

表面承受常静水载荷下弹性半无限体的 表面稳定性分析*

曹光中 徐志洪

(华东工学院, 1988年3月30日收到)

摘 要

本文应用小变形叠加到大变形上的分析方法, 考察了表面受常静水载荷作用下可压缩和不可压缩弹性半无限体的表面平面应变失稳问题, 得到了各自的临界屈曲条件的一般形式。在此基础上, 分别对由 Blatz-Ko 材料和谐和材料所组成的可压缩弹性半无限体以及由 Mooney 材料所组成的不可压缩弹性半无限体, 详细讨论了表面所受的静水压力对临界屈曲条件的影响。

关键词 半无限体 有限变形 弹性屈曲 流体静压力 平面应变

一、引 言

所谓弹性半无限体表面的失稳, 是指在载荷或变形达到某些临界值下, 半无限体表面不再保持通常的平面形状。研究半无限体, 或更一般的层——半无限体组合的表面稳定性问题, 除其本身的理论意义以外, 还在一定程度上同地质构造的褶皱、地壳的屈曲(与地震发生相关)史前的造山运动以及层合材料的屈曲等问题的探讨有关。

早在本世纪三十年代, Biot^[1] 用其独创的增量变形理论, 研究过由一类特殊的不可压缩材料——Mooney 材料所组成的半无限体的表面失稳问题。1973年, Brunelle^[2] 对于可压缩弹性半无限体和可压缩弹性基础上的弹性层, 应用 Novozhilov 在[3]中为叠加在大变形上的小变形所导出的场方程, 讨论了同样的问题。1974年, Usmani 和 Beatty^[4] 对于由 Hadamard 材料所组成的半无限体的表面失稳问题作了深入的研讨。1980年, Dorris 和 Nemat-Nasser^[5] 将半无限体的表面稳定性问题处理为层-半无限体组合的相应问题的一种特殊情况。1983年和1984年, C. H. Wu 和曹光中^[6,7] 讨论了在轴对称受压下不可压缩弹性半无限体的表面失稳问题, 得到了表面轴对称和非轴对称失稳的临界条件。1986年, 曹光中^[8,9] 又考虑了双向受载下不可压缩弹性半无限体表面的稳定性以及由标准材料 (standard materials) 所组成的半无限体的表面轴对称失稳问题。

在上述文献中, 问题的提法和处理途径虽不相同, 但有一个共同点, 这就是都认为半无限体的表面是自由的, 即表面不承受任何载荷。我们认为, 在有些实际问题中, 如在考虑海

* 钱伟长推荐。

底地壳褶皱等问题时,似不应忽略深海海水压力的作用。本文即在半无限体表面受不变静水压力作用的假定下,考察由各向同性可压缩和不可压缩弹性材料所组成的半无限体的表面平面应变失稳问题。我们假定,在表面失稳以前,弹性半无限体的变形是有限的。对于非线性支配方程,仍采用小变形叠加大变形上的分析方法,利用分离变量法,分别得到了两类材料所组成的半无限体表面失稳的临界条件。对两种特殊的可压缩弹性材料,即Blatz-Ko材料和谐和材料(harmonic materials),分析结果表明:半无限体表面静水载荷的存在,改变了表面失稳的特征方程。对于Blatz-Ko材料,不仅在侧向压缩下半无限体表面会发生失稳,而且在侧向拉伸时,表面失稳也是可能的。对于由不可压缩弹性材料所组成的半无限体的分析结果表明,表面静水载荷的存在,对半无限体表面失稳的临界主伸缩比并没有影响,只是改变了临界载荷的数值。

二、有限平面弹性静力学概要

设 D 是一物质平面区域,物质坐标是 (X_1, X_2) 的质点经变形达到空间坐标为 (x_1, x_2) 的位置,变形可描述为如下变换:

$$x_a = x_a(X_A), \quad (X_1, X_2) \in D \quad (2.1)^{1)}$$

它把区域 D 变到同一平面的区域 d 。

设 F_{aA} 是对应于变形(2.1)的变形梯度张量 \mathbf{F} 之分量

$$F_{aA} = x_{a,A} \quad (2.2)^{2)}$$

左Cauchy-Green变形张量 \mathbf{B} 定义为 $\mathbf{B} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T$ (2.3)³⁾

其基本不变量取作

$$J = (\det \mathbf{B})^{1/2} = \det \mathbf{F} = A_1 A_2 \quad (2.4)$$

$$I = F_{aA} F_{aA} = A_1^2 + A_2^2 \quad (2.5)$$

这里, A_1 和 A_2 是两个主伸缩比。

同Cauchy应力张量 $\boldsymbol{\tau}$ 对应的Piola应力张量 $\boldsymbol{\sigma}$ 定义为

$$\boldsymbol{\sigma} = J \boldsymbol{\tau} (\mathbf{F}^{-1})^T \quad (2.6)$$

这里 \mathbf{F}^{-1} 是 \mathbf{F} 的逆张量。

在无体力作用的情况下,藉助于Piola应力,平衡方程可写成

$$\sigma_{aA,A} = 0 \quad (X_1, X_2) \in D \quad (2.7)$$

设 C 是 D 中的一条曲线,定义为 $X_A = C_A(L)$ (2.8)

其中 L 是沿着曲线 C 度量的弧长, C 的单位切向矢量 \mathbf{S} 和单位法向矢量 \mathbf{N} 可以用各自的分量来表示:

$$S_A = C'_A(L), \quad N_A = \varepsilon_{AB} C'_B(L) \quad (2.9)$$

其中, ε_{AB} 是二维置换符分量,即 $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0$, $\varepsilon_{12} = 1$, $\varepsilon_{21} = -1$ 。

在映射(2.1)下, C 在 d 中的象 c 可以定义为

$$x_a = c_a(l) \quad (2.10)$$

其中 l 是沿着 c 度量的弧长, c 的单位切向矢量 \mathbf{s} 和单位法向矢量 \mathbf{n} 的分量分别是

$$s_a = c'_a(l), \quad n_a = \varepsilon_{ab} c'_b(l) \quad (2.11)$$

- 1) 下标遍取整数值(1, 2), 下标重复出现意味遍历其值求和。
- 2) 下标的前置逗号标记对其后相应物质坐标的求导运算。
- 3) 上标 T 代表转置。

$$\text{其中} \quad c'_i(l) = F_{\alpha A} C'_A(L) dL/dl \quad (2.12)$$

$$(dl)^2 = F_{\alpha A} F_{\alpha B} C'_A(L) C'_B(L) (dL)^2 \quad (2.13)$$

作用在微元弧段 dl 上的表面力为

$$t dl = \tau_{\alpha b} n_b i_\alpha dl = \sigma_{\alpha A} N_A i_\alpha dL = T dL \quad (2.14)$$

其中 T 和 t 分别是 Piola 和 Cauchy 表面牵引力矢量, $\tau_{\alpha b}$ 和 $\sigma_{\alpha A}$ 分别是 Cauchy 和 Piola 应力分量.

三、有限均匀变形状态的摄动及其对半无限体边界表面力的影响

考虑稍微偏离有限均匀变形状态的变形:

$$x_1 = \lambda_1 X_1 + u_1(X_A), \quad x_2 = \lambda_2 X_2 + u_2(X_A) \quad (3.1)$$

其中 λ_1, λ_2 是描述均匀变形的主伸缩比, u_1, u_2 是叠加其上的微小增量变形. 我们假定, u_1, u_2 以及它们对物质坐标的导数都可视为小量. 因此, 在以下的运算中, u_α 的二阶及二阶以上的非线性项均略去不计. 这样, 就有

$$(F_{\alpha A}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 + u_{1,1} & u_{1,2} \\ u_{2,1} & \lambda_2 + u_{2,2} \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

$$I = (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) + 2(\lambda_1 u_{1,1} + \lambda_2 u_{2,2}) \quad (3.3)$$

$$J = \lambda_1 \lambda_2 + (\lambda_1 u_{2,2} + \lambda_2 u_{1,1}) \quad (3.4)$$

在半无限体的表面 $X_2 = 0$ 上, 单位矢量 S 和 N 的分量分别为

$$S_1 = 1, S_2 = 0, N_1 = 0, N_2 = -1 \quad (3.5)$$

由(2.12) (2.13) (3.2)得

$$\frac{dl}{dL} = \lambda_1 + u_{1,1} \quad (3.6)$$

$$c'_1(l) = 1, \quad c'_2(l) = \frac{u_{2,1}}{\lambda_1} \quad (3.7)$$

令

$$\sigma_{\alpha A} = \dot{\sigma}_{\alpha A} + \hat{\sigma}_{\alpha A} \quad (3.8)$$

一量冠以“ \circ ”或“ $\hat{\cdot}$ ”分别代表该量对应于均匀主变形及其摄动(小增量变形的部分). 这样, 作用于此边界面上的增量 Piola 表面牵引力和增量 Cauchy 表面牵引力分别沿变形前、后边界的法向和切向分量可计算如下:

$$T \cdot N - \dot{\sigma}_{(N)} = \dot{T}_N = N_A N_B \delta_{B\alpha} \dot{\sigma}_{\alpha A} = \dot{\sigma}_{22} \quad (3.9)$$

$$T \cdot S = \dot{T}_S = N_A S_B \delta_{B\alpha} \dot{\sigma}_{\alpha A} = -\dot{\sigma}_{12} \quad (3.10)$$

$$t \cdot n - \frac{\dot{\sigma}_{(N)}}{\lambda_1} = \dot{t}_n \quad t \cdot s = \dot{t}_s \quad (3.11 \sim 3.12)$$

将(2.11) (2.14) (3.6) (3.7) 分别代入(3.11) (3.12), 且考虑到

$$\dot{\sigma}_{(N)} = \dot{\sigma}_{\alpha A} \delta_{\alpha B} N_A N_B = \dot{\sigma}_{22} \quad (3.13)$$

则有

$$\dot{t}_n = \frac{1}{\lambda_1} \left(\dot{\sigma}_{22} - \frac{\dot{\sigma}_{22}}{\lambda_1} u_{1,1} \right), \quad \dot{t}_s = -\frac{1}{\lambda_1} \left(\dot{\sigma}_{12} + \frac{\dot{\sigma}_{22}}{\lambda_1} u_{2,1} \right) \quad (3.14 \sim 3.15)$$

四、表面承受常静水载荷下可压缩 弹性半无限体的表面失稳分析

现考虑一般的各向同性可压缩材料, 其应变能函数

$$W = W(I_1, I_2, I_3) = W(I, J) \quad (4.1)$$

这是因为, 在平面应变下, 三个应变不变量分别为

$$I_1 = 1 + I, \quad I_2 = I + J^2, \quad I_3 = J^2 \quad (4.2)$$

这样, Piola应力分量

$$\sigma_{\alpha A} = \frac{\partial W}{\partial F_{\alpha A}} = 2 \frac{\partial W}{\partial I} F_{\alpha A} + \frac{\partial W}{\partial J} \varepsilon_{\alpha\beta} \varepsilon_{AB} F_{\beta B} \quad (4.3)$$

记

$$W_I = \frac{\partial W}{\partial I} \Big|_{\substack{I = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 \\ J = \lambda_1 \lambda_2}}, \quad W_J = \frac{\partial W}{\partial J} \Big|_{\substack{I = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 \\ J = \lambda_1 \lambda_2}} \quad (4.4)$$

$$W_{IJ} = \frac{\partial^2 W}{\partial I \partial J} \Big|_{\substack{I = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 \\ J = \lambda_1 \lambda_2}} \quad (4.5)$$

则

$$\frac{\partial W}{\partial I} = W_I + 2(\lambda_1 u_{1,1} + \lambda_2 u_{2,2}) W_{II} + (\lambda_1 u_{2,2} + \lambda_2 u_{1,1}) W_{IJ} \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial W}{\partial J} = W_J + 2(\lambda_1 u_{1,1} + \lambda_2 u_{2,2}) W_{IJ} + (\lambda_1 u_{2,2} + \lambda_2 u_{1,1}) W_{JJ} \quad (4.7)$$

将(3.2) (4.6) (4.7)代入(4.3), 得到

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = & [2W_I \lambda_1 + W_J \lambda_2] + (4\lambda_1^2 W_{II} + 4\lambda_1 \lambda_2 W_{IJ} + 2W_I + \lambda_2^2 W_{JJ}) u_{1,1} \\ & + (4\lambda_1 \lambda_2 W_{II} + 2\lambda_1^2 W_{IJ} + W_J + 2\lambda_2^2 W_{IJ} + \lambda_1 \lambda_2 W_{JJ}) u_{2,2} \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{22} = & [2W_I \lambda_2 + W_J \lambda_1] + (4\lambda_1 \lambda_2 W_{II} + 2\lambda_2^2 W_{IJ} + W_J + 2\lambda_1^2 W_{IJ} \\ & + \lambda_1 \lambda_2 W_{JJ}) u_{1,1} + (4\lambda_1^2 W_{II} + 4\lambda_1 \lambda_2 W_{IJ} + 2W_I + \lambda_1^2 W_{JJ}) u_{2,2} \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\sigma_{12} = 2W_I u_{1,2} - W_J u_{2,1} \quad (4.10)$$

$$\sigma_{21} = 2W_I u_{2,1} - W_J u_{1,2} \quad (4.11)$$

记

$$A = (4\lambda_1^2 W_{II} + 4\lambda_1 \lambda_2 W_{IJ} + 2W_I + \lambda_2^2 W_{JJ}) \quad (4.12)$$

$$B = (4\lambda_1 \lambda_2 W_{II} + 2\lambda_1^2 W_{IJ} + W_J + 2\lambda_2^2 W_{IJ} + \lambda_1 \lambda_2 W_{JJ}) \quad (4.13)$$

$$C = (4\lambda_1 \lambda_2 W_{II} + 2\lambda_2^2 W_{IJ} + W_J + 2\lambda_1^2 W_{IJ} + \lambda_1 \lambda_2 W_{JJ}) \quad (4.14)$$

$$D = (4\lambda_1^2 W_{II} + 4\lambda_1 \lambda_2 W_{IJ} + 2W_I + \lambda_1^2 W_{JJ}) \quad (4.15)$$

$$E = 2W_I, \quad F = -W_J \quad (4.16 \sim 4.17)$$

则有

$$\sigma_{\alpha A} = \delta_{\alpha A} \hat{\sigma}_{\alpha A} + \hat{\sigma}_{\alpha A} \quad (\text{不求和}) \quad (4.18)$$

其中 $\delta_{\alpha A}$ 是 Kronecker 符号,

$$\hat{\sigma}_{11} = 2W_I \lambda_1 + W_J \lambda_2, \quad \hat{\sigma}_{22} = 2W_I \lambda_2 + W_J \lambda_1 \quad (4.19 \sim 4.20)$$

$$\hat{\sigma}_{11} = A u_{1,1} + B u_{2,2}, \quad \hat{\sigma}_{22} = C u_{1,1} + D u_{2,2} \quad (4.21 \sim 4.22)$$

$$\hat{\sigma}_{12} = E u_{1,2} + F u_{2,1}, \quad \hat{\sigma}_{21} = E u_{2,1} + F u_{1,2} \quad (4.23 \sim 4.24)$$

将(4.17)~(4.23)代入(2.7), 即得以 u_α 表示的平衡方程为

$$A u_{1,11} + (B + F) u_{2,21} + E u_{1,22} = 0 \quad (4.25)$$

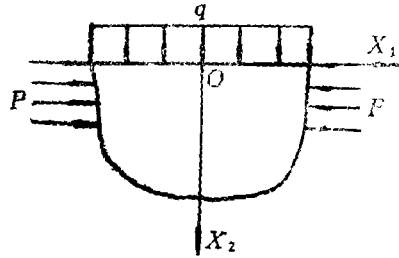


图 1

$$Du_{2,22} + (C+F)u_{1,12} + Eu_{2,11} = 0 \quad (4.26)$$

对于我们所要考虑的问题, 即表面承受常静水载荷下半无限体的表面失稳问题, 在边界 $X_2=0$ 上, 增量Cauchy表面牵引力为零, 即

$$t_n = 0, \quad t_s = 0 \quad (X_2 = 0) \quad (4.27 \sim 4.28)$$

考虑到 (3.14) (3.15) (4.22) (4.23), (4.27) 和 (4.28) 可以分别表成

$$Cu_{1,1} + Du_{2,2} - \frac{\delta_{22}}{\lambda_1} u_{1,1} = 0 \quad (4.29)$$

$$Eu_{1,2} + Fu_{2,1} + \frac{\delta_{22}}{\lambda_1} u_{2,1} = 0 \quad (X_2 = 0) \quad (4.30)$$

至此, 我们的问题, 在数学上归结为寻求方程组 (4.25) (4.26) 在边条件 (4.29) (4.30) 下, 是否存在非平凡解的特征值问题.

引进一函数 $\phi = \phi(X_1, X_2)$, 令

$$u_1 = \frac{\partial^2 \phi}{\partial X_1 \partial X_2}, \quad u_2 = -\frac{A}{B+F} \frac{\partial^2 \phi}{\partial X_1^2} + \frac{E}{B+F} \frac{\partial^2 \phi}{\partial X_2^2} \quad (4.31)$$

则 (4.25) 自动满足.

将 (4.31) 代入 (4.26), 便有

$$A \frac{\partial^4 \phi}{\partial X_1^4} + M \frac{\partial^4 \phi}{\partial X_1^2 \partial X_2^2} + D \frac{\partial^4 \phi}{\partial X_2^4} = 0 \quad (4.32)$$

$$M = \frac{AD}{E} + E - \frac{(C+F)(B+F)}{E} \quad (4.33)$$

设 ϕ 可以分离变量, 且可写成

$$\phi = \sin k X_1 g(X_2) \quad (4.34)$$

则 (4.32) 变成

$$Dg^{(4)}(X_2) - Mk^2 g^{(2)}(X_2) + Ak^4 g(X_2) = 0 \quad (4.35)$$

其特征方程为

$$D\rho^4 - Mk^2 \rho^2 + Ak^4 = 0 \quad (4.36)$$

解出

$$\rho^2 = \frac{k^2 (M \pm \sqrt{M^2 - 4AD})}{2D} \quad (4.37)$$

若

$$M^2 - 4AD > 0 \quad (4.38)$$

由 u_n 因而 ϕ 有界性, 可得

$$\phi = (\alpha_1 \exp[-\rho_1 X_2] + \alpha_2 \exp[-\rho_2 X_2]) \sin k X_1 \quad (4.39)$$

其中

$$\rho_1 = \left[\frac{k^2 (M + \sqrt{M^2 - 4AD})}{2D} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad \rho_2 = \left[\frac{k^2 (M - \sqrt{M^2 - 4AD})}{2D} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.40)$$

α_1, α_2 为两个实常量.

代 (4.39) 入 (4.29) 和 (4.30), 则有

$$\left[\left(C - \frac{AD}{B+F} - \frac{\delta_{22}}{\lambda_1} \right) k^2 \rho_1 + \frac{DE}{B+F} \rho_1^3 \right] \alpha_1$$

$$+\left[\left(C-\frac{AD}{B+F}-\frac{\dot{\sigma}_{22}}{\lambda_1}\right)k^2\rho_2+\frac{DE}{B+F}\rho_1^3\right]\alpha_2=0 \quad (4.41)$$

$$\left\{\left[E-\frac{E\left(F+\frac{\dot{\sigma}_{22}}{\lambda_1}\right)}{B+F}\right]\rho_1^2+\frac{A\left(F+\frac{\dot{\sigma}_{22}}{\lambda_1}\right)k^2}{B+F}\right\}\alpha_1$$

$$+\left\{\left[E-\frac{E\left(F+\frac{\dot{\sigma}_{22}}{\lambda_1}\right)}{B+F}\right]\rho_2^2+\frac{A\left(F+\frac{\dot{\sigma}_{22}}{\lambda_1}\right)k^2}{B+F}\right\}\alpha_2=0 \quad (4.42)$$

记 $P=C-\frac{AD}{B+F}-\frac{\dot{\sigma}_{22}}{\lambda_1}$, $Q=\frac{DE}{B+F}$,

$$R=E-\frac{E\left(F+\frac{\dot{\sigma}_{22}}{\lambda_1}\right)}{B+F}, \quad S=\frac{A\left(F+\frac{\dot{\sigma}_{22}}{\lambda_1}\right)}{B+F} \quad (4.43)$$

欲使(4.41) (4.42) 对 α_1 和 α_2 存在非平凡解, 必须而且只需系数行列式

$$\begin{vmatrix} P\rho_1k^2+Q\rho_1^3 & P\rho_2k^2+Q\rho_2^3 \\ R\rho_1^2+S k^2 & R\rho_2^2+S k^2 \end{vmatrix}=0 \quad (4.44)$$

考虑到

$$\rho_1\rho_2=\sqrt{\frac{A}{D}}, \quad \rho_1^2+\rho_2^2=\frac{M}{D} \quad (4.45)$$

由(4.44)可得

$$(PR-QS)\sqrt{\frac{A}{D}}-\frac{(RA+SM)Q}{D}-PS=0 \quad (4.46)$$

其中 M, A, D 同号, 且 $D \neq 0$.

(4.46)即给出在满足条件(4.38)下表面承受常静水载荷的可压缩弹性半无限体表面失稳的临界条件. 若

$$M^2-4AD=0 \quad (4.47)$$

则考虑到 u_n 因而 ϕ 的有界性, ϕ 可以写成

$$\phi=(\alpha_1\exp[-\rho X_2]+\alpha_2 X_2\exp[-\rho X_2])\sin kX_1 \quad (4.48)$$

其中 $\rho=k\sqrt{\frac{M}{2D}} \quad (4.49)$

将(4.48)代入(4.29)和(4.30), 则有

$$(P\rho k^2+Q\rho^3)\alpha_1-(k^2P+3Q\rho^2)\alpha_2=0 \quad (4.50)$$

$$(R\rho^2+S k^2)\alpha_1-2R\rho\alpha_2=0 \quad (4.51)$$

考虑到 $k \neq 0$, 欲使 α_1, α_2 不同时为零, 应有行列式

$$\begin{vmatrix} (P\rho k^2+Q\rho^3) & -(k^2P+3Q\rho^2) \\ (R\rho^2+S k^2) & -2R\rho \end{vmatrix}=0 \quad (4.52)$$

再考虑到(4.49), 则由(4.52)得

$$(PR-3SQ)\frac{M}{2D}-RQ\frac{M^2}{4D^2}-SP=0 \quad (4.53)$$

(4.53)即给出在满足条件 (4.47) 下表面承受常静水载荷的可压缩弹性半无限体表面失稳的临界条件.

五、关于两类可压缩弹性半无限体的讨论

5.1 Blatz-Ko材料的情形

对于可压缩的Blatz-Ko^[10]材料, 其应变能函数为

$$W = \frac{\mu}{2} \left(\frac{I}{J^2} + 2J - 4 \right) \quad (5.1)$$

则

$$W_I = \frac{\mu}{2} J^{-2}, \quad W_J = -\mu I J^{-3} + \mu \quad (5.2)$$

$$W_{II} = 0, \quad W_{IJ} = -\mu J^{-3}, \quad W_{JJ} = 3\mu I J^{-4} \quad (5.3)$$

$$A = \frac{3}{\lambda_1^4} \mu, \quad B = \mu, \quad C = \mu \quad (5.4)$$

$$D = \frac{3}{\lambda_2^4} \mu, \quad E = \frac{\mu}{\lambda_1^2 \lambda_2^2}, \quad F = \mu \left(\frac{\lambda_1^4 + \lambda_2^4}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} - 1 \right) \quad (5.5)$$

$$M = \left(\frac{8}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} - \frac{\lambda_1^4 + \lambda_2^4}{\lambda_1^4 \lambda_2^4} \right) \mu \quad (5.6)$$

考虑到

$$\frac{\hat{\sigma}_{22}}{\lambda_1} = -\frac{q}{\mu} \quad (5.7)$$

其中 q 为作用于半无限体表面的静水压力值, 则由(4.20) (5.2) (5.7)得

$$\lambda_1 = \frac{\lambda_2^{-3}}{\left(1 + \frac{q}{\mu} \right)} \quad (5.8)$$

显然, Blatz-Ko材料满足条件(4.38)。由(5.4)~(5.8), 表面失稳的临界条件(4.46)在此变为

$$3 \left[\lambda_2^4 \left(1 + \frac{q}{\mu} \right)^2 \right]^2 - 12 \left[\lambda_2^4 \left(1 + \frac{q}{\mu} \right)^2 \right] + 1 = 0 \quad (5.9)$$

由(5.8) (5.9) 得临界主伸缩比与表面静水压力值的关系为

$$\lambda_{1c}^{(1)} = \frac{0.599}{\left(1 + \frac{q}{\mu} \right)^{1/4}}, \quad \lambda_{2c}^{(1)} = \frac{1.186}{\left(1 + \frac{q}{\mu} \right)^{1/4}} \quad (5.10)$$

或

$$\lambda_{1c}^{(2)} = \frac{2.519}{\left(1 + \frac{q}{\mu} \right)^{1/4}}, \quad \lambda_{2c}^{(2)} = \frac{0.735}{\left(1 + \frac{q}{\mu} \right)^{1/4}} \quad (5.11)$$

如果将对应于均匀变形状态的 Cauchy 应力分量 T_{11} 和 T_{22} 分别标记为 T_1 和 T_2 , 按 Cauchy 和 Piola 两种应力张量之间的关系

$$\mathbf{T} = J^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^T \quad (5.12)$$

算得临界 Cauchy 应力

$$T_{1c} = \lambda_{2c}^{-1} \hat{\sigma}_{11c} \quad (5.13)$$

由(4.19)(5.2)(5.3), 得

$$\hat{\sigma}_{11c} = \frac{\lambda_{2c} \lambda_{1c}^3 - 1}{\lambda_{1c}^3} \mu \quad (5.14)$$

将(5.10)(5.14)代入(5.13), 可得

$$\frac{T_{1c}^{(1)}}{\mu} = -2.923 - 3.923 \frac{q}{\mu} \quad (5.15)$$

将(5.11)(5.14)代入(5.13), 又可得

$$\frac{T_{1c}^{(2)}}{\mu} = 0.915 - 0.085 \frac{q}{\mu} \quad (5.16)$$

由(5.10)(5.11)(5.15)(5.16)可以看出:

1) 对于由 Blatz-Ko 材料所组成的弹性半无限体, 临界主伸缩比 λ_{1c} 和 λ_{2c} 以及临界侧向载荷, 都与表面所受的静水压力值 q 有关, 其关系曲线如图2和图3所示;

2) 对于表面承受常静水载荷的这种弹性半无限体, 不仅在侧向受压时表面会发生屈曲, 而且在侧向受拉下, 其表面也同样有出现失稳的可能, 类似于在[9]中曾报导过的情况。实际上, 拉伸失稳, 例如受拉试件中的颈缩现象等, 在实践中早已发现, 文献中亦有不少作者的工作^[11,12]。

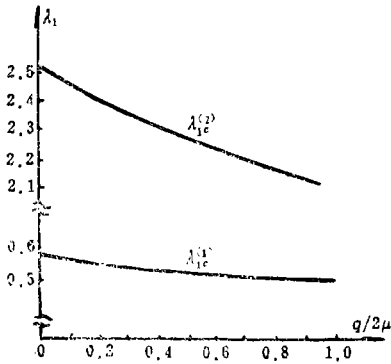


图 2

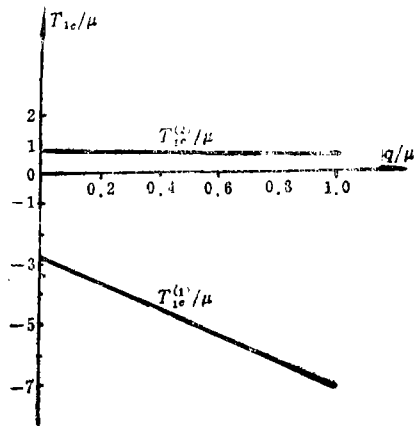


图 3

从图2可以看出, 不管是在受压缩还是在受拉伸情况下, 沿载荷方向的临界主伸缩比都随表面静水载荷值的增大而减小。但在侧向受拉的情况下, 静水载荷值对该临界主伸缩比的影响更为显著。图3表明, 表面静水压力对侧向临界载荷也有影响: 在侧向受压下, 临界压载值随表面静水压力的增大而增大, 且影响较显著; 而在侧向受拉时, 拉载却随表面静水压力的增大而减小, 但其变化不如侧向受压情况明显。

5.2 谐和材料的情形

对于可压缩的谐和材料^[18], 在平面应变下, 其应变能函数形式是

$$W(I, J) = 2\mu[H(R) - J] \quad (5.17)$$

其中 μ 是一个常量, H 是 R 的给定函数, 且

$$R = (I + 2J)^{1/2} = r + (u_{1,1} + u_{2,2}) \quad (5.18)$$

$$r = \lambda_1 + \lambda_2 \quad (5.19)$$

于是

$$W_I = \mu \frac{H'(r)}{r}, \quad W_J = 2\mu \left[\frac{H'(r)}{r} - 1 \right] \quad (5.20)$$

$$4W_{II} = 2W_{IJ} = W_{JJ} = 2\mu \left[\frac{rH''(r) - H'(r)}{r^3} \right] \quad (5.21)$$

$$A=D=2\mu H''(r) \quad (5.22)$$

$$B=C=2\mu[H''(r)-1] \quad (5.23)$$

$$E=2\mu\frac{H'(r)}{r}, \quad F=2\mu\left(1-\frac{H'(r)}{r}\right) \quad (5.24)$$

显然, 谐和材料满足条件(4.47). 将(5.22)~(5.24)代入(4.33) (4.43), 再将所得结果代入临界屈曲条件(4.53)并考虑到(5.7), 则有

$$4H''(r)H'(r)-rH''(r)-H'(r)+[rH''(r)+H'(r)]\frac{q}{2\mu}=0 \quad (5.25)$$

(5.25)给出表面承受常静水载荷下谐和弹性半无限体表面失稳的临界条件, 对于表面自由, 即 $q=0$ 的情形, (5.25)即给出与文献[9]中完全一致的结果.

对于谐和材料的一种特殊情况即标准材料, 表征材料特性的函数

$$H(R)=\frac{1}{2}\frac{(1-\nu)}{(1-2\nu)}R^2-\frac{1}{1-2\nu}R+\frac{1}{1-2\nu} \quad (5.26)$$

其中, ν 为材料常数(对于 $R\approx 2$, 相当于泊松比). 由(5.26)有

$$H'(r)=\frac{1-\nu}{1-2\nu}r-\frac{1}{1-2\nu}, \quad H''(r)=\frac{1-\nu}{1-2\nu} \quad (5.27)$$

代(5.27)入失稳临界条件(5.25), 算得

$$r_0=\lambda_{10}+\lambda_{20}=\frac{3-2\nu+\frac{q}{2\mu}(1-2\nu)}{2(1-\nu)\left[1+\frac{q}{2\mu}(1-2\nu)\right]} \quad (5.28)$$

将(5.20) (5.27)代入(4.20)并考虑到(5.7) (5.28), 则可以解出

$$\lambda_{10}=\frac{1}{2[1+(1-2\nu)q/2\mu]} \quad (5.29)$$

将(5.29)代入(5.28)便有

$$\lambda_{20}=\frac{2-\nu+(1-2\nu)q/2\mu}{2(1-\nu)[1+(1-2\nu)q/2\mu]} \quad (5.30)$$

如果表面自由, 即 $q=0$, 则(5.29)(5.30)给出

$$\lambda_{10}=\frac{1}{2}, \quad \lambda_{20}=\frac{2-\nu}{2(1-\nu)} \quad (5.31)$$

将(5.20) (5.27)代入(4.19)并考虑到(5.13), 可得临界 Cauchy 应力的相对值

$$\frac{T_{10}}{2\mu}=-\frac{1+(2-3\nu)q/2\mu}{2-\nu+(1-2\nu)q/2\mu} \quad (5.32)$$

对于 $0<\nu<0.5$, 显然有 $T_{10}<0$. 如记 T_{10} 的绝对值为 P_{10} , 则有

$$\frac{P_{10}}{2\mu}=\frac{1+(2-3\nu)q/2\mu}{2-\nu+(1-2\nu)q/2\mu} \quad (5.33)$$

从(5.29) (5.30)和(5.33)中不难看出, 对于由标准材料所组成的弹性半无限体, 其表面失稳的临界主伸缩比 λ_{10} , λ_{20} 以及临界侧向压力 P_{10} 的值, 都与表面所受的静水压力值 q 有关. 不仅如此, 由于表面静水压力的存在, λ_{10} 还和 ν 有关. 这明显不同于表面自由时 λ_{10} 和 ν 无关的情况(见(5.31)).

临界主伸缩比 λ_{10} 临界侧向载荷 P_{10} 与表面静水压力 q 之间的关系以及 P_{10} 与 ν 之间的关系, 分别如图4、图5、图6所示.

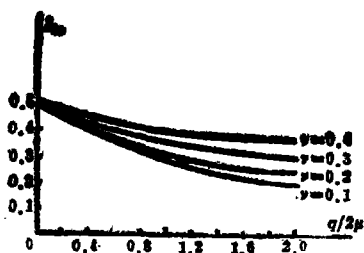


图 4

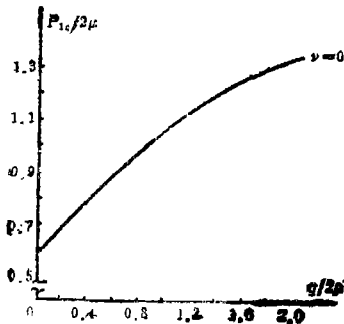


图 5

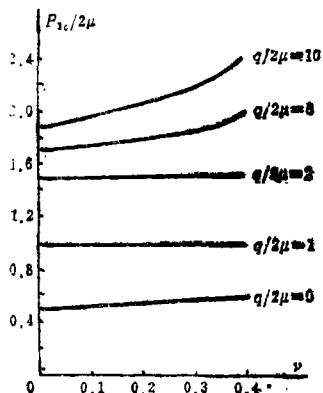


图 6

六、表面承受常静水载荷下不可压缩弹性半无限体的表面失稳分析

对于不可压缩弹性体的平面应变, 左Cauchy-Green变形张量 \mathbf{B} 的三个基本不变量为

$$I_1 = I_2 = 1 + A_1^2 + A_2^2 = 1 + I \quad (6.1)$$

$$I_3 = J^2 = A_1^2 A_2^2 = 1 \quad (6.2)$$

对于如(3.1)给出的有限均匀变形的摄动, 有

$$I_1 = I_2 = I_0 + 2(\lambda_1 u_{1,1} + \lambda_2 u_{2,2}) \quad (6.3)$$

$$I_3 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + (\lambda_1 u_{2,2} + \lambda_2 u_{1,1}) \quad (6.4)$$

其中
$$I_0 = 1 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 \quad (6.5)$$

I_3 必须满足不可压缩性条件, 即有

$$\lambda_1 \lambda_2 = 1, \quad \lambda_1 u_{2,2} + \lambda_2 u_{1,1} = 0 \quad (6.6)^4$$

对于各向同性的不可压缩弹性材料, 应变能函数为

$$W = W(I_1, I_2) \quad (6.7)$$

Cauchy 应力张量 $\boldsymbol{\tau}$ 和 Piola 应力张量 $\boldsymbol{\sigma}$ 分别是

$$\boldsymbol{\tau} = 2 \frac{\partial W}{\partial I_1} \mathbf{B} + 2 \frac{\partial W}{\partial I_2} (I_1 \mathbf{1} - \mathbf{B}) \mathbf{B} - p \mathbf{1} \quad (6.8)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = 2 \frac{\partial W}{\partial I_1} \mathbf{F} + 2 \frac{\partial W}{\partial I_2} (I_1 \mathbf{1} - \mathbf{B}) \mathbf{F} - p (\mathbf{F}^T)^{-1} \quad (6.9)$$

这两个应力张量之间的关系为

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^T \quad (6.10)$$

将(3.2)(6.3)(6.4)(6.5)(6.7)代入(6.9), 并记

$$W_{,\alpha} = \frac{\partial W}{\partial I_{\alpha}} \Big|_{I_1 = I_2 = 1 + I_0} \quad (6.11)$$

$$W_{,\alpha\beta} = \frac{\partial^2 W}{\partial I_{\alpha} \partial I_{\beta}} \Big|_{I_1 = I_2 = 1 + I_0} \quad (6.12)$$

4) 以后将直接引用第一条件而不加以说明。

$$A_1(\lambda) = 4[W_{11} + (2 + \lambda^2)W_{12} + (1 + \lambda^2)W_{22}] \quad (6.13)$$

$$B_1(\lambda) = 2[W_1 + (1 + \lambda^2)W_2] \quad (6.14)$$

则有 $\sigma_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} \dot{\sigma}_{\alpha\beta} + \dot{\sigma}_{\alpha\beta}$ (不求和) (6.15)

其中 $\dot{\sigma}_{11} = \lambda_1 B_1(\lambda_2) - \lambda_2 \dot{p}$ (6.16)

$$\dot{\sigma}_{22} = \lambda_2 B_1(\lambda_1) - \lambda_1 \dot{p} \quad (6.17)$$

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{11} = & [B_1(\lambda_2) + \lambda_2^2 \dot{p} + \lambda_1^2 A_1(\lambda_2)] u_{1,1} + [4W_2 \\ & + A_1(\lambda_2)] u_{2,2} - \lambda_2 \dot{p} \end{aligned} \quad (6.18)$$

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{22} = & [4W_2 + A_1(\lambda_1)] u_{1,1} + [B_1(\lambda_1) + \lambda_1^2 \dot{p} \\ & + \lambda_2^2 A_1(\lambda_1)] u_{2,2} - \lambda_1 \dot{p} \end{aligned} \quad (6.19)$$

$$\dot{\sigma}_{12} = B_1(0) u_{1,2} + (\dot{p} - 2W_2) u_{2,1} \quad (6.20)$$

$$\dot{\sigma}_{21} = B_1(0) u_{2,1} + (\dot{p} - 2W_2) u_{1,2} \quad (6.21)$$

\dot{p} 和 \dot{p} 分别为均匀变形下的静水压力和增量静水压力。

将(6.15)~(6.21)代入(2.7)中, 平衡方程为

$$\begin{aligned} & [B_1(\lambda_2) + \lambda_2^2 \dot{p} + \lambda_1^2 A_1(\lambda_2)] u_{1,11} + [2W_2 + \dot{p} \\ & + A_1(\lambda_2)] u_{2,12} + B(0) u_{1,22} = \lambda_2 \dot{p}_{,1} \end{aligned} \quad (6.22)$$

$$\begin{aligned} & [B_1(\lambda_1) + \lambda_1^2 \dot{p} + \lambda_2^2 A_1(\lambda_1)] u_{2,22} + [2W_2 + \dot{p} \\ & + A_1(\lambda_1)] u_{1,12} + B_1(0) u_{2,11} = \lambda_1 \dot{p}_{,2} \end{aligned} \quad (6.23)$$

考虑到(3.14)(3.15)(6.19)(6.20)(4.27)(4.28), 则有

$$H_1 u_{1,1} + J_1 u_{2,2} - \lambda_1 \dot{p} = 0 \quad (6.24)$$

$$(X_2 = 0)$$

$$B_1(0) u_{1,2} + V_1 u_{2,1} = 0 \quad (6.25)$$

其中 $H_1 = 4W_2 + A_1(\lambda_1) - \frac{\dot{\sigma}_{22}}{\lambda_1}$ (6.26)

$$J_1 = B_1(\lambda_1) + \lambda_1^2 \dot{p} + \lambda_2^2 A_1(\lambda_1) \quad (6.27)$$

$$V_1 = \dot{p} - 2W_2 + \frac{\dot{\sigma}_{22}}{\lambda_1} \quad (6.28)$$

至此, 我们的问题, 在数学上归结为寻求方程组(6.22)(6.23)在边界条件(6.24)(6.25)下, 是否存在非零解的特征值问题。

引进一函数 $\phi = \phi(X_1, X_2)$, 令

$$u_1 = \lambda_1 \phi_{,2}, \quad u_2 = -\lambda_2 \phi_{,1} \quad (6.29)$$

则不可压缩性条件(6.6)自动满足。

将(6.29)代入(6.22)(6.23), 得

$$\lambda_1^2 B_1(0) \left\{ \left[1 + (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \frac{A_1(\lambda_2)}{B_1(0)} \right] \phi_{,11} + \phi_{,22} \right\}_{,2} = \dot{p}_{,1} \quad (6.30)$$

$$\lambda_2^2 B_1(0) \left\{ \phi_{,11} + \left[1 + (\lambda_2^2 - \lambda_1^2) \frac{A_1(\lambda_2)}{B_1(0)} \right] \phi_{,22} \right\}_{,1} = -\dot{p}_{,2} \quad (6.31)$$

从(6.30)(6.31)中消去 \dot{p} , 即有

$$\lambda_2^2 \phi_{,1111} + \left[\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)^2 \frac{A_1(0)}{B_1(0)} \right] \phi_{,1122} + \lambda_1^2 \phi_{,2222} = 0 \quad (6.32)$$

$$\text{令} \quad M = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)^2 \frac{A_1(0)}{B_1(0)} \quad (6.33)$$

根据文献[14], 有

$$\frac{A_1(0)}{B_1(0)} = 2 \frac{W_{11} + 2W_{12} + W_{22}}{W_1 + W_2} \geq -(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)^{-1} \quad (6.34)$$

$$\text{因此} \quad M = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)^2 \frac{A_1(0)}{B_1(0)} \geq \frac{4\lambda_1^2 \lambda_2^2}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} > 0 \quad (6.35)$$

设 ϕ 可以分离变量, 且可写成

$$\phi = \sin(kX_1)g(X_2) \quad (6.36)$$

则(6.32)变成

$$\lambda_1^2 g^{(4)}(X_2) - M k^2 g^{(2)}(X_2) + \lambda_2^2 k^4 g(X_2) = 0 \quad (6.37)$$

求解(6.37), 并考虑到 u_α 因而 ϕ 的有界性, 可得

$$\phi = (c_1 \exp[-\rho_1 X_2] + c_2 \exp[-\rho_2 X_2]) \sin kX_1 \quad (6.38)$$

其中

$$\rho_1 = \left[\frac{k^2 (M + \sqrt{M^2 - 4})}{2\lambda_1^2} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad \rho_2 = \left[\frac{k^2 (M - \sqrt{M^2 - 4})}{2\lambda_1^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (6.39)$$

这里, 我们假定了 $M^2 - 4 > 0$ (至少对于Mooney材料, 确是如此).

在(6.38)个, 方程(6.30) (6.31)满足格林条件, 可以合并写成 \dot{p} 的全微分形式

$$d\dot{p} = p_{,1} dX_1 + \dot{p}_{,2} dX_2 \quad (6.40)$$

记

$$F_1 = 1 + (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)^2 \frac{A_1(\lambda_2)}{B_1(0)}, \quad Q_1 = 1 + (\lambda_2^2 - \lambda_1^2) \frac{A_1(\lambda_1)}{B_1(0)} \quad (6.41)$$

将(6.30) (6.31) (6.38)代入(6.40)并积分, 且不计积分常数, 有

$$\begin{aligned} \dot{p} = & \lambda_1^2 B_1(0) \left[F_1 (c_1 \exp[-\rho_2 X_2] - c_2 \exp[-\rho_2 X_2]) k \right. \\ & \left. + (c_1 \rho_1^3 \exp[-\rho_1 X_2] + c_2 \rho_2^3 \exp[-\rho_2 X_2]) \frac{1}{k} \right] \cos kX_1 \end{aligned} \quad (6.42)$$

将(6.29) (6.38) (6.42)代入(6.24) (6.25)并且考虑到(6.26)~(6.28), 有

$$\begin{aligned} & \left[(H_1 \lambda_1 - J_1 \lambda_2 - \lambda_1^3 B_1(0) F_1) \rho_1 k + \lambda_1^3 B_1(0) \rho_1^3 \frac{1}{k} \right] c_1 \\ & + \left[(H_1 \lambda_1 - J_1 \lambda_2 - \lambda_1^3 B_1(0) F_1) \rho_2 k + \lambda_1^3 B_1(0) \rho_2^3 \frac{1}{k} \right] c_2 = 0 \end{aligned} \quad (6.43)$$

$$[\lambda_1 B_1(0) \rho_1^2 + V_1 \lambda_2 k^2] c_1 + [\lambda_1 B_1(0) \rho_2^2 + V_1 \lambda_2 k^2] c_2 = 0 \quad (6.44)$$

欲使 c_1, c_2 不同时为零, 必须而且只须(6.43) (6.44)的系数行列式等于零, 即有

$$\begin{aligned} & (\rho_1 - \rho_2) \left\{ [-(H_1 \lambda_1 - J_1 \lambda_2)] \lambda_1 B_1(0) \rho_1 \rho_2 k \right. \\ & + (H_1 \lambda_1 - J_1 \lambda_2) \lambda_2 V k^3 + \lambda_1^4 B_1^2(0) F_1 \rho_1 \rho_2 k \\ & - \lambda_1^3 B_1(0) F_1 V_1 k^3 + \lambda_1^4 B_1^2(0) \rho_1^2 \rho_2^2 \frac{1}{k} \\ & \left. + \lambda_1^3 B_1(0) V_1 (\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_1 \rho_2) k \right\} = 0 \end{aligned} \quad (6.45)$$

容易证明, $\rho_1 - \rho_2 = 0$ 对应于平凡解, 这不是我们所要求的. 又考虑到

$$\rho_1 \rho_2 = -\frac{k^2}{\lambda_1^2}, \quad \rho_1^2 + \rho_2^2 = \frac{k^2 M}{\lambda_1^2} \quad (6.46)$$

$$\frac{\delta_{22}}{\lambda_1} = -q \quad (6.47)$$

以及(6.17) (6.26)~(6.28) (6.41), (6.45)变为

$$\lambda_1^2 A_1(0) + \lambda_1^6 B_1(0) + [B_1(0) - 2A_1(0)]\lambda_1^4 + 3\lambda_1^2 B_1(0) + [A_1(0) - B_1(0)] = 0 \quad (6.48)$$

这就是表面受常静水载荷下不可压缩弹性半无限体表面失稳的临界条件.特征方程(6.48)作为 λ_1 的多项式,其系数与表面静水载荷 q 无关,因此,不论表面承受静水载荷与否,也不管所受静水载荷有多大,表面失稳的临界主伸缩比都相同,但临界载荷不同,仅相差在表面静水载荷值上.

对于 Mooney 材料的特殊情形,应变能函数形式为

$$W = W_1(I_1 - 3) + W_2(I_2 - 3) \quad (6.49)$$

其中 W_1, W_2 为材料常数.在此情况下,

$$A_1(0) = 0, B_1(0) = 2(W_1 + W_2) \quad (6.50)$$

则 Mooney 型弹性半无限体表面失稳的临界条件为

$$\lambda_1^6 + \lambda_1^4 + 3\lambda_1^2 - 1 = 0 \quad (6.51)$$

算得的临界主伸缩比为

$$\lambda_{1c} = 0.544, \lambda_{2c} = 1.838 \quad (6.52)$$

确与表面静水载荷值无关.

由(6.52)(6.16)(5.13),得临界 Cauchy 应力为

$$T_{1c} = -6.175(W_1 + W_2) - q \quad (6.53)$$

负号表明此应力为压应力,所得临界应力确含有表面静水载荷项.

七、结 束 语

以上,我们对于可压缩和不可压缩两种弹性半无限体,详细地讨论和分析了表面静水载荷对其表面失稳条件的影响.如果表面静水载荷为零,所得结果都回到以前对于自由表面的相应结果.同表面自由的情形相比较,无论是对可压缩的 Blatz-ko 材料和谐和材料,还是不可压缩的弹性材料,表面静水压力的存在,都提高了所组成半无限体表面失稳的临界载荷值.这意味着,表面静水压力的存在使弹性半无限体表面的失稳变得困难起来.最容易出现表面失稳的情形出现在表面自由条件下,由此可见,以前关于弹性半无限体表面失稳问题的研讨都在表面自由的假设下进行,有其一定的合理性.这样,本文的工作就同时为此种处理提供了理论依据.

参 考 文 献

- [1] Biot, M. A., *Mechanics of Incremental Deformations*, Wiley (1965).
- [2] Brunelle, E. J., Surface instability due to initial compressive stress, *Bulletin of the Seismological Society of America*, 63 (6) (1973), 1885—1893.
- [3] Novozhilov, V. V., *Nonlinear Theory of Elasticity*, Graylock, (1953).
- [4] Usmani, S. A. and M. F. Beatty, On the surface instability of a highly elastic half-space, *J. Elasticity*, 4(4) (1974), 249—263.

- [5] Dorris, J. F. and S. Nemat-Nasser, Instability of a layer on a half space, *J. Appl. Mech.*, 47(1980), 304—312.
- [6] Wu, C. H. and G. Z. Cao (曹光中), Buckling of an axially compressed incompressible half space, *J. struct. Mech.*, 11(1) (1983), 37—48.
- [7] 曹光中, 不可压缩弹性半空间的表面不稳定性——轴对称问题的分析, 华东工程学院学报, (1) (1984), 1—13.
- [8] 曹光中, 关于弹性半无限体表面的稳定性, 应用数学和力学, 7(10) (1986), 937—945.
- [9] 曹光中, 双向受载不可压缩弹性半无限体表面的稳定性, 固体力学学报, (3) (1986), 272—277.
- [10] Blatz, P. J. and W. L. Ko, Application of finite elastic theory to the Deformation of rubbery materials, *Trans. Soc. Rheology*, 6 (1962), 223—251.
- [11] Wesolowski, Z., Stability in some cases of tension in the light of the theory of finite strain, *Arch. Mech. Stos.*, 16(5) (1964), 875—900.
- [12] Hao Tian-hu, The necking of the rectangular block with surface imperfection, *Mech. Research Comm.*, 13(6) (1986), 309—315.
- [13] Wu, C. H. and G. Z. Cao (曹光中), Buckling problems in finite plane elasticity-harmonic materials, *Quart. Appl. Math.*, 41(4) (1984), 461—474.
- [14] Wu, C. H., Plane-strain buckling of cracks in incompressible elastic solids, *J. Elasticity*, 10(2) (1980), 163—177.

Surface Instability of Elastic Half Spaces with Hydrostatic Loading on Their Surfaces

Cao Guang-zhong Xu Zhi-hong

(East China Institute of Technology, Nanjing)

Abstract

In this paper, the plane-strain buckling of compressible and incompressible elastic half-spaces, whose surfaces are loaded by constant hydrostatic pressures, is studied by using a small-deformation-superposed-on-large-deformation analysis, and the buckling condition for each case is obtained. For Blatz-Ko and harmonic compressible materials as well as Mooney incompressible material, the influence of the surface hydrostatic pressure on the critical buckling condition is discussed in detail.

Key words: semi-infinite body, finite deformation, elastic buckling, hydrostatic pressure, plane strain