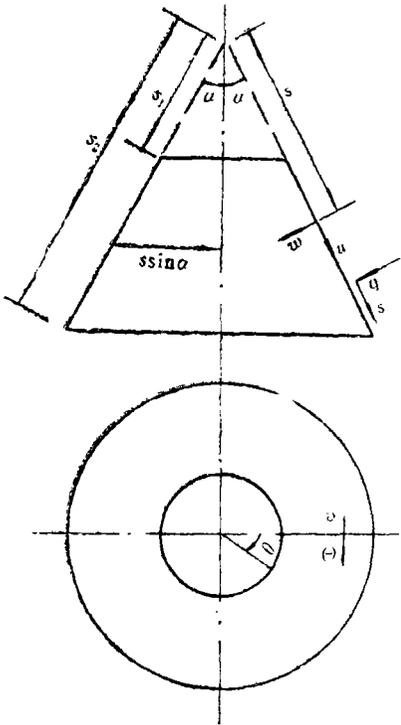


图1 圆锥壳几何尺寸

$$-2N_{s\theta_0} \frac{1}{\sin\alpha} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{s} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (2.1)$$

$$L_{21}(w) + L_{22}(F) - \text{ctg} \alpha \frac{1}{s} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} = 0 \quad (2.2)$$

方程式(2.1)和(2.2)分别是壳体在径向的平衡方程和变形协调条件; 在式(2.1)中, N_{s_0} , N_{θ_0} 和 $N_{s\theta_0}$ 为屈曲时内力, 位移分量应理解为从屈曲前的平衡位置到屈曲后的平衡位置的增量, 并假定屈曲前壳体处于薄膜应力状态。在

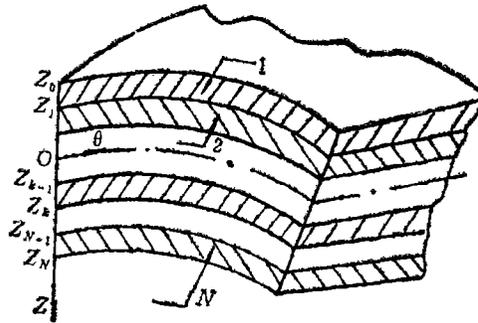


图2 叠层圆锥壳单元块

式(2.1)和(2.2)中, w 是变形函数, F 是应力函数, $L_{ij}(i, j=1, 2)$ 是线性微分算子, 定义为

$$\left. \begin{aligned} L_{11} &= d_{11}l_{11} + d_{12}l_{12} + d_{16}l_{16} + d_{22}l_{22} + d_{26}l_{26} + d_{66}l_{66} \\ L_{12} &= b_{11}l_{11} + b_{21}l_{21} - b_{61}l_{61} + b_{12}l_{12} + b_{22}l_{22} - b_{62}l_{62} + b_{16}l_{16} + b_{26}l_{26} - b_{66}l_{66} \\ L_{21} &= b_{11}l_{22} + b_{12}l_{12} + 2b_{16}l_{62} + b_{21}l_{21} + b_{22}l_{11} + 2b_{26}l_{61} - b_{61}l_{26}/2 - b_{62}l_{16}/2 - b_{66}l_{66} \\ L_{22} &= -a_{11}l_{22} - a_{12}l_{12} + a_{16}l_{26}/2 - a_{22}l_{11} + a_{26}l_{16}/2 - a_{66}l_{66}/4 \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

式中 l_{ij} 和 $l_{ij}(i, j=1, 2, 6)$ 是微分算子, (见[1](4.9)), a_{ij} , b_{ij} 和 $d_{ij}(i, j=1, 2, 6)$ 由下式确定

$$a = A^{-1}, \quad b = -A^{-1}B, \quad d = D - BA^{-1}B \quad (2.4)$$

其中 A , B 和 D 分别为拉伸刚度, 耦合刚度和弯曲刚度, 且

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k \left(Z_k - Z_{k-1}, \frac{Z_k^2 - Z_{k-1}^2}{2}, \frac{Z_k^3 - Z_{k-1}^3}{3} \right) \quad (2.5)$$

式中 $(\bar{Q}_{ij})_k$ 是第 k 层铺层的转换弹性刚度系数^[10], Z_k 和 Z_{k-1} 的意义见图2。

本构关系为

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_s \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{s\theta} \\ M_s \\ M_\theta \\ M_{s\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} & b_{11} & b_{12} & b_{16} \\ a_{12} & a_{22} & a_{26} & b_{21} & b_{22} & b_{26} \\ a_{16} & a_{26} & a_{66} & b_{61} & b_{62} & b_{66} \\ -b_{11} & -b_{21} & -b_{61} & d_{11} & d_{12} & d_{16} \\ -b_{12} & -b_{22} & -b_{62} & d_{12} & d_{22} & d_{26} \\ -b_{16} & -b_{26} & -b_{66} & d_{16} & d_{26} & d_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_s \\ N_\theta \\ N_{s\theta} \\ x_s \\ x_\theta \\ 2x_{s\theta} \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

式中

$$N_s = \frac{1}{s} \frac{\partial F}{\partial s} + \frac{1}{s^2 \sin^2 \alpha} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}, N_\theta = \frac{\partial^2 F}{\partial s^2}, N_{s\theta} = -\frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{s} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right) \quad (2.7)$$

$$x_s = -\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}, x_\theta = -\frac{1}{s} \frac{\partial w}{\partial s} - \frac{1}{s^2 \sin^2 \alpha} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}, x_{s\theta} = -\frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{s} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \quad (2.8)$$

利用最小势能原理, 可以导出在任意载荷作用下的平衡方程. 对于线性稳定问题, 系统总势能的表达式为

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 \quad (2.9)$$

式中 Π_1 和 Π_2 分别为壳体应变能和外力势能, 且

$$\left. \begin{aligned} \Pi_1 &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{s_1}^{s_2} (N_s \varepsilon_s + N_\theta \varepsilon_\theta + N_{s\theta} \gamma_{s\theta} + M_s x_s + M_\theta x_\theta + 2M_{s\theta} x_{s\theta}) s \sin \alpha ds d\theta \\ \Pi_2 &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{s_1}^{s_2} \left[N_{s_0} \left(\frac{\partial w}{\partial s} \right)^2 + N_{\theta_0} \left(\frac{1}{s \sin \alpha} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 + 2N_{s\theta_0} \frac{\partial w}{\partial s} \left(\frac{1}{s \sin \alpha} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right] s \sin \alpha ds d\theta \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

由总势能 Π 的一阶变分为零的条件, 即 $\delta \Pi = 0$, 可导出平衡方程(2.1).

根据文献[1]可知, 方程(2.1)和(2.2)是变系数偏微分方程, 求其精确解比较困难. 下面应用能量变分法研究复合材料圆锥壳的外压稳定性问题.

三、基本方程的无量纲化

为了分析问题的方便起见, 引入坐标变换

$$z = \ln(s/s_1) \quad (3.1)$$

和下面的无量纲量和常数

$$\hat{w} = \frac{w}{h}, \hat{F} = \frac{F}{E_{11} h^3}, \hat{a}_{ij} = E_{11} h a_{ij}, \hat{b}_{ij} = \frac{b_{ij}}{h}, \hat{d}_{ij} = \frac{d_{ij}}{E_{11} h^3}, \hat{q} = \frac{q s_1^2}{E_{11} h^4} \quad (3.2)$$

则有以下无量纲形式的基本方程和关系式

$$\hat{L}_{11}(\hat{w}) + \hat{L}_{12}(\hat{F}) - \hat{N}_{s_0} (D_1^2 - D_1) \hat{w} e^{2z} - \hat{N}_{\theta_0} (D_1 + D_1^2) \hat{w} e^{2z} - 2\hat{N}_{s\theta_0} (D_1 - 1) D_2 \hat{w} e^{2z} = 0 \quad (3.3)$$

$$\hat{L}_{21}(\hat{w}) + \hat{L}_{22}(\hat{F}) - \frac{s_1}{h} e^z \text{ctg} \alpha D_1 (D_1 - 1) \hat{w} = 0 \quad (3.4)$$

其中 $D_1 = \partial / \partial z, D_2 = (\sin \alpha)^{-1} \partial / \partial \theta \quad (3.5)$

$$(\hat{N}_{s_0}, \hat{N}_{\theta_0}, \hat{N}_{s\theta_0}) = [s_1^2 / E_{11} h^3] (N_{s_0}, N_{\theta_0}, N_{s\theta_0}) \quad (3.6)$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{L}_{11} &= \hat{d}_{11} \hat{l}_{11} + \hat{d}_{12} \hat{l}_{12} + \hat{d}_{16} \hat{l}_{16} + \hat{d}_{22} \hat{l}_{22} + \hat{d}_{26} \hat{l}_{26} + \hat{d}_{66} \hat{l}_{66} \\ \hat{L}_{12} &= \hat{b}_{11} \hat{f}_{11} + \hat{b}_{21} \hat{f}_{21} - \hat{b}_{61} \hat{f}_{61} + \hat{b}_{12} \hat{f}_{12} + \hat{b}_{22} \hat{f}_{22} - \hat{b}_{62} \hat{f}_{62} \\ &\quad + \hat{b}_{16} \hat{f}_{16} + \hat{b}_{26} \hat{f}_{26} - \hat{b}_{66} \hat{f}_{66} \\ \hat{L}_{21} &= \hat{b}_{11} \hat{f}_{22} + \hat{b}_{12} \hat{f}_{12} + 2\hat{b}_{16} \hat{f}_{62} + \hat{b}_{21} \hat{f}_{21} + \hat{b}_{22} \hat{f}_{11} + 2\hat{b}_{26} \hat{f}_{61} \\ &\quad - \hat{b}_{61} \hat{f}_{26} / 2 - \hat{b}_{62} \hat{f}_{16} / 2 - \hat{b}_{66} \hat{f}_{66} \\ \hat{L}_{22} &= -\hat{a}_{11} \hat{l}_{22} - \hat{a}_{12} \hat{l}_{12} + \frac{\hat{a}_{16}}{2} \hat{l}_{26} - \hat{a}_{22} \hat{l}_{11} + \frac{\hat{a}_{26}}{2} \hat{l}_{16} - \frac{\hat{a}_{66}}{4} \hat{l}_{66} \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

式(3.7)中, l_{ij} 和 \hat{l}_{ij} ($i, j=1, 2, 6$)是微分算子, 见附录 I.

无量纲形式的内力素的表达式为

$$\hat{N}_s = e^{-2z}(D_1 + D_2^2)\hat{F}, \quad \hat{N}_\theta = e^{-2z}(D_1^2 - D_1)\hat{F}, \quad \hat{N}_{s\theta} = e^{-2z}(D_1 - 1)D_2\hat{F} \quad (3.8)$$

式中 $(\hat{N}_s, \hat{N}_\theta, \hat{N}_{s\theta}) = [s_1^2/E_{11}h^3](N_s, N_\theta, N_{s\theta})$ (3.9)

无量纲形式的本构关系可表示为

$$\begin{Bmatrix} \hat{\varepsilon} \\ \hat{M} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b^T & d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{N} \\ \hat{K} \end{Bmatrix} \quad (3.10)$$

式中上标“T”表示该矩阵的转置, 且

$$\left. \begin{aligned} (\hat{\varepsilon}_s, \hat{\varepsilon}_\theta, \hat{\gamma}_{s\theta}) &= [s_1^2/h^2](\varepsilon_s, \varepsilon_\theta, \gamma_{s\theta}) \\ (\hat{M}_s, \hat{M}_\theta, \hat{M}_{s\theta}) &= [s_1^2/E_{11}h^4](M_s, M_\theta, M_{s\theta}) \\ (\hat{x}_s, \hat{x}_\theta, \hat{x}_{s\theta}) &= [s_1^2/h](x_s, x_\theta, x_{s\theta}) \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

且 $(\hat{x}_s, \hat{x}_\theta, \hat{x}_{s\theta}) = [-e^{-2z}]\{(D_1^2 - D_1)\dot{w}, (D_1 + D_2^2)\dot{w}, (D_1 - 1)D_2\dot{w}\}$ (3.12)

无量纲形式的总势能表达式为

$$\begin{aligned} \hat{\Pi} &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{z_0} (\hat{N}_s \hat{\varepsilon}_s + \hat{N}_\theta \hat{\varepsilon}_\theta + \hat{N}_{s\theta} \hat{\gamma}_{s\theta} + \hat{M}_s \hat{x}_s + \hat{M}_\theta \hat{x}_\theta + 2\hat{M}_{s\theta} \hat{x}_{s\theta}) \\ &\quad \cdot e^{2z} \sin \alpha dz d\theta + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{z_0} [\hat{N}_{s_0} (D_1 \dot{w})^2 + \hat{N}_{\theta_0} (D_2 \dot{w})^2 \\ &\quad + 2\hat{N}_{s\theta_0} D_1 \dot{w} D_2 \dot{w}] e^{2z} \sin \alpha dz d\theta \end{aligned} \quad (3.13)$$

式中, $\hat{\Pi} = \Pi s_1^2/E_{11}h^5$, $z_0 = \ln(s_2/s_1)$ (3.14)

根据最小势能原理, 即

$$\delta \hat{\Pi} = 0 \quad (3.15)$$

可以导出平衡方程(3.3).

式(3.4)、(3.13)和(3.15)构成了复合材料圆锥壳稳定性问题的基本方程. 下面利用能量变分法求解基本方程(3.4)、(3.13)和(3.15), 从而获得问题的解答.

四、理论分析

对于经典简支边界条件, 变形函数可以假设为

$$w = w_0 \sin Kz \cos n\theta \quad (4.1)$$

式中 $K = m\pi/z_0$ (4.2)

将变形函数(4.1)代入变形协调方程(3.4), 经过一系列复杂运算, 可以求出应力函数 \hat{F} 为

$$\hat{F} = w_0 f_1 e^z (K \sin Kz + \cos Kz) \cos n\theta + w_0 (f_2 \sin Kz + f_3 \cos Kz) \cos n\theta \quad (4.3)$$

式中 f_i ($i=1, 2, 3$)是常数 (为了书写方便起见, 以下全部略去无量纲量的符号“^”)

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= \frac{s_1 K \cot \alpha}{h [a_{11}(N^4 - 2N^2 + K^2 + 1) + (2a_{12} + a_{66})K^2 N^2 + a_{22}K^2(1 + K^2)]} \\ f_2 &= \frac{K_1 K_3 - K_2 K_4}{K_1^2 + K_2^2}, \quad f_3 = \frac{K_1 K_4 + K_2 K_3}{K_1^2 + K_2^2} \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

K_i ($i=1, 2, 3, 4$)是常数

$$\left. \begin{aligned} K_1 &= a_{11}(K^2 + N^4 - 2N^2) + (2a_{12} + a_{66})(K^2 - 1)N^2 + a_{22}K^2(K^2 + 5) \\ K_2 &= -2a_{11}K - 2(2a_{12} + a_{66})KN^2 - 2a_{22}(2K^2 - 1)K \\ K_3 &= b_{11}K^2(N^2 - 3) + b_{12}(K^2 + N^4 - 2N^2) + b_{21}K^2(K^2 - 5) \\ &\quad + b_{22}(3K^2 + K^2N^2 - 2N^2) + 2b_{66}(1 - K^2)N^2 \\ K_4 &= b_{11}(KN^2 + K^3 - 2K) + 2b_{12}K + 2b_{21}K(K^2 - 1) + b_{22}(-K^3 \\ &\quad + 3KN^2 + 2K) - 4b_{66}KN^2 \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

式中 $N = n/\sin\alpha$ (4.6)

对于承受均布外压作用的圆锥壳，其内力分量表达式为

$$N_{s_0} = -\frac{q \tan\alpha}{2s}(s^2 - s_1^2), \quad N_{\theta_0} = -qstg\alpha, \quad N_{s\theta_0} = 0 \quad (4.7)$$

将式(4.7)改写为无量纲形式，可得

$$\hat{N}_{s_0} = b(e^{-z} - e^z), \quad \hat{N}_{\theta_0} = -2be^z, \quad \hat{N}_{s\theta_0} = 0 \quad (4.8)$$

式中 $b = \hat{q}htg\alpha/2s_1$ (4.9)

将式(4.3)和(4.8)代入总势能表达式(3.13)，经过一系列非常复杂的运算，最后可得总势能为

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{\pi \sin\alpha}{2} \hat{w}_0^2 (a_{11}c_1 + 2a_{12}c_2 + a_{22}c_3 + a_{66}c_4 + d_{11}c_5 \\ &\quad + 2d_{12}c_6 + d_{22}c_7 + 4d_{66}c_8 - bc_b) \end{aligned} \quad (4.10)$$

其中 $c_i (i=1, \dots, 8, b)$ 是常数，其值为

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= z_0(K_5^2 + K_6^2)/2 + K_7^2 I_3 + K_8^2 I_4 + K_7 K_8 I_1 + 2K_5 K_7 I_5 \\ &\quad + (K_6 K_7 + K_5 K_8) I_2 + 2K_6 K_8 I_6 \\ c_2 &= z_0 K_5 K_9 / 2 + (K_5 K_{11} + K_7 K_9) I_5 + (K_5 K_{12} + K_6 K_{11} + K_8 K_9) I_2 / 2 \\ &\quad + K_6 K_{12} I_6 + K_7 K_{11} I_3 + (K_7 K_{12} + K_8 K_{11}) I_1 / 2 + K_8 K_{12} I_4 \\ c_3 &= z_0 K_6^2 / 2 + K_{11}^2 I_3 + K_{12}^2 I_4 + K_{11} K_{12} I_1 + 2K_9 K_{11} I_5 + K_9 K_{12} I_2 \\ c_4 &= z_0 (K_{13}^2 + K_{14}^2) / 2 + K_{15}^2 I_3 + K_{16}^2 I_4 + K_{15} K_{16} I_1 + 2K_{13} K_{15} I_7 \\ &\quad + (K_{14} K_{15} + K_{16} K_{18}) I_2 + 2K_{14} K_{16} I_6 \\ c_5 &= K^2 (I_4 + K I_1 + K^2 I_3), \quad c_6 = K^2 (N^2 I_3 - I_4) + (K^3 - KN^2) I_1 / 2 \\ c_7 &= N^4 I_3 - KN^2 I_1 + K^2 I_4, \quad c_8 = N^2 (I_3 - K I_1 + K^2 I_4) \\ c_b &= -K^2 I_6 + K^2 I_8 + 2N^2 I_7 \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

式中 $I_i (i=1, 2, \dots, 8)$ 是定积分值，见附录 II； $K_i (i=5, 6, \dots, 16)$ 是常数值

$$\left. \begin{aligned} K_5 &= -f_1 KN^2, \quad K_6 = f_1 (K^2 - 1 + N^2), \quad K_7 = f_2 K^2 - f_3 N \\ K_8 &= -f_2 K + f_3 N^2, \quad K_9 = -f_1 K (1 + K^2), \quad K_{10} = 0 \\ K_{11} &= (f_3 - f_2 K) K, \quad K_{12} = -K (f_2 + f_3 K), \quad K_{13} = -f_1 KN \\ K_{14} &= f_1 K^2 N, \quad K_{15} = -N (f_2 + f_3 K), \quad K_{16} = N (f_2 K - f_3) \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

将式(4.10)代入式(3.15)，可得

$$\delta \Pi = \delta w_0 \partial \Pi / \partial w_0 = 0 \quad (4.13)$$

由 $\partial \Pi / \partial w_0 = 0$ 可得临界载荷的表达式为

$$b = (a_{11}c_1 + 2a_{12}c_2 + a_{22}c_3 + a_{66}c_4 + d_{11}c_5 + 2d_{12}c_6 + d_{22}c_7 + 4d_{66}c_8) / c_b \quad (4.14)$$

在已知复合材料圆锥壳的材料弹性常数，几何尺寸等参数时，可以选择不同的 m 值和 n

值, 使式(4.14)取极小值, 从而得到临界外压值 b_{cr} 和临界波数 m_{cr} 和 n_{cr} 。

五、数值结果与讨论

根据上述分析, 我们对复合材料叠层圆锥壳的外压稳定性进行了分析。为了验证文献[1]所建立的混合型理论的精度和本文理论分析方法的正确性, 首先将本文理论预示值与临界载荷的实验结果进行了比较, 两者非常吻合。

试件是由玻璃纤维和碳纤维连续缠绕制成, 表1给出了纤维和基体的基本性能参数。表2列出了复合材料叠层圆锥壳工艺参数和几何参数。本文理论预示值与临界载荷的实验结果的比较在表3中给出。从表3可以看出, 理论预示值与实验结果相当吻合, 最大相对误差为6.16%, 最小相对误差为0.52%, 平均相对误差为3.86%。

表 1 材料基本性能参数

材 料	拉伸模量(MPa)	剪切模量(MPa)	泊 松 比	比重 (g/cm ³)	拉伸强度(MPa)
玻璃纤维	8.34×10^4	3.42×10^4	0.220	2.60	—
碳纤维	2.13×10^5	8.07×10^4	0.320	1.77	2.15×10^3
环氧树脂	3.30×10^3	1.34×10^3	0.231	1.23	51.00

表 2 复合材料圆锥壳工艺和几何参数

编 号	铺层顺序	h (mm)	D_1 (mm)	D_2 (mm)	L (mm)	W (g)	W_m (%)
G-1-1	90°/±30°/90°	0.96	265.4	327.1	197.6	297	52.3
G-1-2		1.26	265.1	327.5	200.2	393	51.2
G-1-3		1.37	264.8	327.6	201.1	420	53.3
G-2-1	90°/±45°/90°	1.15	264.9	326.8	197.2	374	49.0
G-2-2		1.24	265.0	326.9	197.1	399	51.4
C-1-1	90°/±30°/90°	1.42	265.3	327.5	198.4	446	39.1
C-2-1	90°/±45°/90°	1.17	265.4	328.3	200.5	302	48.8

注 半锥角 $\alpha=9^\circ$, 各铺层等厚。

表 3 临界载荷的比较*

试 件 编 号	实验值 q_{cr}^e (MPa)	理论值 q_{cr}^t (MPa)	$(q_{cr}^t - q_{cr}^e / q_{cr}^e) \times 100\%$
G-1-1	0.0410	0.0428	4.21%
G-1-2	0.0833	0.0856	2.69%
G-1-3	0.0990	0.1055	6.16%
G-2-1	0.0660	0.0683	3.37%
G-2-2	0.0743	0.0782	4.99%
C-1-1	0.4010	0.4224	5.07%
C-2-1	0.1910	0.1920	0.52%

* 贺一波同学提供了实验数据, 特此致谢。

表 4 弹性常数

材 料	E_1 (GPa)	E_2 (GPa)	ν_{12}	G_{12} (MPa)
CFRP(T300/N5208)	181.00	10.30	0.28	7.17
BFRP(B(4)/N5505)	204.00	18.50	0.23	5.59
GFRP(E-玻璃/环氧)	38.60	8.27	0.26	4.14

表 5 CFRP 锥壳临界外压与半锥角的关系

$\alpha(^{\circ})$	q_{cr} (MPa)						
5	0.04243	25	0.1742	45	0.1982	65	0.1155
10	0.08281	30	0.1925	50	0.1852	70	0.08710
15	0.1184	35	0.2023	55	0.1664	75	0.05860
20	0.1497	40	0.2047	60	0.1431	80	0.03307

注 $D_1=375\text{mm}$, $D_2=494\text{mm}$, 铺层顺序: $90^{\circ}/45^{\circ}/90^{\circ}$, 铺层厚度均为 0.25mm .

下面对几种典型的复合材料圆锥壳的外压稳定性给出了数值结果, 材料性能参数见表 4^[11]. 表 5 给出了 CFRP 圆锥壳临界外压值随半锥角的变化关系. 从表 5 中可以看出, 在 $\alpha=40^{\circ}$ 左右时, 临界外压值将取最大值. 在 $\alpha < 40^{\circ}$ 时, 临界外压值随半锥角 α 值的增加而增加; 在 $\alpha > 40^{\circ}$ 时, 临界外压值随半锥角 α 值的增大而减小.

对于铺层顺序为 $90^{\circ}/\pm\psi^{\circ}/90^{\circ}$ 的复合材料圆锥壳, 表 6 给出了临界外压值与铺设角 ψ 的关系. 从表 6 可以看到, 对于一定的铺设角, 临界外压值随弹性模量 E_1 值的增加而增加; 当铺设角 $\psi > 15^{\circ}$ 时, 临界外压值随铺设角的增大而减小.

表 6 临界外压与铺设角的关系

$\psi(^{\circ})$	q_{cr} (MPa)		
	GFRP	BFRP	CFRP
0	0.02146(1,7)	0.09276(1,7)	0.08536(1,7)
15	0.02136(1,7)	0.09876(1,7)	0.08820(1,7)
30	0.02055(1,7)	0.09656(1,7)	0.08512(1,7)
45	0.01931(1,7)	0.08744(1,6)	0.07594(1,6)
60	0.01878(1,7)	0.07562(1,6)	0.06418(1,6)
75	0.01892(1,7)	0.07391(1,6)	0.06194(1,6)
90	0.01898(1,6)	0.07521(1,6)	0.06314(1,6)

注 $\alpha=9^{\circ}$, $D_1=375\text{mm}$, $D_2=494\text{mm}$; 括号内数字分别表示纵向和环向失稳波数.

六、结 束 语

本文在文献[1]的基础上, 应用能量变分法分析了在均布外压作用下复合材料叠层圆锥壳的稳定性问题. 通过以上分析和讨论, 可得以下主要结论:

1. 本文理论预示值与临界载荷的实验结果非常吻合, 说明文献[1]所建立的混合理论正确无误, 具有较高精度, 本文结果完全能满足工程应用的需要.
2. 临界载荷的最大值发生在半锥角 $\alpha=40^{\circ}$ 左右.
3. 临界载荷随弹性模量 E_1 值的增大而增大; 对于 $90^{\circ}/\pm\psi^{\circ}/90^{\circ}$ 铺层顺序的锥壳, 临界载荷的最大值发生在 $\psi=15^{\circ}$ 左右.

北京航空航天大学热强度研究室为本文计算工作提供了上机条件, 特此致谢。

附录 I

$$\begin{aligned} \hat{i}_{11} &= D_1^4 - 4D_1^3 + 5D_1^2 - 2D_1, \quad \hat{i}_{12} = 2(D_1 - 1)^2 D_2^2, \quad \hat{i}_{16} = 4(D_1^3 - 3D_1^2 + 3D_1 - 1)D_2 \\ \hat{i}_{22} &= -D_1^2 + 2D_1 + D_2^4 + 2D_2^2, \quad \hat{i}_{26} = 4(D_1 - 1)(D_2 + D_2^3), \quad \hat{i}_{66} = 4(D_1 - 1)^2 D_2^2 \\ \hat{T}_{11} &= D_1^3 - 3D_1^2 + 2D_1 + D_1^2 D_2^2 - 3D_1 D_2^2 + 2D_2^2, \quad \hat{T}_{21} = \hat{i}_{11} \\ \hat{T}_{61} &= D_1^3 D_2 - 4D_1^2 D_2 + 5D_1 D_2 - 2D_2, \quad \hat{T}_{12} = \hat{i}_{22} \\ \hat{T}_{22} &= D_1^2 D_2^2 - D_1 D_2^2 - D_1^3 + 3D_1^2 - 2D_1, \quad \hat{T}_{62} = D_1 D_2^3 - D_2^3 - D_1^2 D_2 + 3D_1 D_2 - 2D_2 \\ \hat{T}_{16} &= 2(D_1 - 1)D_2(D_1 + D_2^2), \quad \hat{T}_{26} = 2D_1 D_2 (D_1 - 1)^2, \quad \hat{T}_{66} = 2(D_1 - 1)^2 D_2^2 \end{aligned}$$

附录 II

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{z_0} e^{-2z} \sin 2Kz dz, \quad I_2 = \int_0^{z_0} e^{-z} \sin 2Kz dz, \quad I_3 = \int_0^{z_0} e^{-2z} \sin^2 Kz dz \\ I_4 &= \int_0^{z_0} e^{-2z} \cos^2 Kz dz, \quad I_5 = \int_0^{z_0} e^{-z} \sin^2 Kz dz, \quad I_6 = \int_0^{z_0} e^{-z} \cos^2 Kz dz \\ I_7 &= \int_0^{z_0} e^z \sin^2 Kz dz, \quad I_8 = \int_0^{z_0} e^z \cos^2 Kz dz \end{aligned}$$

参 考 文 献

- [1] 王虎、王俊奎, 复合材料薄壁加筋圆锥壳体有限变形的混合型理论, 应用数学和力学, 11(9) (1990), 805—816.
- [2] Pflüger, A., Stabilität dünner Kegelschalen, *Ing-Archiv*, 8(3) (1937), 151—172.
- [3] Seide, P., A survey of buckling theory and experiment for circular conical shells of constant thickness, NASA TN-D-1510.
- [4] Fung, Y. C. and E. E. Sechler, Instability of thin elastic shells, *Proc. of the 1st Symp. on Naval Structural Mechanics* (1960), 115—168.
- [5] Wang Hu and Wang Tsun-kuei, Snap-buckling of thin shallow conical shells, *Proc. of International Conference on Applied Mechanics*, Beijing, China (1989), 1113—1117.
- [6] Wang Hu and Wang Tsun-kuei, A displacement-type theory for thin conical shells composed of composite materials, *Proc. of International Conference on the Advance in Structural Testing, Analysis and Design*, Bangalore, India (1990).
- [7] Wang Hu and Wang Tsun-kuei, Analysis of general instability of composite conical shells stiffened with triangular ribs under external pressure, *Preprints of the Second World Congress of Computational Mechanics*, Stuttgart, FRG (1990).
- [8] 王虎、王俊奎, 复合材料三角形网格加筋圆锥壳体位移型稳定性方程及其总体稳定性分析, 应用数学和数学, 12(4) (1991), 359—368.
- [9] 贺一波、王俊奎, 在外压作用下复合材料圆锥壳失稳的初步研究, 《第五届全国复合材料学术会议文集》, (1988), 940—947.
- [10] Jones, R. M., *Mechanics of Composite Materials*, Scripta Book Company (1975).
- [11] Tsai, S. W., *Composite Design, Thick Composites* (1986).

Stability of Laminated Composite Circular Conical Shells under External Pressure

Wang Hu Wang Tsun-kuei

(Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing)

Abstract

In this paper, based on the mixed-type theory developed by the same authors⁽¹⁾, a theoretical analysis is presented for the stability of laminated composite circular conical shells under external pressure. The formulas for critical external pressure are obtained by using the potential energy variation principle. Very good agreement is shown between the theoretical prediction of critical external pressure and the experimental data. Finally, the influence of some parameters on critical external pressure is discussed numerically. The mixed-type theory developed by the same authors⁽¹⁾ and the results obtained in this paper are very useful in aerospace engineering design.

Key words composites, circular conical shells, stability, potential energy variation principle