

修正迭代法在薄圆板非线性 后屈曲分析中的应用

李 东

(上海市应用数学和力学研究所, 上海工业大学)

(刘人怀推荐, 1990年11月8日收到)

摘 要

本文进一步将修正迭代法推广到薄圆板轴对称后屈曲分析中, 由此获得该问题的一种新的近似解析解。作者期望将此方法应用于更为复杂结构的板的后屈曲分析中去。

关键词 薄圆板 几何非线性 后屈曲 修正迭代法

一、引 言

众所周知, 承受边缘纵向载荷的薄圆板在其载荷超过一特定值后会发生侧向挠曲, 此即屈曲。屈曲发生后, 板的应力状态若还处于弹性阶段, 则板的承载能力还会上升, 这就是板屈曲后的主要特点。薄板的后屈曲是一个非线性现象, 也是一个经典的问题, 因而早期工作已将此问题研究得较为透彻^[1]。近期有关薄圆板的后屈曲分析工作主要是涉及到如何有效地将有限元方法引入该问题^[2,3]。我们知道, 随着电子计算机的问世和有限元方法的迅速发展, 板壳问题的数值分析越来越受到重视, 而相比之下, 解析分析工作进展不如前者迅速。在此情况下, 研究板壳问题的各种新的有效的解析方法的提出及其推广颇具重要意义。本文着重阐明如何把修正迭代法向薄圆板后屈曲分析进行推广。

修正迭代法最先由叶开沅、刘人怀在1965年提出^[4-6]。在以后的20多年里, 这一方法广泛应用于薄板的非线性弯曲和薄壳的非线性稳定研究中^[7,8]。最近, 李东、刘人怀又将此方法推广到薄板的非线性振动问题的研究中^[9,10]。基于这一方法的思想, 我们在本文中又进一步将此方法引入薄圆板轴对称后屈曲问题中, 从而拓宽了修正迭代法的使用范围。

我们利用修正迭代法的迭代程序将问题的非线性控制方程解耦, 获得逐级近似的一系列线性微分方程组。利用幂级数方法求解这些方程组, 并使所得的解含一个待定因子——我们选择中心挠度为这一待定因子——它由板的边缘纵向载荷大小所控制。在各次迭代中, 这一因子的作用是参与迭代, 它与边缘载荷的非线性关系最后由问题的边界条件所确定。一旦这一关系定出, 板的径向与环向的弯曲或薄膜应力分布、后屈曲模式等, 即可由几个简单的解析公式所确定。

作者期望将此法应用于较为复杂结构的板, 如环板或复合材料层合板的后屈曲分析中去。

二、修正迭代解

本问题的控制方程是^[1]

$$x \frac{d}{dx} \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(x \frac{dW}{dx} \right) = -g \frac{dW}{dx}, \quad x \frac{d}{dx} \frac{1}{x} \frac{d}{dx} (xg) = \frac{1}{2} K^2 \left(\frac{dW}{dx} \right)^2 \quad (2.1a, b)$$

这里

$$x = \frac{r}{a}, \quad W = \frac{w}{h}, \quad g = -\frac{aK^2}{Eh^2} \frac{dF}{dr}, \quad \sigma_r^m = \frac{1}{r} \frac{dF}{dr}$$

$$\sigma_\theta^m = \frac{d^2F}{dr^2}, \quad K = \sqrt{12(1-\nu^2)}$$

其中 $F(r)$ 是应力函数, r 是径向坐标, w 是板的挠度, h 是板的厚度, a 是圆板的半径. 圆板材料的杨氏模量是 E , 泊松比是 ν . 板内每点的径向、环向薄膜力 σ_r^m , σ_θ^m 和径向、环向最大弯应力 σ_r^b , σ_θ^b 可无量纲化为

$$(\sigma_r^b, \sigma_\theta^b) = -\frac{a^2 K^3}{6Eh^2} (\sigma_r^m, \sigma_\theta^m), \quad (\sigma_r^m, \sigma_\theta^m) = -\frac{a^2 K^2}{Eh^2} (\sigma_r^m, \sigma_\theta^m)$$

这样, 我们有

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r^b &= -K \left(\frac{d^2W}{dx^2} + \frac{\nu}{x} \frac{dW}{dx} \right), & \sigma_r^m &= -\frac{g}{x} \\ \sigma_\theta^b &= -K \left(\nu \frac{d^2W}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dW}{dx} \right), & \sigma_\theta^m &= -\frac{dg}{dx} \end{aligned} \right\} \quad (2.2a \sim d)$$

本问题的边界条件取如下形式

$$\text{当 } x=0 \text{ 时, } dW/dx=0, \quad g=0, \quad W \text{ 有限} \quad (2.3)$$

$$\text{当 } x=1 \text{ 时, } W=0, \quad \frac{d^2W}{dx^2} + \frac{\lambda}{x} \frac{dW}{dx} = 0, \quad g = \xi \quad (2.4)$$

这里 $\lambda = \infty$ 对应夹紧边界, $\lambda = \nu$ 对应简支边界, 而

$$\xi = -a^2 K^2 \sigma_0 / Eh^2 \quad (\xi > 0)$$

这里 σ_0 是作用于板边界上的均布薄膜压力.

我们先讨论屈曲问题. 在屈曲前 $W = W_0 \equiv 0$, 所以此时仅存在薄膜应力状态, 它由方程 (2.1b) 定出: $g = g_0 = \xi x$. 当 ξ 达到某一值 ξ_1 时, 板变为不稳定, 一个微小的横向扰动可使板趋向某一非零挠度 $W = W_1 \neq 0$ 的平衡态, 使得下述方程成立

$$x \frac{d}{dx} \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(x \frac{dW_1}{dx} \right) = -\xi_1 x \frac{dW_1}{dx} \quad (2.5)$$

$$\text{当 } x=0 \text{ 时, } W_1 = W_m, \quad dW_1/dx = 0 \quad (2.6)$$

$$\text{当 } x=1 \text{ 时, } W_1 = 0, \quad \frac{d^2W_1}{dx^2} + \frac{\lambda}{x} \frac{dW_1}{dx} = 0 \quad (2.7)$$

这里 W_m 是板的无量纲中心挠度.

我们求出方程 (2.5) 如下形式的解

$$W_1 = W_m \left(1 + \beta_1 \sum_{j=0}^{\infty} A_j^{(1)} x^{2j+2} \right) \quad (2.8)$$

这里 β_1 是待定系数,

$$A_0^{(1)} = 1, \quad A_{j+1}^{(1)} = -\xi_1 A_j^{(1)} / (2j+4)^2 \quad (2.9a)$$

显然, 解(2.8)已满足(2.6), 将它代入条件(2.7)后可得

$$\sum_{j=0}^{\infty} (2j+2)(2j+1+\lambda) A_j^{(1)} = 0, \quad 1 + \beta_1 \sum_{j=0}^{\infty} A_j^{(1)} = 0 \quad (2.9b,c)$$

先由上述第一方程求出 ξ_1 , 再由第二方程求出 β_1 ,

$$\xi_1 = 4.198 \text{ (简支边界) 或 } 14.682 \text{ (夹紧边界)}$$

$$\beta_1 = -1.305 \text{ (简支边界) 或 } -2.617 \text{ (夹紧边界)}$$

我们从临界屈曲状态开始迭代。当 $\xi > \xi_1$, 我们将屈曲模式取作(2.8), 所以由方程(2.1b)可求出后屈曲应力状态为 g_1 , 它满足

$$x \frac{d}{dx} \frac{1}{x} \frac{d}{dx} (x g_1) = \frac{1}{2} K^2 \left(\frac{dW_1}{dx} \right)^2 \quad (2.10)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{当 } x=0 \text{ 时, } g_1=0 \\ \text{当 } x=1 \text{ 时, } g_1=\xi \end{array} \right\} \quad (2.11a,b)$$

将(2.8)代入(2.10), 并考虑到边界条件(2.11a, b), 经积分方程(2.10)可得到

$$g_1 = \xi x + W_m^2 \sum_{j=0}^{\infty} B_j^{(1)} x^{2j+1} \quad (2.12)$$

这里

$$B_0^{(1)} = - \sum_{j=1}^{\infty} B_j^{(1)}$$

$$B_{j+1}^{(1)} = \frac{1}{2} K^2 \beta_1^2 \left\{ \frac{\sum_{i=0}^j (2i+2)(2j-2i+2) A_i^{(1)} A_{j-i}^{(1)}}{(2j+3)^2 - 1} \right\} \quad (j=0,1,2,3,\dots)$$

我们注意到 g_1 并未定出, 因为 W_m 是个待定因子。为了确定这一解, 还需求解下述修正迭代方程

$$x \frac{d}{dx} \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(x \frac{dW_2}{dx} \right) = -g_1 \frac{dW_1}{dx} \quad (2.13)$$

$$\text{当 } x=0 \text{ 时, } W_2 = W_m, \quad dW_2/dx = 0 \quad (2.14)$$

$$\text{当 } x=1 \text{ 时, } W_2 = 0, \quad \frac{d^2 W_2}{dx^2} + \frac{\lambda}{x} \frac{dW_2}{dx} = 0 \quad (2.15)$$

将解(2.8)、(2.12)代入方程(2.13), 并考虑到条件(2.14)和(2.9a), 可求出(2.13)的解为

$$W_2 = W_m \left(1 + \beta_2 x^2 + \beta_1 \frac{\xi}{\xi_1} \sum_{j=0}^{\infty} A_{j+1}^{(1)} x^{2j+4} \right) - W_m^2 \beta_1 \sum_{j=0}^{\infty} C_j^{(1)} x^{2j+4} \quad (2.16)$$

其中 β_2 为待定系数,

$$C_j^{(1)} = \frac{\sum_{i=0}^j (2i+2) A_i^{(1)} B_j^{(1)}}{(2j+2)(2j+4)^2}$$

将解(2.16)代入边界条件(2.15)并考虑到(2.9b,c)可得到

$$\left. \begin{aligned} 1 + \beta_2 - (1 + \beta_1) \frac{\xi}{\xi_1} &= W_m^2 \beta_1 \sum_{j=0}^{\infty} C_j^{(1)} \\ 2(1 + \lambda) \left(\beta_2 - \beta_1 \frac{\xi}{\xi_1} \right) &= W_m^2 \beta_1 \sum_{j=0}^{\infty} (2j+4)(2j+3+\lambda) C_j^{(1)} \end{aligned} \right\} \quad (2.17a, b)$$

由上述方程消去系数 β_2 后可得

$$\frac{\xi}{\xi_1} = 1 + \beta_1 W_m^2 \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \left[\frac{(j+2)(2j+3+\lambda)}{1+\lambda} - 1 \right] C_j^{(1)} \right\} \quad (2.18)$$

式(2.18)即确定出了 ξ 和 W_m 的非线性关系。对给定的边界载荷 ξ ，可由(2.18)反解出 W_m ，然后由(2.17a)求出 β_2 ，

$$\beta_2 = (1 + \beta_1) \frac{\xi}{\xi_1} + \left(W_m^2 \beta_1 \sum_{j=0}^{\infty} C_j^{(1)} \right) - 1$$

这样就完全求出了方程(2.1a,b)的二阶修正迭代解。

当 ξ/ξ_1 变得较大后，可重复上述过程以获得本问题的高阶修正迭代解。对于 $\xi/\xi_1 < 5$ 范围内，公式(2.18)完全有效，这将在下面得到证实。

把(2.12)和(2.16)代入(2.2a~d)即可求出圆板后屈曲的应力分布。数值结果绘于图1~4，由此看出修正迭代解与差分解^[1]和有限元解^[2]是相吻合的，从而证实解(2.12)和(2.16)（及公式(2.18)）在当 $\xi/\xi_1 < 5$ 范围内有效。该范围也是 von Kármán 方程成立的范围，因为 $\xi/\xi_1 < 5$ 也意味着要求 $W_m < 5$ 。

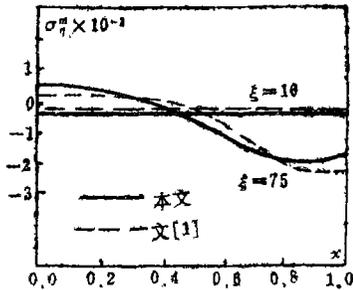


图1 边缘夹紧的圆板的后屈曲环向薄膜应力分布($\nu=0.3$)

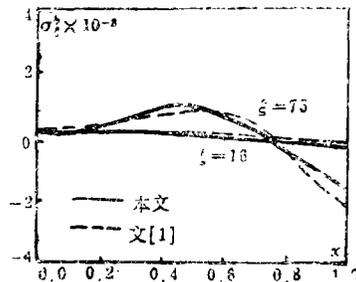
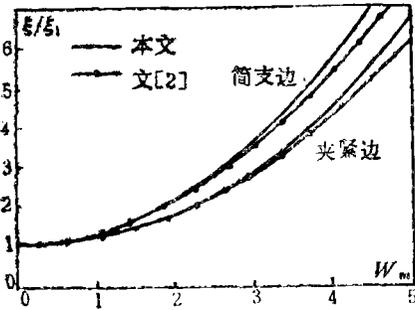
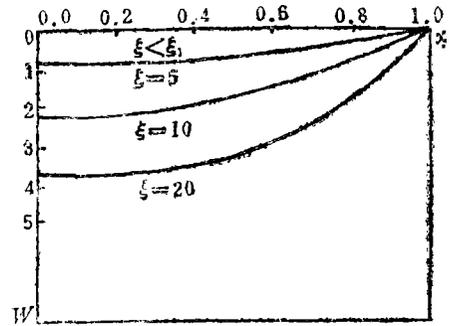


图2 边缘夹紧的圆板的后屈曲径向最大弯曲应力分布($\nu=0.3$)

用修正迭代法可求出既简单又较准确的解，它能避免用幂级数法求非线性方程中所遇到的诸如复杂的迭代过程和各个幂的系数初值如何选取等困难。对于较为复杂结构的板，其控制方程和边界条件形式都较复杂，所以用修正迭代程序线性化后的方程不能求出解析解。但我们可用数值方法求出各个线性解，保留每阶解中的迭代因子，最后由边界条件定出边界载荷与这一迭代因子的关系，从而使问题近似定解。

图3 后屈曲圆板的平衡路径($\nu=0.3$)图4 后屈曲圆板的横向变形($\lambda=\nu=0.3$)

作者感谢刘人怀教授的鼓励和对本文的细心审阅。

参 考 文 献

- [1] Chia, C. Y., *Nonlinear Analysis of Plates*, McGraw-Hill, New York (1980).
- [2] Rao, G. V. and K. K. Raju, A reinvestigation of post-buckling behaviour of elastic circular plate using a simple finite element formulation, *Comput. Struct.*, 17(2) (1983), 233.
- [3] Rao, G. V. and K. K. Raju et al., Post-buckling behaviour of cylindrically orthotropic annular plates with uniform internal radial load, *Comput. Struct.*, 31(6) (1989), 1057.
- [4] 叶开沅、刘人怀等, 在对称线布载荷作用下的圆底扁薄球壳的非线性稳定问题, *科学通报*, (2) (1965), 142.
- [5] 叶开沅、刘人怀等, 圆底扁薄球壳在边缘力矩作用下的非线性稳定问题, *科学通报*, (2) (1965), 145.
- [6] 刘人怀, 在内边缘均布力矩作用下中心开孔圆底扁球壳的非线性稳定问题, *科学通报*, (3) (1965), 253.
- [7] 刘人怀, 波纹环形板的非线性弯曲, *中国科学, A辑*, (3) (1984), 247.
- [8] Liu Ren-huai, Nonlinear thermal stability of bimetallic shallow shells of revolution, *Internat. J. of Non-Linear Mech.*, 18(5) (1983), 409.
- [9] 李东、刘人怀, 修正迭代法在波纹圆板非线性振动中的应用, *应用数学和力学*, 11(1) (1990), 13-21.
- [10] Li Dong and Liu Ren-huai, Nonlinear vibration of thin circular plates, *The Advances of Applied Mathematics and Mechanics of China*, International Academic Publishers, Beijing, 3 (1990).

Application of the Modified Iteration Method to Nonlinear Postbuckling Analysis of Thin Circular Plates

Li Dong

(Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai University of Technology, Shanghai)

Abstract

In this paper, the modified iteration method is further generalized to the study of axisymmetrical postbuckling of thin circular plates and hereby a new approximate analytic solution of the problem is obtained. Further utilizations of this method to postbuckling analyses of plates of more complicated structure are expected.

Key words thin circular plate, geometrical nonlinearity, postbuckling, modified iteration method