应用数学和力学，第13卷第1期（1992年1月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

奇摄动半线性椭圆型方程的边界层-角层现象

周 哲 彦

（福建师大数学系，1989年11月13日收到）

摘 要

本文考虑一类半线性椭圆型方程的边界层-角层现象，在适当的条件下，我们得到了摄动问题解的存在性及其一致有效渐近展开式．

关键词 边界层 内层 半线性椭圆型方程

一、引言及外展开式的建立

关于奇摄动问题的解或其导数在定义域内部的非一致现象，许多学者作了广泛的研究（如江福汝[1]，K. W. Chang 和 F. A. Howes[2]~[5]及这些文章中的参考文献）．这些结果主要是讨论常微分方程的问题．有关包含转向点的二阶常微分方程的奇摄动问题在文[1]中已有详细的讨论．K. W. Chang和F. A. Howes 则利用微分不等式理论研究了某些非线性问题，对于偏微分方程，也得到了许多类似的结果．如E. M. Dejager处理了一类线性椭圆型方程的转向点问题[6]，又如 F. A. Howes[7]，他的工作是重要的，因为它涉及了非线性问题．但他们都没有考虑摄动问题的高阶一致有效渐近展开．而且事实上，与常微分方程相比之下，这方面的结果要少得多．因此可以说，关于这方面的研究还处于初始阶段．

我们对如下的问题感兴趣

$$\begin{cases} \varepsilon\Delta U=h(X,U) & (X\in\Omega) & (1.1)\\ U=\varphi(X) & (X\in\partial\Omega) & (1.2)\end{cases}$$

其中Ω是满足$x^2+y^2<1$的区域($X=(x,y)$)，ε 是正的小参数．我们用Ω_+和Ω_-分别表示Ω中相应于$y>0$和$y<0$的子区域，因此$\Gamma=\{(x,0);\ -1<x<1\}$为在$\Omega$中$\Omega_+$和$\Omega_-$的分界线．而且$\varphi(X)\in C^{(2+\alpha)}(\partial\Omega)$及$D=\{(x,y,U);\ U\in R,\ (x,y)\in\bar{\Omega}\}$．

设(1.1)中的$h(X,U)$满足下列条件

i) $h(x,y,U)$对变量x及U在D上充分光滑，而对变量y则分别在$\bar{\Omega}_+\times R$和$\bar{\Omega}_-\times R$上充分光滑． (1.3)

ii) $h_u(x,y,U)\geqslant l>0\qquad((x,y,U)\in D)$． (1.4)

* 林宗池推荐．

当$\varepsilon=0$时，方程(1.1)变成$h(X,U)=0$,本文的工作基于这样的假设，即退化方程$h(X,U)=0$存在一个解$U_0(X)$满足

i) $U_0(X)$在$\bar{\Omega}$上连续。

ii) $U_0(X)$对变量x在$\bar{\Omega}$上充分光滑，而对变量y分别在$\bar{\Omega}_+$和$\bar{\Omega}_-$上充分光滑。

这表明$\partial U_0/\partial y$在Γ上不连续。

首先，我们构造(1.1)～(1.2)的外解展开式，设这个展开式为

$$\bar{U}(x,y,\varepsilon)\sim\sum_{n=0}^{\infty}\bar{u}_n(x,y)\varepsilon^n \qquad ((x,y)\in\bar{\Omega}_+) \tag{1.5}$$

$$\bar{\bar{U}}(x,y,\varepsilon)\sim\sum_{n=0}^{\infty}\bar{\bar{u}}_n(x,y)\varepsilon^n \qquad ((x,y)\in\bar{\Omega}_-) \tag{1.6}$$

容易验证$\bar{u}_n$满足

$$h(x,y,\bar{u}_0(x,y))=0 \tag{1.7}$$

$$h_u(x,y,\bar{u}_0(x,y))\cdot\bar{u}_n(x,y)=\Delta\bar{u}_{n-1}(x,y)+\bar{g}_n(x,y) \tag{1.8}$$

及$\bar{\bar{u}}_n$满足

$$h(x,y,\bar{\bar{u}}_0(x,y))=0 \tag{1.9}$$

$$h_u(x,y,\bar{\bar{u}}_0(x,y))\bar{\bar{u}}_n(x,y)=\Delta\bar{\bar{u}}_{n-1}(x,y)+\bar{\bar{g}}_n(x,y). \tag{1.10}$$

其中函数$\bar{g}_n(x,y)(\bar{\bar{g}}_n(x,y))$可由诸函数$\bar{u}_0,\bar{u}_1,\cdots,\bar{u}_{n-1}(\bar{\bar{u}}_0,\bar{\bar{u}}_1,\cdots,\bar{\bar{u}}_{n-1})$加以确定。

分别令$\bar{u}_0(x,y)=u_0(x,y)((x,y)\in\bar{\Omega}_+)$及$\bar{\bar{u}}_0(x,y)=u_0(x,y)((x,y)\in\bar{\Omega}_-)$。那么由(1.4)可唯一确定诸函数$\bar{u}_n$及$\bar{\bar{u}}_n(n\geqslant1)$。因此我们得到如下形式的外解

$$U_{外}(x,y,\varepsilon)=\begin{cases}\bar{U}(x,y,\varepsilon) & ((x,y)\in\bar{\Omega}_+)\\ \bar{\bar{U}}(x,y,\varepsilon) & ((x,y)\in\bar{\Omega}_-)\end{cases} \tag{1.11}$$

二、内层展开式的建立

在这一节，我们将引入一种内层展开式来描述摄动问题的内层现象。

令 $t=y/\sqrt{\varepsilon}$及内层展开式形如

$$V(x,t,\sqrt{\varepsilon})=\begin{cases}\bar{V}(x,t,\sqrt{\varepsilon})\sim\sum\limits_{n=0}^{\infty}\bar{v}_n(x,t)\varepsilon^{\frac{n}{2}} & (t\geqslant0)\\ \bar{\bar{V}}(x,t,\sqrt{\varepsilon})\sim\sum\limits_{n=0}^{\infty}\bar{\bar{v}}_n(x,t)\varepsilon^{\frac{n}{2}} & (t\leqslant0)\end{cases} \tag{2.1}$$

在新坐标系(x,t)中，Laplace算子$\varepsilon\Delta$可以改写为

$$\varepsilon\Delta=\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial x^2} \tag{2.2}$$

将 $\bar{U}(x,y,\varepsilon)+\bar{V}(x,t,\sqrt{\varepsilon})$及$\bar{\bar{U}}(x,y,\varepsilon)+\bar{\bar{V}}(x,t,\sqrt{\varepsilon})$代入方程(1.1)，从(2.2)式可得当$t\geqslant0$时

$$\frac{\partial^2 \bar{V}(x,t,\sqrt{\varepsilon})}{\partial t^2}=h(x,t\sqrt{\varepsilon},\bar{U}+\bar{V})-h(x,t\sqrt{\varepsilon},\bar{U})-\varepsilon\frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial x^2} \tag{2.3}$$

以及
$$\frac{\partial^2 \bar{\bar{V}}(x,t,\sqrt{\varepsilon})}{\partial t^2}=h(x,t\sqrt{\varepsilon},\bar{\bar{U}}+\bar{\bar{V}})-h(x,t\sqrt{\varepsilon},\bar{\bar{U}})-\varepsilon\frac{\partial^2 \bar{\bar{V}}}{\partial x^2} \quad (t\leqslant 0) \tag{2.4}$$

为使$U_{外}(x,y,\varepsilon)+V(x,t,\sqrt{\varepsilon})$在$\Gamma$上连续可微，必须有

$$\begin{cases}\bar{U}(x,y,\varepsilon)|_{y=0}+\bar{V}(x,t,\sqrt{\varepsilon})|_{t=0}=\bar{\bar{U}}(x,y,\varepsilon)|_{y=0}+\bar{\bar{V}}(x,t,\varepsilon)|_{t=0} & (2.5)\\ \left.\dfrac{\partial\bar{U}}{\partial y}\right|_{y=0}+\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left.\dfrac{\partial\bar{V}}{\partial t}\right|_{t=0}=\left.\dfrac{\partial\bar{\bar{U}}}{\partial y}\right|_{y=0}+\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left.\dfrac{\partial\bar{\bar{V}}}{\partial t}\right|_{t=0} & (2.6)\end{cases}$$

比较$\sqrt{\varepsilon}$同次幂的系数，我们得到

$$\begin{cases}\bar{u}_0(x,0)+\bar{v}_0(x,0)=\bar{\bar{u}}_0(x,0)+\bar{\bar{v}}_0(x,0)\\ \bar{v}_1(x,0)=\bar{\bar{v}}_1(x,0)\\ \bar{u}_1(x,0)+\bar{v}_2(x,0)=\bar{\bar{u}}_1(x,0)+\bar{\bar{v}}_2(x,0)\\ \bar{v}_3(x,0)=\bar{\bar{v}}_3(x,0)\\ \quad\cdots\cdots\\ \bar{u}_n(x,0)+\bar{v}_{2n}(x,0)=\bar{\bar{u}}_n(x,0)+\bar{\bar{v}}_{2n}(x,0)\\ \bar{v}_{2n+1}(x,0)=\bar{\bar{v}}_{2n+1}(x,0)\quad (n=0,1,2,\cdots)\end{cases} \tag{2.7}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\bar{v}_0(x,0)}{\partial t}=\dfrac{\partial\bar{\bar{v}}_0(x,0)}{\partial t}\\ \dfrac{\partial\bar{u}_0(x,0)}{\partial y}+\dfrac{\partial\bar{v}_1(x,0)}{\partial t}=\dfrac{\partial\bar{\bar{u}}_0(x,0)}{\partial y}+\dfrac{\partial\bar{\bar{v}}_1(x,0)}{\partial t}\\ \dfrac{\partial\bar{v}_2(x,0)}{\partial t}=\dfrac{\partial\bar{\bar{v}}_2(x,0)}{\partial t}\\ \dfrac{\partial\bar{u}_1(x,0)}{\partial y}+\dfrac{\partial\bar{v}_3(x,0)}{\partial t}=\dfrac{\partial\bar{\bar{v}}_1(x,0)}{\partial y}+\dfrac{\partial\bar{\bar{v}}_3(x,0)}{\partial t}\\ \dfrac{\partial\bar{v}_{2n}(x,0)}{\partial t}=\dfrac{\partial\bar{\bar{v}}_{2n}(x,0)}{\partial t}\\ \dfrac{\partial\bar{u}_n(x,0)}{\partial y}+\dfrac{\partial\bar{v}_{2n+1}(x,0)}{\partial t}=\dfrac{\partial\bar{\bar{u}}_n(x,0)}{\partial y}+\dfrac{\partial\bar{\bar{v}}_{2n+1}(x,0)}{\partial t}\quad (n=0,1,2,\cdots)\end{cases} \tag{2.8}$$

从(2.3)，(2.4)式，我们可知$\bar{v}_0$，$\bar{v}_1$，$\bar{v}_2(\bar{\bar{v}}_0,\bar{\bar{v}}_1,\bar{\bar{v}}_2)$满足如下的微分方程序列

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2\bar{v}_0}{\partial t^2}=h(x,0,\bar{u}_0(x,0)+\bar{v}_0)-h(x,0,\bar{u}_0(x,0)) & (t\geqslant 0)\\ \dfrac{\partial^2\bar{\bar{v}}_0}{\partial t^2}=h(x,0,\bar{\bar{u}}_0(x,0)+\bar{\bar{v}}_0)-h(x,0,\bar{\bar{u}}_0(x,0)) & (t\leqslant 0)\end{cases} \tag{2.9}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2\bar{v}_1}{\partial t^2}=K(x)\bar{v}_1 & (t\geqslant 0)\\ \dfrac{\partial^2\bar{\bar{v}}}{\partial t^2}=K(x)\bar{\bar{v}}_1 & (t\leqslant 0)\end{cases} \tag{2.10}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 \bar{v}_2}{\partial t^2}=K(x)\bar{v}_2+\bar{G}_2(x,t) & (t\geqslant 0)\\ \dfrac{\partial^2 \bar{\bar{v}}_2}{\partial t^2}=K(x)\bar{\bar{v}}_2+\bar{\bar{G}}_2(x,t) & (t\leqslant 0)\end{cases} \tag{2.11}$$

一般地，当$n\geqslant 3$时，有

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 \bar{v}_n}{\partial t^2}=K(x)\bar{v}_n+\bar{G}_n(x,t) & (t\geqslant 0)\\ \dfrac{\partial^2 \bar{\bar{v}}_n}{\partial t^2}=K(x)\bar{\bar{v}}_n+\bar{\bar{G}}_n(x,t) & (t\leqslant 0)\end{cases} \tag{2.12}$$

在Γ上，$\bar{u}_0(x,0)=\bar{\bar{u}}_0(x,0)$以及由(2.7)，(2.8)式，我们取 $\bar{v}_0(x,t)=\bar{\bar{v}}_0(x,t)\equiv 0$。记$K(x)=h_u(x,0,\bar{u}_0(x,0))=h_u(x,0,\bar{\bar{u}}_0(x,0))$，则有表达式(2.10)～(2.12)。

满足方程(2.10)及边界条件(2.7)，(2.8)的解容易求得，它们是

$$\begin{cases}\bar{v}_1(x,t)=\dfrac{1}{2\sqrt{K(x)}}\left(\dfrac{\partial \bar{\bar{u}}_0(x,0)}{\partial y}-\dfrac{\partial \bar{u}_0(x,0)}{\partial y}\right)\exp[-\sqrt{K(x)}\,t] & (t\geqslant 0)\\ \bar{\bar{v}}_1(x,t)=\dfrac{1}{2\sqrt{K(x)}}\left(\dfrac{\partial \bar{u}_0(x,0)}{\partial y}-\dfrac{\partial \bar{\bar{u}}_0(x,0)}{\partial y}\right)\exp[\sqrt{K(x)}\,t] & (t\leqslant 0)\end{cases} \tag{2.13}$$

由于$K(x)\geqslant l>0$，故$\bar{v}_1(x,t)(t\geqslant 0)$和$\bar{\bar{v}}_1(x,t)(t\leqslant 0)$具有边界层性质，即当$t\to+\infty(t\to-\infty)$时，$\bar{v}_1(x,t)(\bar{\bar{v}}_1(x,t))$关于$x$一致地按指数形式趋于零。

方程(2.11)的通解可表为

$$\bar{v}_2(x,t)=\bar{c}_2(x)\exp[-\sqrt{K(x)}\,t]-\frac{1}{2\sqrt{K(x)}}\left[\int_0^t \exp[\sqrt{K(x)}\,(\tau-t)]\cdot\bar{G}_2(x,\tau)d\tau+\int_t^{+\infty}\exp[\sqrt{K(x)}\,(t-\tau)]\bar{G}_2(x,\tau)d\tau\right] \tag{2.14}$$

$$\bar{\bar{v}}_2(x,t)=\bar{\bar{c}}_2(x)\exp[\sqrt{K(x)}\,t]-\frac{1}{2\sqrt{K(x)}}\left[\int_t^0 \exp[\sqrt{K(x)}\,(t-\tau)]\cdot\bar{\bar{G}}_2(x,\tau)d\tau+\int_{-\infty}^t\exp[\sqrt{K(x)}\,(\tau-t)]\bar{\bar{G}}_2(x,\tau)d\tau\right] \tag{2.15}$$

容易验证 $\bar{G}_2(x,t)=O(\bar{p}_2(t)\exp[-\sqrt{K(x)}\,t])(t\to+\infty$，关于$x$一致地)以及$\bar{\bar{G}}_2(x,t)=O(\bar{\bar{p}}_2(t)\exp[\sqrt{K(x)}\,t])(t\to-\infty$，关于$x$一致地)，其中$\bar{p}_2(t)$和$\bar{\bar{p}}_2(t)$均为$t$的多项式。

从(2.13)，(2.14)式及前面的讨论可知，$\bar{v}_2$和$\bar{\bar{v}}_2$均具有边界层的性质。

为了确定$\bar{c}_2(x)$和$\bar{\bar{c}}_2(x)$，从(2.7)，(2.8)式可以得到

$$\bar{c}_2(x)=\frac{1}{2}[\bar{\bar{u}}_1(x,0)-\bar{u}_1(x,0)]-\frac{1}{2\sqrt{K(x)}}\int_{-\infty}^0\exp[\sqrt{K(x)}\,\tau]\cdot\bar{\bar{G}}_2(x,\tau)d\tau \tag{2.16}$$

$$\bar{\bar{c}}_2(x)=\frac{1}{2}[\bar{u}_1(x,0)-\bar{\bar{u}}_1(x,0)]-\frac{1}{2\sqrt{K(x)}}\int_0^{+\infty}\exp[-\sqrt{K(x)}\,\tau]\cdot\bar{G}_2(x,\tau)d\tau \tag{2.17}$$

利用数学归纳法，我们可以证明$\bar{G}_n(x,t)=O(\bar{p}_n(t)\exp[-\sqrt{K(x)}\,t])(t\to+\infty)$及$\bar{\bar{G}}_n(x,t)=O(\bar{\bar{p}}_n(t)\exp[\sqrt{K(x)}\,t])(t\to-\infty)$。其中函数$\bar{p}_n(t)$及$\bar{\bar{p}}_n(t)$均为$t$的不超过$n$次

的多项式。

这使得我们可以求得所有满足方程(2.12)及边值条件(2.7)，(2.8)的解，这些解的表达式具有与(2.14)和(2.15)相类似的形式。

三、边界层展开式的建立

由于我们所构造的外解和内层解均无涉及到摄动问题的边界条件，故原问题会出现边界层现象。为了描述这一现象，我们将在区域的边界附近构造边界层函数。

令 $\partial\Omega_1=\partial\Omega\cap\bar{\Omega}_+$，$\xi=\dfrac{\sqrt{1-x^2}-y}{\sqrt{\varepsilon}}$，那么算子$\varepsilon\Delta$可以分解为

$$\varepsilon\Delta=L_0+\sqrt{\varepsilon}L_1+\varepsilon L_2 \tag{3.1}$$

其中

$$\begin{cases} L_0=\dfrac{1}{1-x^2}\dfrac{\partial^2}{\partial\xi^2}, \\ L_1=-\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^2}}\dfrac{\partial^2}{\partial x\partial\xi} \\ L_2=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} \end{cases} \tag{3.2}$$

设在$\partial\Omega_1$附近的边界层函数形如

$$Z(x,\xi,\sqrt{\varepsilon})\sim\sum_{n=0}^{\infty}z_n(x,\xi)\varepsilon^{\frac{n}{2}} \tag{3.3}$$

将$U+Z$代入(1.1)，得

$$\frac{1}{1-x^2}\frac{\partial^2 z_0}{\partial\xi^2}=h(x,\sqrt{1-x^2},\bar{u}_0(x,\sqrt{1-x^2})+z_0) \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x^2}\frac{\partial^2 z_1}{\partial\xi^2}=&h_u(x,\sqrt{1-x^2},\bar{u}_0(x,\sqrt{1-x^2})+z_0(x,\xi))z_1\\ &-[h_u(x,\sqrt{1-x^2},\bar{u}_0+z_0)-h_u(x,\sqrt{1-x^2},\bar{u}_0)]\frac{\partial\bar{u}_0}{\partial y}\cdot\xi\\ &-[h_y(x,\sqrt{1-x^2},\bar{u}_0+z_0)-h_y(x,\sqrt{1-x^2},u_0)]\cdot\xi-L_1z_0\end{aligned} \tag{3.5}$$

而当$n\geqslant2$时，有

$$\frac{1}{1-x^2}\frac{\partial^2 z_n}{\partial\xi^2}=h_u(x,\sqrt{1-x^2},\bar{u}_0(x,\sqrt{1-x^2}+z_0)z_n+W_n(x,\xi) \tag{3.6}$$

其中$W_n(x,\xi)(n=0,1,2,\cdots)$只与$z_i(i\leqslant n-1)$及$U$有关。

基本的要求是$U+Z$要满足原问题在$\partial\Omega_1$的边界条件，即

$$[U(x,y,\varepsilon)+Z(x,\xi,\sqrt{\varepsilon})]_{\partial\Omega_1}=\varphi(x,\sqrt{1-x^2})=\bar{\varphi}(x) \tag{3.7}$$

从(3.7)式可得

$$\begin{cases} z_0(x,0)=\bar{\varphi}(x)-\bar{u}_0(x,\sqrt{1-x^2}) \\ z_1(x,0)=0 \\ \qquad\cdots\cdots\cdots \\ z_{2m-1}(x,0)=0 \\ z_{2m}(x,0)=-\bar{u}_m(x,\sqrt{1-x^2}) \qquad (m=1,2,\cdots) \end{cases} \tag{3.8}$$

根据(3.4)和(3.8)，我们有

i)　若$\alpha(x)=\varphi(x)-\bar{u}_0(x,\sqrt{1-x^2})>0$，则

$$\xi=\int_{\bar{z}_0}^{\alpha(x)}\frac{d\eta}{\sqrt{2\int_0^{\eta}(1-x^2)h(x,\sqrt{1-x^2},\bar{u}_0(x,\sqrt{1-x^2})+r)dr}}\tag{3.9}$$

ii)　若$\alpha(x)=\varphi(x)-\bar{u}_0(x,\sqrt{1-x^2})<0$，则

$$\xi=\int_{\alpha(x)}^{\bar{z}_0}\frac{d\eta}{\sqrt{2\int_0^{\eta}(1-x^2)h(x,\sqrt{1-x^2},\bar{u}_0(x,\sqrt{1-x^2})+r)dr}}\tag{3.10}$$

iii)　若$\alpha(x)=0$，则$\bar{z}_0\equiv 0$。

引理1　若$\alpha(x)>0$，那么方程(3.9)存在唯一的解$\bar{z}_0(x,\xi)$，满足$0\leqslant\bar{z}_0(x,\xi)\leqslant\alpha(x)\exp[-\sqrt{(1-x^2)l}\,\xi]$，$-1+\delta\leqslant x\leqslant 1-\delta$，其中$\delta>0$为常数。

证明　方程(3.9)解的存在性和唯一性可由隐函数理论简单地推得。

从(3.9)式，我们有$\lim\limits_{\xi\to+\infty}\bar{z}_0(x,\xi)=0$，若存在一个点，如$\xi_0\in(0,\infty)$，使得$\bar{z}_0$在$\xi_0$处取得负的极小值，那么$\left.\dfrac{\partial\bar{z}_0}{\partial\xi}\right|_{\xi=\xi_0}=0$ 且$\left.\dfrac{\partial^2\bar{z}_0}{\partial\xi^2}\right|_{\xi=\xi_0}\geqslant 0$。

另一方面

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial^2\bar{z}_0}{\partial\xi^2}\right|_{\xi=\xi_0}&=(1-x^2)h(x,\sqrt{1-x^2},\bar{u}_0(x,\sqrt{1-x^2})+\bar{z}_0(x,\xi_0))\\&=(1-x^2)h_u(x,\sqrt{1-x^2},\bar{u}_0(x,\sqrt{1-x^2})+\theta\bar{z}_0(x,\xi_0))\bar{z}_0(x,\xi_0)\\&\leqslant(1-x^2)\cdot l\cdot\bar{z}_0(x,\xi_0)<0\qquad(0<\theta<1).\end{aligned}$$

这个矛盾说明了对于任意的ξ，总有$\bar{z}_0(x,\xi)\geqslant 0$。

现在，我们从条件(1.4)可知$\dfrac{\partial\bar{z}_0}{\partial\xi}\leqslant-\sqrt{(1-x^2)l}\cdot\bar{z}_0(x,\xi)$。

两边乘上$\exp[\sqrt{(1-x^2)l}\,\xi]$，则上述不等式成为

$$\frac{\partial}{\partial\xi}(\exp[\sqrt{(1-x^2)l}\,\xi]\cdot\bar{z}_0(x,\xi))\leqslant 0.$$

故

$$\exp[\sqrt{(1-x^2)l}\,\xi]\bar{z}_0(x,\xi)-\bar{z}_0(x,0)\leqslant 0,$$
$$\bar{z}_0(x,\xi)\leqslant\bar{z}_0(x,0)\exp[-\sqrt{(1-x^2)l}\,\xi]=\alpha(x)\exp[-\sqrt{(1-x^2)l}\,\xi].$$

因此，函数$\bar{z}_0(x,\xi)$关于ξ具有边界层函数的性质。同理可推得当$\alpha(x)<0$时的相同结论。

假设已经求得函数$\bar{z}_i(x,\xi)$ $(i=0,1,2,\cdots,n-1)$，它们均具有边界层函数的性质，那么我们将进一步求得$\bar{z}_n(x,\xi)$满足

$$\begin{cases}\dfrac{1}{1-x^2}\dfrac{\partial^2\bar{z}_n}{\partial\xi^2}=h_u(x,\sqrt{1-x^2},\bar{u}_0(x,\sqrt{1-x^2})+\bar{z}_0(x,\xi))\bar{z}_n+\bar{W}_n(x,\xi)\\ \bar{z}_n(x,0)=0\qquad(n=2m-1),\ \bar{z}_n(x,0)=-\bar{u}_m(x,\sqrt{1+x^2})\qquad(n=2m)\\ \bar{z}_n(x,\xi)\to 0\ (\xi\to+\infty\text{时})\end{cases}\tag{3.11}$$

从以上的假设可知，(3.11)中的函数$\bar{W}_n(x,\xi)$具有边界层性质。若$\bar{z}_0(x,\xi)\equiv 0$，那么边值问题(3.11)退化为一个二阶常微分方程，因此容易求得其解。若$\bar{z}_0(x,\xi)\not\equiv 0$ $(\alpha(x)\not\equiv 0)$，

我们令

$$\beta(x,\xi)=-\frac{\partial z_0}{\partial\xi}=\sqrt{2(1-x^2)\int_0^{z_0}h(x,\sqrt{1-x^2},\bar{u}_0(x,\sqrt{1-x^2})+r)dr} \tag{3.12}$$

当$n=2m-1$, $-1+\delta\leqslant x\leqslant 1-\delta$时，有

$$z_n(x,\xi)=-\beta(x,\xi)\int_0^{\xi}\beta^{-2}(x,\xi)\int_t^{+\infty}W_n(x,\eta)\beta(x,\eta)d\eta dt \tag{3.13}$$

而当$n=2m$, $-1+\delta\leqslant x\leqslant 1-\delta$时，则

$$z_n(x,\xi)=-\beta(x,\xi)\int_0^{\xi}\beta^{-2}(x,\xi)\int_t^{+\infty}W_n(x,\eta)\beta(x,\eta)d\eta dt$$
$$-\bar{u}_m(x,\sqrt{1-x^2})\cdot\frac{\beta(x,\xi)}{\beta(x,0)} \tag{3.14}$$

这便清楚地描述了$z_n(x,\xi)$的渐近性质。

同样，我们也必须在$\partial\Omega_2=\partial\Omega\cap\bar{\Omega}_-$附近构造边界层函数

$$\bar{\bar{Z}}(x,\eta,\sqrt{\varepsilon})\sim\sum_{n=0}^{\infty}\bar{\bar{z}}_n(x,\eta)\varepsilon^{\frac{n}{2}}\qquad\left(\eta=\frac{y+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \tag{3.15}$$

来描述边界层现象。重复上面所采用的步骤就可依次求得诸函数$\bar{\bar{z}}_n(n=0,1,2,\cdots)$，在此不加详细论述。

四、主要结果

这一节我们将建立摄动问题(1.1)～(1.2)的渐近解及其精确解的存在唯一性，而且我们将在最大模意义下给精确解和渐近解之误差以适当的估计。

我们注意到，如上构造的各渐近展开式只在相应边界的附近有定义，如内层函数$V(x,t,\sqrt{\varepsilon})$仅当$t$很小时才有意义，因此，我们必须建立适当的渐近展开式使之在整个区域上一致有效。

取ρ_0为一适当小的正数，我们定义光滑函数如下

$$\varphi(t)=\begin{cases}1 & \left(0\leqslant t\leqslant\frac{1}{3}\rho_0\right)\\ 0 & \left(t\geqslant\frac{2}{3}\rho_0\right)\end{cases}\qquad \bar{\varphi}(t)=\begin{cases}1 & \left(-\frac{1}{3}\rho_0\leqslant t\leqslant 0\right)\\ 0 & \left(t\leqslant-\frac{2}{3}\rho_0\right)\end{cases}$$

$$\bar{\psi}(\xi)=\begin{cases}1 & \left(0\leqslant\xi\leqslant\frac{1}{3}\rho_0\right)\\ 0 & \left(\xi\geqslant\frac{2}{3}\rho_0\right)\end{cases}\qquad \bar{\bar{\psi}}(\eta)=\begin{cases}1 & \left(0\leqslant\eta\leqslant\frac{1}{3}\rho_0\right)\\ 0 & \left(\eta\geqslant\frac{2}{3}\rho_0\right)\end{cases}$$

当$-1+\delta\leqslant x\leqslant 1-\delta$时，我们定义摄动问题的渐近解如下

$$P_m(x,y,\varepsilon)=\begin{cases}\bar{P}_m(x,y,\varepsilon)=\bar{U}_m(x,y,\varepsilon)+\varphi(t)V_{2m}(x,t,\sqrt{\varepsilon})\\ \qquad +\bar{\psi}(\xi)Z_{2m}(x,\xi,\sqrt{\varepsilon}) \qquad ((x,y)\in\bar{\Omega}_+)\\ \bar{\bar{P}}_m(x,y,\varepsilon)=\bar{\bar{U}}_m(x,y,\varepsilon)+\bar{\varphi}(t)\bar{V}_{2m}(x,t,\sqrt{\varepsilon})\\ \qquad +\bar{\bar{\psi}}(\eta)\bar{\bar{Z}}_{2m}(x,\eta,\sqrt{\varepsilon}) \qquad ((x,y)\in\bar{\Omega}_-)\end{cases} \tag{4.1}$$

其中
$$\bar{U}_m(x,y,\varepsilon)=\sum_{n=0}^{m}\bar{u}_n(x,y)\varepsilon^n,\quad \bar{\bar{U}}_m(x,y,\varepsilon)=\sum_{n=0}^{m}\bar{\bar{u}}_n(x,y)\varepsilon^n,$$

$$\bar{V}_{2m}(x,t,\sqrt{\varepsilon})=\sum_{n=0}^{2m}\bar{v}_n(x,t)\,\varepsilon^{\frac{n}{2}},\ \bar{\bar{V}}_{2m}(x,t,\sqrt{\varepsilon})=\sum_{n=0}^{2m}\bar{\bar{v}}_n(x,t)\varepsilon^{\frac{n}{2}},$$

$$\bar{Z}_{2m}(x,\xi,\sqrt{\varepsilon})=\sum_{n=0}^{2m}\bar{z}_n(x,\xi)\,\varepsilon^{\frac{n}{2}},\ \bar{\bar{Z}}_{2m}(x,\eta,\sqrt{\varepsilon})=\sum_{n=0}^{2m}\bar{\bar{z}}_n(x,\eta)\varepsilon^{\frac{n}{2}}.$$

显然，上面所定义的函数$P_m(x,y,\varepsilon)$在区域$\bar{\Omega}(-1+\delta\leqslant x\leqslant 1-\delta)$上连续可微，而在$\bar{\Omega}_+$和$\bar{\Omega}_-$上则分别是二阶连续可微的。

我们转而考虑摄动问题(1.1)～(1.2)解的存在性。

考虑如下的问题
$$\begin{cases}\Delta U=h(x,y,U) & ((x,y)\in\Omega)\\ U=0 & ((x,y)\in\partial\Omega)\end{cases}\tag{4.2}$$
其中$\Omega\subset R^2$是一个边界$\partial\Omega\in C^{(2+\alpha)}$的有界域，且设$h(x,y,U)$满足

i)　$h(x,y,U)$当$u\in R$固定时属于$C^{(\alpha)}(\bar{\Omega})$，

ii)　$\partial h/\partial U$连续且在D中$h/\partial U\geqslant l>0$成立。

我们需要用到如下的不动点原理。

定理1(Leray-Schauder)　设E是Banach空间，$U=T(U,k)$是泛函方程且$0\leqslant k\leqslant 1$。又设

i)　对于每一个k，算子$T(U,k)$是E上的全连续算子，在E的任一个有界集上，$T(U,k)$对k是一致连续的。

ii)　当$k=0$时，方程$U=T(U,0)$存在唯一的解，此外，算子$V=U-T(U,0)$为E上的一对一变换。

iii)　方程$U=T(U,k)$的所有可能的解在空间E上是一致有界的。　(4.3)

那么，方程$U=T(U,k)$对任何k都是有解的。

我们有如下的定理

定理2　设条件(4.3)中的i)～iii)成立，那么边值问题(4.2)存在唯一的解属于$C^{(2+\alpha)}(\bar{\Omega})$。

证明　我们首先考虑如下问题
$$\begin{cases}\Delta U=kh(x,y,U) & (\text{在}\Omega\text{内})\\ U|_{\partial\Omega}=0.\end{cases}\tag{4.4}$$
其中k是满足$0\leqslant k\leqslant 1$的参数。

令$E=C^{(\alpha)}(\bar{\Omega})$是Banach空间，其上的模记为$\|\cdot\|_\alpha$，那么，对任意的$V(x,y)\in E$，如下的边值问题
$$\begin{cases}\Delta U=kh(x,y,V) & (\text{在}\Omega\text{内})\\ U|_{\partial\Omega}=0\end{cases}\tag{4.5}$$
存在唯一的解$U_k(x,y)$属于$C^{(2+\alpha)}(\bar{\Omega})$，且如下的不等式成立

$$\|U\|_{2+\alpha}\leqslant ck\|h(x,y,V)\|_{\alpha} \tag{4.6}$$

其中$c>0$是不依赖于k和V的常数。

定义算子$T(V,k)$如下

$$\forall V(x,y)\in E, V(x,y)\to U_k=T(V,k).$$

令$S(V)=\{V(x,y)\mid V(x,y)\in E, \|V(x,y)\|_{\alpha}\leqslant M\}$及$\delta_k(U)=\{U(x,y)\mid U(x,y)\in C^{(2+\alpha)}(\bar{\Omega}), \exists V\in S(V)_3 U=T(V,k)\}$，那么从(4.6)式，$S(v)$是$E$中的有界集，而$S_k(u)$是$C^{(2+\alpha)}(\bar{\Omega})$中的有界集。

由于$C^{(2+\alpha)}(\bar{\Omega})$嵌入$C^{(1+\alpha)}(\bar{\Omega})$是全连续的，$C^{(1+\alpha)}(\bar{\Omega})$嵌入$C^{(\alpha)}(\bar{\Omega})$也是全连续的，故知$S_k(U)$是$C^{(\alpha)}(\bar{\Omega})$中的紧集，因此算子$T(V,k)$是全连续的。

设$U_1(x,y)=T(V,k_1)$及$U_2(x,y)=T(V,k_2)$，$V\in S(V)$，$0\leqslant k_1,k_2\leqslant 1$，则

$$\begin{cases}\Delta(U_1-U_2)=(k_1-k_2)h(x,y,V),\\ (U_1-U_2)\mid_{\partial\Omega}=0.\end{cases}$$

根据Schauder估计，有

$$\|U_1-U_2\|_{2+\alpha}\leqslant C|k_1-k_2|\,\|h(x,y,V)\|_{\alpha}.$$

其中$\|h(x,y,V)\|_{\alpha}$关于V是一致有界的，这明显地表明$T(V,k)$在$S(V)$中关于k是一致连续的。

我们现在考虑定理1的条件ii)，当$k=0$时，(4.4)变成

$$\begin{cases}\Delta U=0,\\ U\mid_{\partial\Omega}=0.\end{cases}$$

上述问题显然存在唯一解$U\equiv 0$，因此$V-T(V,0)$是一个单位算子，自然是一对一变换

验证定理2的条件iii)就是对边值问题(4.4)的所有可能的解做先验估计。

方程(4.4)的所有可能的解的最大模是一致有界的，即由极值原理可得$\|U_k\|_0\leqslant M_0$，M_0是一个不依赖于k的正数，其中$\|\cdot\|_0$表示$C(\bar{\Omega})$上的范数。

现在，我们估计U_k对自变量x和y的一级微商。注意到若U_k是(4.4)的一个解，则$U_k\in C^{(2+\alpha)}(\bar{\Omega})$，且$H(x,y)=h(x,y,U_k(x,y))\in C^{(\alpha)}(\bar{\Omega})$，那么进一步的由Green公式，有

$$U_k(X)=\int_{\Omega}\Gamma_1(X,Y)H(Y)dY+\int_{\Omega}\Gamma_2(X,Y)H(Y)dY \tag{4.7}$$

其中 $\Gamma_1(X,Y)=\frac{1}{2\pi}\ln|X-Y|$，$\Gamma_2(X,Y)=-\frac{1}{2\pi}\ln|Y|\,|X-\bar{Y}|$，$X$，$Y\in\Omega$，$H(Y)=h(Y,U_k(Y))$。

记 $D_1=\frac{\partial}{\partial x}$，$D_2=\frac{\partial}{\partial y}$，那么我们有

$$D_iU_k(X)=\int_{\Omega}D_i\Gamma_1(X,Y)H(Y)dY+\int_{\Omega}D_i\Gamma_2(X,Y)H(Y)dY=I_1+I_2 \tag{4.8}$$

由于U_k一致有界，故存在正数M_1，使得如下关于$H(X)$的估计成立

$$\|H(X)\|_0=\|h(X,U_k(X))\|_0\leqslant M_1 \tag{4.9}$$

上式对k一致，$0\leqslant k\leqslant 1$。

我们首先看出 $|I_1|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{\Omega}|D_i\ln|X-Y||\,|H(Y)|dY$

$$\leqslant\frac{M_1}{2\pi}\int_{\Omega}|D_i\ln|X-Y||dY.$$

设ε_0是一个正数，$\Omega_{\varepsilon_0}=\{Y\,|\,|Y-X|<\varepsilon_0\}$，$X=(x_1,x_2)$，$Y=(y_1,y_2)$，则利用下列不等式

$$D_i\ln|X-Y|=\frac{x_i-y_i}{|X-Y|^2} \tag{4.10}$$

我们得到
$$|\mathrm{I}_1|\leqslant\frac{M_1}{2\pi}\int_{\Omega-\Omega_{\varepsilon_0}}\frac{|x_i-y_i|}{|X-Y|^2}dY+\frac{M_1}{2\pi}\int_{\Omega_{\varepsilon_0}}\frac{|x_i-y_i|}{|X-Y|^2}dY$$
$$=\mathrm{I}+\mathrm{II}.$$

当$Y\in\Omega-\Omega_{\varepsilon_0}$，$|X-Y|^2\geqslant\varepsilon_0^2$，故

$$\mathrm{I}\leqslant\frac{M_1}{2\pi\varepsilon_0^2}\int_{\Omega-\Omega_{\varepsilon_0}}|x_i-y_i|dY\leqslant\frac{M_1}{2\pi\varepsilon_0^2}\int_{\Omega}\rho dY=\frac{M_1}{3\varepsilon_0^2} \tag{4.11}$$

令$y_1=\rho\cos\theta+x_1$，$y_2=\rho\sin\theta+x_2$，立即可推出

$$\mathrm{II}\leqslant\frac{M_1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\varepsilon_0}d\rho=\varepsilon_0M_1 \tag{4.12}$$

故
$$|\mathrm{I}_1|\leqslant M_1\left(\varepsilon_0+\frac{1}{3\varepsilon_0^2}\right) \tag{4.13}$$

同理，可以对(4.8)式中的I_2进行类似的估计。

根据定理1，边值问题(4.4)对所有的$k(0\leqslant k\leqslant1)$均有解。特别地，对$k=1$，我们记这个解为$U(X)$，则$U(X)\in E$，由Schander估计可知$U(X)\in C^{(2+\alpha)}(\bar{\Omega})$。关于解的唯一性则是极值原理的简单推论，定理3证毕。

定理2说明了摄动问题(1.1)～(1.2)存在唯一的解$U_\varepsilon(X)\in C^{(2+\alpha)}(\bar{\Omega})$。

置$Z_m(x,y)=U_\varepsilon(x,y)-P_m(x,y)$，我们要证明当$\varepsilon$趋于零时，$Z_m(x,y)$是$O(\varepsilon^{m+\frac{1}{2}})$，即

$$\|Z_m(x,y)\|_0=O(\varepsilon^{m+\frac{1}{2}})\qquad(\varepsilon\to0) \tag{4.14}$$

定义 设对于边值问题

$$\begin{cases}\Delta U=h(x,y,U) & ((x,y)\in\Omega)\\ U=\varphi(x,y) & ((x,y)\in\partial\Omega)\end{cases} \tag{4.15}$$

存在函数$\alpha(x,y)$，$\beta(x,y)\in C^{(1)}(\bar{\Omega})$，并且它们满足如下的不等式

$$\Delta_-\alpha(x,y)=\lim_{T\to0}\left[\inf\frac{\frac{\partial\alpha(x+T,y)}{\partial x}+\frac{\partial\alpha(x-T,y)}{\partial x}}{2T}+\inf\frac{\frac{\partial\alpha(x,y+T)}{\partial y}-\frac{\partial\alpha(x,y-T)}{\partial y}}{2T}\right]\geqslant h(x,y,\alpha(x,y))$$
$$(x,y)\in\Omega \tag{4.16}$$

$$\Delta_+\beta(x,y)=\lim_{T\to0}\left[\sup\frac{\frac{\partial\beta(x+T,y)}{\partial x}-\frac{\partial\beta(x-T,y)}{\partial x}}{2T}+\sup\frac{\frac{\partial\beta(x,y+T)}{\partial y}-\frac{\partial\beta(x,y-T)}{\partial y}}{2T}\right]\leqslant h(x,y,\beta(x,y))$$
$$(x,y)\in\Omega \tag{4.17}$$

而在Ω上，$\alpha(x,y)\leqslant\varphi(x,y)\leqslant\beta(x,y)$，则分别称$\alpha(x,y)$和$\beta(x,y)$为边值问题(4.15) 的下解和上解。

对于摄动问题(1.1)～(1.2)，我们定义

$$\beta(x,y,\varepsilon)=P_m(x,y,\varepsilon)+c\varepsilon^{m+\frac{1}{2}} \tag{4.18}$$

其中c为常数，将在下文中确定。

因为$P_m(x,y,\varepsilon)$分别在$\bar\Omega_+$和$\bar\Omega_-$上二阶连续可导，故在Ω_+或Ω_-上，$\varepsilon\Delta_+=\varepsilon\Delta$，不等式(4.17)变成

$$\varepsilon\Delta\beta-h(x,y,\beta(x,y))\leqslant0 \tag{4.19}$$

由(4.1)式及简单的计算可推得(4.18)式所定义的函数$\beta(x,y,\varepsilon)$当$-1+\delta\leqslant x\leqslant 1-\delta$时分别在$\Omega_+$和$\Omega_-$上满足不等式(4.19)。

而在Γ上，我们注意到$P_m(x,y,\varepsilon)$属于$C^{(2)}(\bar\Omega_+)$及$C^{(2)}(\bar\Omega_-)$，故有

$$\Delta_+P_m(x,y,\varepsilon)=\frac{1}{2}[\Delta\bar P_m+\Delta\bar{\bar P}_m] \tag{4.20}$$

又由于$P_m\in C^{(1)}(\bar\Omega)$，故由(4.20)，有

$$\begin{aligned}&\varepsilon\Delta_+\beta(x,0,\varepsilon)-h(x,0,\beta(x,0,\varepsilon))\\&=\frac{1}{2}[\varepsilon\Delta\bar P_m(x,0,\varepsilon)-h(x,0,\bar P_m(x,0,\varepsilon)+c\varepsilon^{m+\frac{1}{2}})]\\&\quad+\frac{1}{2}[\varepsilon\Delta\bar{\bar P}_m(x,0,\varepsilon)-h(x,0,\bar{\bar P}_m(x,0,\varepsilon)+c\varepsilon^{m+\frac{1}{2}})]=\mathrm{I}+\mathrm{II}\end{aligned} \tag{4.21}$$

这里，我们正是利用了函数P_m的性质，在Γ的附近，用Laplace算子Δ来表示算子Δ_+。因此，容易证明，只要常数c取得充分大，(4.21) 中的$\mathrm{I}\leqslant0$及$\mathrm{II}\leqslant0$。同样的计算可推得不等式(4.16)当$-1+\delta\leqslant x\leqslant 1-\delta$时成立，其中以$\alpha(x,y,\varepsilon)$代替上述的$\beta(x,y,\varepsilon)$，定义为

$$\alpha(x,y,\varepsilon)=P_m(x,y,\varepsilon)-c\varepsilon^{m+\frac{1}{2}} \tag{4.22}$$

其中c取得充分大。

引理2 (1.1)～(1.2)的解关于ε是一致有界的。

证明 利用极值原理，我们知道，存在常数m和M，使得$m\leqslant U_\varepsilon(x,y)\leqslant M$。进一步的讨论可得

及
$$m=\min\{\min_{(x,y)\in\Omega}\{U_0(x,y)\},\min_{(x,y)\in\partial\Omega}\{\varphi(x,y)\}\}$$

$$M=\max\{\max_{(x,y)\in\Omega}\{U_0(x,y)\},\max_{(x,y)\in\partial\Omega}\{\varphi(x,y)\}\}.$$

显然，m和M均与ε无关，这证明了引理。

取常数N充分大使得$N\geqslant\max\{|m|,|M|\}$以及

$$|U_\varepsilon(-1+\delta,y)|\leqslant N\qquad(-1+\delta,y)\in\bar\Omega \tag{4.23}$$

$$|U_\varepsilon(1-\delta,y)|\leqslant N\qquad(1-\delta,y)\in\bar\Omega \tag{4.24}$$

然后定义如下的函数$F(x,\varepsilon)$

$$F(x,\varepsilon)=2N\Big(\exp\Big[\sqrt{\frac{l}{\varepsilon}}(-1+\delta-x)\Big]+\exp\Big[-\sqrt{\frac{l}{\varepsilon}}(1-\delta-x)\Big]\Big),$$

那么它有如下的性质

引理3 i) $F(x,\varepsilon)>0$，$-1+\delta\leqslant x\leqslant1-\delta$；

ii) $F(x,\varepsilon)$ 满足微分方程 $\varepsilon\dfrac{d^2F}{dx^2}-l\cdot F=0$；

iii) $F(x,\varepsilon)=O(\varepsilon^n)$，$\varepsilon\to 0$，$-1+2\delta\leqslant x\leqslant 1-2\delta$，其中$n$是一个任意的正数。

又令

$$\bar{\beta}(x,y,\varepsilon)=\beta(x,y,\varepsilon)+F(x,\varepsilon) \tag{4.25}$$

$$\bar{\alpha}(x,y,\varepsilon)=\alpha(x,y,\varepsilon)-F(x,\varepsilon) \tag{4.26}$$

则由(4.16)式，当$-1+\delta\leqslant x\leqslant 1-\delta$时，我们有

$$\varepsilon\Delta_+\bar{\beta}-h(x,y,\bar{\beta})\leqslant\varepsilon\frac{d^2F}{dx^2}-h_u(x,y,\beta+\theta F)F$$

$$\leqslant\varepsilon\frac{d^2F}{dx^2}-lF=0 \qquad (0<\theta<1) \tag{4.27}$$

以及
$$\varepsilon\Delta_-\bar{\alpha}(x,y,\varepsilon)-h(x,y,\bar{\alpha}(x,y,\varepsilon))\geqslant 0 \tag{4.28}$$

而在$\partial\Omega_t(-1+\delta\leqslant x\leqslant 1-\delta)$上，有

$$\bar{\beta}(x,y,\varepsilon)=P_m+c\varepsilon^{m+\frac{1}{2}}+F(x,\varepsilon)>\varphi(x,y)=U_0(x,y) \tag{4.29}$$

及
$$\bar{\alpha}(x,y,\varepsilon)=P_m-c\varepsilon^{m+\frac{1}{2}}-F(x,\varepsilon)<\varphi(x,y)=U_0(x,y) \tag{4.30}$$

另外，在$x=-1+\delta$时，

$$\bar{\beta}(x,y,\varepsilon)\geqslant N\geqslant U_0(x,y) \tag{4.31}$$

且
$$\bar{\alpha}(x,y,\varepsilon)\leqslant -N\leqslant U_0(x,y) \tag{4.32}$$

当ε充分小时，不等式(4.31)，(4.32)对$x=1-\delta$照样是成立的。

综上所述，根据上、下解的定义，我们已证明了如下的

引理4 由(4.25)，(4.26)式所定义的$\bar{\beta}(x,y,\varepsilon)$和$\bar{\alpha}(x,y,\varepsilon)$，当$-1+\delta\leqslant x\leqslant 1-\delta$时，是摄动问题(1.1)～(1.2)在区域$D$上的上解和下解。

我们还需要如下的结果

引理5 如果边值问题

$$\begin{cases}\Delta U=h(x,y,u) & (\text{在}\Omega\text{内})\\ U=\varphi(x,y), & (\text{在}\partial\Omega\text{上})\end{cases}$$

存在相应下解$\alpha(x,y)$和上解$\beta(x,y)$，则边值问题的任一解$U(x,y)$满足不等式

$$\alpha(x,y)\leqslant U(x,y)\leqslant\beta(x,y) \qquad (x,y)\in\bar{\Omega}$$

证明 我们只要证明$U(x,y)\leqslant\beta(x,y)$，若不然，$U(x,y)-\beta(x,y)$在$\Omega$内的某一点取得正的极大值，设此点为$(x_0,y_0)$，那么在$(x_0,y_0)$处，有$\Delta_-(U(x,y)-\beta(x,y))\leqslant 0$，但另一方面

$$\begin{aligned}\Delta_-(U-\beta)&=\Delta U(x_0,y_0)-\Delta_+\beta(x_0,y_0)\\&\geqslant h(x_0,y_0,U(x_0,y_0))-h(x_0,y_0,\beta(x_0,y_0))\\&=h_u(x_0,y_0,\xi)\cdot[U(x_0,y_0)-\beta(x_0,y_0)]\geqslant l\cdot[U-\beta]>0,\end{aligned}$$

矛盾，引理得证。

根据引理5，存在一个充分小的正数ε_0，当$0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$，$-1+\delta\leqslant x\leqslant 1-\delta$时，有

$$\bar{\alpha}(x,y,\varepsilon)\leqslant U_0(x,y)\leqslant\bar{\beta}(x,y,\varepsilon),$$

或
$$|Z_m(x,y,\varepsilon)|=|U_0(x,y)-P_m(x,y,\varepsilon)|\leqslant F(x,\varepsilon)+c\varepsilon^{m+\frac{1}{2}}.$$

但当$-1+2\delta\leqslant x\leqslant 1-2\delta$时，$F(x,\varepsilon)$为$O(\varepsilon^{m+\frac{1}{2}})$，故

$$\|Z_m(x,y,\varepsilon)\|_0=O(\varepsilon^{m+1/2})\qquad ((x,y)\in\bar{\Omega},\ -1+2\delta\leqslant x\leqslant 1-2\delta)\tag{4.33}$$

定理3 如果条件(1.3)，(1.4)满足，那么当$0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$时，摄动问题(1.1)～(1.2)存在唯一解$U_\varepsilon(x,y)\in C^{(2+\alpha)}(\bar{\Omega})$，并且关于余项$Z_m(x,y,z)$的估计式(4.33)成立。

参考文献

[1] 江福汝，关于常微分方程的转点问题，全国第二届近代数学和力学会议文集，上海 (1987)。

[2] Howes, F. A., Boundary-interior layer interactions in nonlinear singular perturbation theory, *Amer. Math. Soc. Memoirs*, **203** (1978).

[3] Howes, F. A., Differential inequalities of higher order and the asymptotic solution of nonlinear boundary value problems, *SIAM. J. Math. Anul.*, **13**(1), (1982).

[4] Chang, K. W. and F. A. Howes, Nonlinear perturbation phenomena: Theory and application, *Appl. Math. Sci.*, Springer-Verlag, New York Inc., **56** (1984).

[5] Howes, F. A., Some singularly perturbed superquadratic boundary value problems whose solutions exhibit boundary and shock layer behavior, *Nonlinear Analysis*, **4** (1980), 683—698.

[6] Dejager, E. M., Singular elliptic perturbations of vanishing first-order differential operators, Springer-Verlag, *Lecture Notes in Math.*, 280 (1972), 73—86.

[7] Howes, F.A., Singularly perturbed semilinear elliptic boundary value problems, *Partial Differential Equations*, **4**(1) (1979), 1—39.

Singularly Perturbed Semilinear Elliptic Equation with Boundary-Interior Layer Interaction

Zhou Zhe-yan

(Department of Mathematics, Fujian Normal Univ., Fuzhou)

Abstract

In this paper, we consider the phenomenon of boundary-interior layer interaction for a class of semilinear elliptic equation. Under some appropriate conditions, we get the existence of the exact solution for the problem and its uniformly valid expansions.

Key words boundary layer, interior layer, semilinear elliptic equation