

保守双摆的不可积性和混沌*

凌复华 徐如进

(上海交通大学工程力学系, 1991年3月4日收到)

摘 要

本文用Birkhoff级数正则变换方法求出保守双摆运动方程的近似积分, 并把近似积分的等值曲线与数值仿真结果作了比较, 由此清楚地看出, 当能级提高时, 系统由近可积的成为不可积的, 即其运动情况由规则的转变为混沌的。本文还介绍了演示上述性态的一个保守双摆模型。

关键词 保守双摆 不可积性 混沌 正则变换 数值仿真 Birkhoff级数

一、引 言

近年来对混沌性态的研究有很大的兴趣。除了映射系统外, 目前的研究工作主要集中在简单的常微分方程系统。可能表现混沌性态的常微分方程系统至少是三维的, 实际研究的几乎只是以下三种模型。前两种是耗散系统, 其一是三维自治系统, 以Lorenz方程为代表, 它是Benard流的一种极度简化的描述, 另一是单自由度强迫振子, 以Duffing方程为代表。第三种是二自由度保守系统(它的Hamilton函数与时间无关的系统), 以Henon-Heiles系统为代表, 它描述了小范围内呈圆形、大范围内呈三角形的势阱中粒子的运动。

对于Hamilton系统的研究已有很长历史。人们本来希望找到其运动方程的积分, 用分析形式给出运动轨道。但长期的努力归于无效, 人们终于逐渐认识到, 可积系统只有很少的几种, 例如单自由系统、线性系统等, 绝大部分Hamilton系统都是不可积的。不可积系统中的运动状态究竟有什么规律, 一直是一个困扰人的问题。本世纪六十年代, 证明了有重大意义的KAM定理。该定理指出, 在非共振条件下, 若可积系统受到小摄动, 则其中的大部分规则轨线仍然保持, 极少部分成为混乱的。摄动较大时以上局面不再保持, 大部分轨线混乱不堪。七十年代末期, 对混沌的研究兴趣日浓, 现在一般认为, 不可积系统中出现的混乱运动状态便是一种混沌状态。

为了判别一个Hamilton系统是否可积, 往往采用通过变量的正则变换寻找积分的方法。这种正则变换式常称为Birkhoff级数, 若这个级数在某一项趋于无限, 那么或者该系统确实不可积, 或者需要寻求另一形式的级数。但如果得到了无限项级数, 那么就可以根据这个级数是否收敛来判断系统是否可积。实际上当然无法求出级数的无限项, 人们往往就取有限项级数来作为系统的近似积分。

Henon-Heiles系统的数值计算结果是1964年给出的^[1], 两年后, Gustavson构造

* 朱照宣推荐, 国家教委博士点科研基金资助项目。

了求Hamilton系统积分的一种Birkhoff级数方法的算法,对Henon-Heiles系统进行了实际计算,并把所得到的等值曲线与数值仿真结果作了比较.由这一比较明显地看出,当能级较低时,运动是规则的,有限项Birkhoff级数近似给出合理的结果,而当能级较高时,运动是混乱的,这一近似不再适用.

在对Hamilton系统的混沌研究中, Henon-Heiles 系统这个例子被广泛地引用,几乎可说它是唯一的例子.这个例子虽然很清晰地说明了从近可积系统的规则状态向不可积系统的混沌性态的转变,但力学家和工程师对之总还有点不满足,因为这个例子的力学背景不甚明显,也无法用一个简单的力学系统来演示.本文的目的是对保守双摆这个典型的力学模型进行研究,演示其中的规则性态和混沌性态.我们将先回顾如何通过正则变换求积分,然后叙述一些数值计算的技巧,再给出用这些方法对保守双摆得到的结果,最后说明我们制作的一个保守双摆模型及观察到一些现象.

二、通过Birkhoff级数形式的正则变换求积分

本节的内容主要根据文献[2].考虑Hamilton函数

$$H(p, q) = H^{(2)}(p, q) + H^{(3)}(p, q) + \dots + H^{(s)}(p, q) + \dots \quad (2.1)$$

其中 $H^{(s)}(p, q)$ 是 s 次齐次式

$$H^{(s)}(p, q) = \sum_{|i|+|j|=s} a_{ij} p^i q^j \quad (2.2)$$

设 H 在 $p=0, q=0$ 的领域中收敛.

对于力学系统, $H^{(2)}(p, q)$ 是一个正定二次型,容易通过特征值和特征向量分析把它变换成正则形式

$$H^{(2)}(x, y) = \sum_{i=1}^n \frac{\omega_i}{2} (x_i^2 + y_i^2) \quad (\omega_i > 0) \quad (2.3)$$

当且仅当成立 r 个线性独立关系式

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} \omega_i = 0 \quad (j=1, \dots, r) \quad (2.4)$$

时,称系统有 r 重共振.这种系统有 $(n-1)$ 个积分. $r=0$ 对应于非共振情况,亦即可积情况.

本节的主要目的就是要求出这种积分的一个近似表达式.其依据是:

定义1 称Hamilton函数 $H(x, y)$ 为正则形式,若其中 $H^{(2)}(x, y)$ 有 (2.3) 的形式,且 $DH(x, y) = 0$, 这里

$$D = \sum_{i=1}^n \omega_i \left(x_i \frac{\partial}{\partial y_i} - y_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \quad (2.5)$$

定理1 设Hamilton函数 $H(x, y)$ 中的 $H^{(2)}(x, y)$ 有 (2.3) 的形式,则存在一个形式为

$$x = \xi + \phi(\xi, \eta), \quad y = \eta + \psi(\xi, \eta) \quad (2.6)$$

的正则变换,它把 $H(x, y)$ 变换成正则形式 $N(\xi, \eta)$.

定理2 设Hamilton系统为 r 重共振的,即 (2.4) 成立,且对 $\Omega_i (i=1, \dots, n)$ 成立有

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} \Omega_i = 0 \quad (j=1, \dots, r) \quad (2.7)$$

则 $(n-r)$ 个积分为

$$I(x, y) = \sum_{i=1}^n \frac{\Omega_i}{2} (x_i^2 + y_i^2) + \dots \quad (2.8)$$

事实上, 对于正则形式 $N(\xi, \eta)$,

$$I^{(2)}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \frac{\Omega_i}{2} (\xi_i^2 + \eta_i^2) \quad (2.9)$$

就是这样的一个积分。

于是求这种积分的变换过程分为两步, 第一步是逐步把 Hamilton 函数化为越来越接近正则形式, 即使越来越多的较低阶项满足 $DH^{(s)}(x, y) = 0$ 的条件。引入第二类母函数 $W^{(s)}(x, \eta)$, 使得

$$\xi = x + \frac{\partial W^{(s)}(x, \eta)}{\partial \eta}, \quad y = \eta + \frac{\partial W^{(s)}(x, \eta)}{\partial x} \quad (2.10)$$

于是定理 1 中所述的变换成为

$$H\left(x, \eta + \frac{\partial W^{(s)}}{\partial x}\right) = N\left(x + \frac{\partial W^{(s)}}{\partial \eta}, \eta\right) \quad (2.11)$$

把(2.11)的两边写成 x 和 η 的级数展开形式, 比较同类项的系数后得到

$$N^{(l)}(x, \eta) = H^{(l)}(x, \eta) + \left(\sum_j \frac{1}{j!} \left[\left(\frac{\partial W^{(s)}}{\partial x} \right)^j \left(\frac{\partial^{l+j} H^{(l)}}{\partial \eta^{l+j}} \right) - \left(\frac{\partial W^{(s)}}{\partial \eta} \right)^j \left(\frac{\partial^{l+j} N^{(l)}}{\partial x^{l+j}} \right) \right] \right) \\ (1 \leq |j| \leq l < i, \quad l - |j| + |j|(s-1) = i, \quad l \geq 2, s \geq 3, i = 2, 3, \dots) \quad (2.12)$$

实际上, 当 $i < s$ 时, (2.12) 可以简化为

$$N^{(i)}(x, \eta) = H^{(i)}(x, \eta) \quad (2.13)$$

表明低阶项在进一步变换中不受影响。当 $i = s$ 时, (2.12) 可以简化为

$$DW^{(s)}(x, \eta) = N^{(s)}(x, \eta) - H^{(s)}(x, \eta) \quad (2.14)$$

这是确定第二类母函数 $W^{(s)}$ 的方程, 由此定出的 $W^{(s)}$ 即可用于(2.12)对高阶项进行变换。这种变换过程可以示意地用图 1 表示。

$$\begin{array}{ccccccc} H(x, y) & = & H_0^{(2)} & + & H_0^{(3)} & + & H_0^{(4)} & + & \dots & + & H_0^{(s-1)} & + & H_0^{(s)} & + & H_0^{(s+1)} & + & \dots \\ & & \parallel & & \downarrow W^{(2)} & \downarrow W^{(3)} & & \downarrow W^{(3)} & \downarrow W^{(3)} & \downarrow W^{(3)} & & \downarrow W^{(3)} & \downarrow W^{(3)} & \downarrow W^{(3)} & & & & \\ N^{(2)} & + & N^{(3)} & + & H_1^{(4)} & + & \dots & + & H_1^{(s-1)} & + & H_1^{(s)} & + & H_1^{(s+1)} & + & \dots & & & \\ & & & & \downarrow W^{(4)} & & \downarrow W^{(4)} & \downarrow W^{(4)} & \downarrow W^{(4)} & \downarrow W^{(4)} & & \dots & \dots & \dots & & & & \\ & & & & & & \dots & \dots & \dots & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \downarrow W^{(s-1)} & \downarrow W^{(s-1)} & \downarrow W^{(s-1)} & & & & & & & \\ N^{(3)} & + & N^{(3)} & + & N^{(4)} & + & \dots & + & N^{(s-1)} & + & H_{(s-3)}^{(4)} & + & H_{(s-3)}^{(s+1)} & + & \dots & & & \\ & & & & & & & & \downarrow W^{(s)} & \downarrow W^{(s)} & & & & & & & & \\ N^{(2)} & + & N^{(3)} & + & N^{(4)} & + & \dots & + & N^{(s-1)} & + & N^{(s)} & + & H_{(s-3)}^{(s+1)} & + & \dots & & & \\ & & & & & & & & & & \downarrow W^{(s+1)} & & & & & & & \\ N(\xi, \eta) & = & N^{(2)} & + & N^{(3)} & + & N^{(4)} & + & \dots & + & N^{(s-1)} & + & N^{(s)} & + & N^{(s+1)} & + & \dots \end{array}$$

图1 把Hamilton函数 W 化为正则形式

第二步是由“正则” (ξ, η) 坐标系逐步变换回原来的 (x, y) 坐标系, 即对一系列形式为(2.10)的方程求逆变换。最终得到原坐标系中积分的近似表达式。

求出这些积分后, 就可以描绘它的等值线。以二自由度系统为例, 考虑 $y_1 = 0$ 的截面, 即根据给定的能量值 E 和积分值 J , 由

$$H(y_2, x_1, x_2) = E, \quad I(y_2, x_1, x_2) = J \quad (2.15)$$

对一系列的 x_1 值求出相应的 x_2, y_2 值,并在 (x_2, y_2) 平面中画出这些等值线。下节将略述计算这些等值线的技巧。

三、数值计算技巧

我们编制了用上节的方法求二自由度Hamilton系统运动方程的积分的程序。除此之外,本文的数值工作主要有两部分,一是计算积分的等值曲线,二是用直接数值积分法对运动方程进行数值仿真。本节略述若干值得一提的有关技巧。

积分的等值曲线是由非线性方程组(2.15)计算的。等值曲线的形状是迂迴曲折的,也就是这个方程组通常是多解的。为了求出这些解,最好的方法是在计算时跟踪这些曲线。我们用拟Newton法(BFGS法)解方程组(2.15),以便在不太好的初始猜测下也能收敛到正确的结果。但良好的初始猜测对节约计算时间和避免发散性具有决定性的意义,我们采用的主要技巧有(详见[3])

1. 自适应最优多项式插值

由已经求得的等值曲线上的 n 个点,可以用 n 阶以下的Lagrange多项式插值推测第 $n+1$ 点的位置。究竟采用哪一阶多项式,则通过比较若干个不同阶次的多项式对于已求得的第 n 点的外推效果的好坏来确定。

2. 适当变换自变量

设平面上的等值曲线由关系式 $y=f(x)$ 描写,当 $|\Delta x| \ll |\Delta y|$ 时,曲线十分陡峭,显然取 y 为自变量而计算 x 是方便的,反之应取 x 为自变量。在计算过程中需适当变换自变量,这样能顺利地计算转圈的封闭曲线。

3. 步长的调节

当等值曲线较平坦,即曲率较小时,自变量的步长可以取得较大,反之应当取得较小。一般可以按拟Newton法需迭代多少次收敛来确定是否需要调整步长。

进行数值仿真时,我们应用的是自动调节步长Runge-Kutta-Fehlberg方法(例如见[4]),但辛积分方法可能更好一些,例如参看[6]。对 n 自由度的Hamilton系统,我们有 $2n$ 个一阶常微分方程,但独立的变量只有 $2n-1$ 个,我们需时时根据Hamilton函数取常值的条件加以校验。此外,我们需要的是轨线与相空间中某一个截面(例如 $y_1=0$)的交点,但在实际积分过程中只能得到 $y_1(t_1)<0$ 和 $y_1(t_{i+1})>0$ 。为了确定对应于 $y_1(t^*)=0$ 的 t^* ,可采用Henon的方法^[6],即把方程改写为以 y_1 为自变量,以 $t_{i+1}(y_1)$ 为初始条件反向积分求出 $t^*(0)$,即对应于 $y_1=0$ 的 t^* 。

四、对保守双摆的结果

保守双摆(图2)的Hamilton函数为

$$H = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2 \dot{x}_1^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{x}_1 \dot{x}_2 \cos(x_2 - x_1) + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{x}_2^2 + m_1 g l_1 (1 - \cos x_1) + m_2 g [l_1 (1 - \cos x_1) + l_2 (1 - \cos x_2)] \quad (4.1)$$

其中 g 为重力加速度, 其他文字的意义见图2.

取 $m_1 = 3m_2$, $l_1 = l_2/2$, (4.1) 成为

$$H = \frac{1}{2} [\dot{x}_1^2 + \cos(x_2 - x_1) \dot{x}_1 \dot{x}_2 + \dot{x}_2^2] + 2\omega_0^2(1 - \cos x_1) + \omega_0^2(1 - \cos x_2) \quad (4.2)$$

其中 $\omega_0^2 = g/(2l_1)$. 把(4.2)中的三角函数展开成 Taylor 级数得到

$$H = \frac{1}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_1 \dot{x}_2 + \dot{x}_2^2) + \frac{1}{2} \omega_0^2 (2x_1^2 + x_2^2) - \frac{1}{4} (x_2 - x_1)^2 \dot{x}_1 \dot{x}_2 - \frac{1}{24} \omega_0^2 (2x_1^4 + x_2^4) + \dots \quad (4.3)$$

首先需把 $H^{(2)}$ 化为正则形式. 对应的线性化系统的固有频率是

$$\omega_{1,2} = 2(1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}) \omega_0 \quad (4.4)$$

其特征向量构成模态矩阵

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\sqrt{\frac{2}{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

作变换

$$x = A\bar{x} \quad (4.6)$$

就可以把(4.3)变换为

$$H = \frac{1}{2} (\dot{\bar{x}}_1^2 + \dot{\bar{x}}_2^2)^2 + \frac{1}{2} (\omega_1^2 \bar{x}_1^2 + \omega_2^2 \bar{x}_2^2) + H^{(4)} + \dots \quad (4.7)$$

而后就可以按第二节所述的方法把它的低阶项(本例直到8阶项)逐步化成正则形式. 再作出近似积分的等值曲线. 并与数值仿真的结果作比较.

图3至图6给出了六组计算结果的比较. 由图3和图4可以看出, 当系统处于较低能级时, 系统是近可积的, 所求得近似积分的等值曲线与数值仿真结果十分接近, 具有大量代表拟周期解的封闭曲线, 其内部则有代表周期解的离散点. 而由图5和图6可以看出, 当系统处于较高能级时, 系统是不可积的, 近似积分的等值曲线与数值仿真结果只有很少共同之处, 数值仿真中貌似随机分布的各点, 显示系统的运动状态是混沌的. 其中能级稍低的情况包含着少量代表拟周期解的封闭曲线和代替周期解的离散点.

五、演示模型

为了演示保守双摆中的规则运动和混沌运动性态, 我们参考国外资料制造了一个保守双摆演示模型如图7. 两个摆的转轴上都装有滚珠轴承, 它们的摆动都十分灵活. 由于空气阻力和轴承中的摩擦阻尼, 这个双摆当然不是真正的保守系统, 但因其能量耗散甚为缓慢, 却可以在相当长的观察时间内表现保守系统的典型性态. 当初始摆角和初始角速度都较小时, 圆盘形的主摆以及副摆都表现规则的运动性态. 否则将观察到混沌性态. 最方便的是让主摆有较大的初始偏离, 而后副摆就明显地表现混沌性态, 例如它会向左转三圈, 然后向右转五

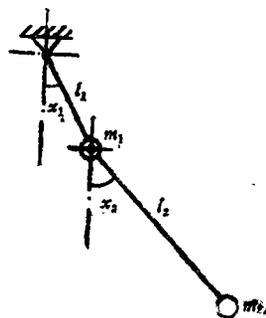


图2 保守双摆

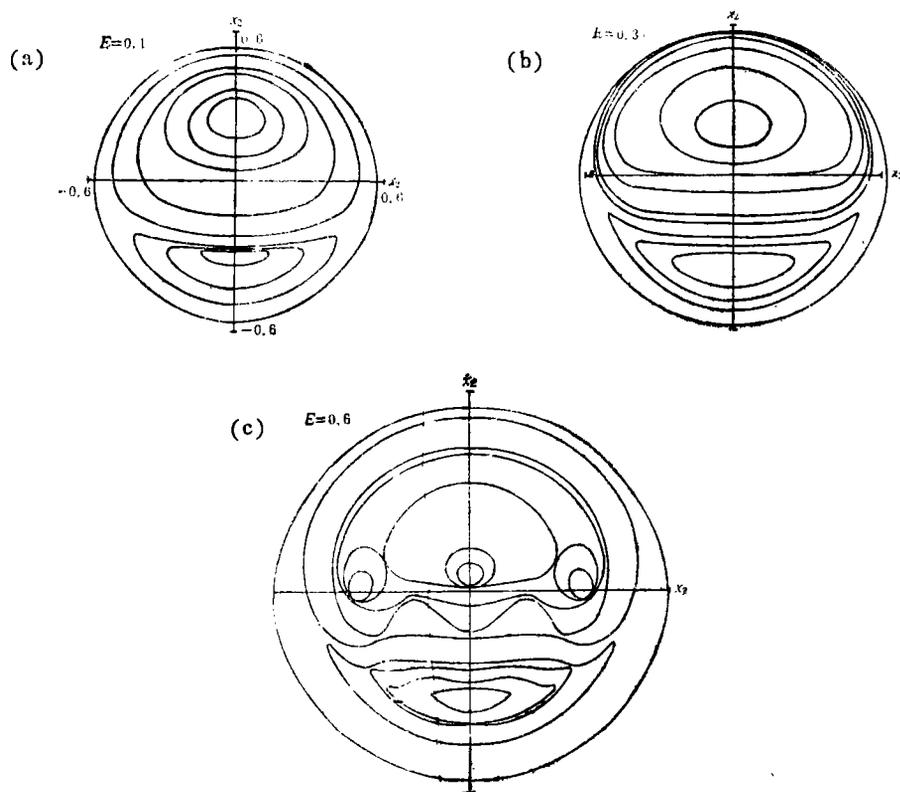


图3 保守双摆低能级情况的近似积分 ($E=0.1, 0.3, 0.6$)

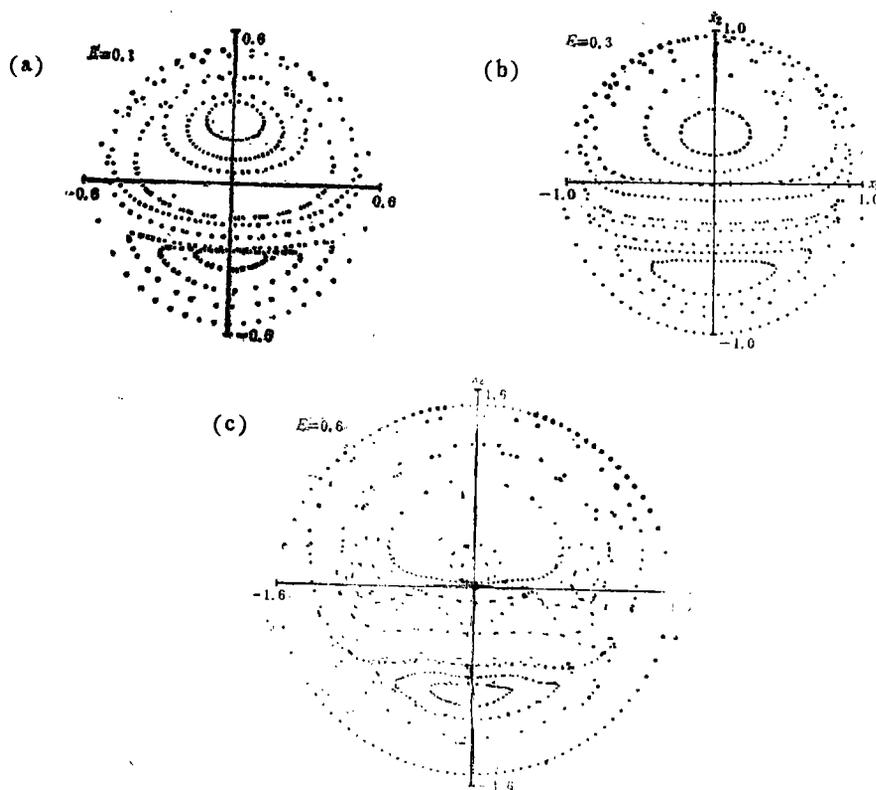


图4 保守双摆低能级情况的数值仿真 ($E=0.1, 0.3, 0.6$)

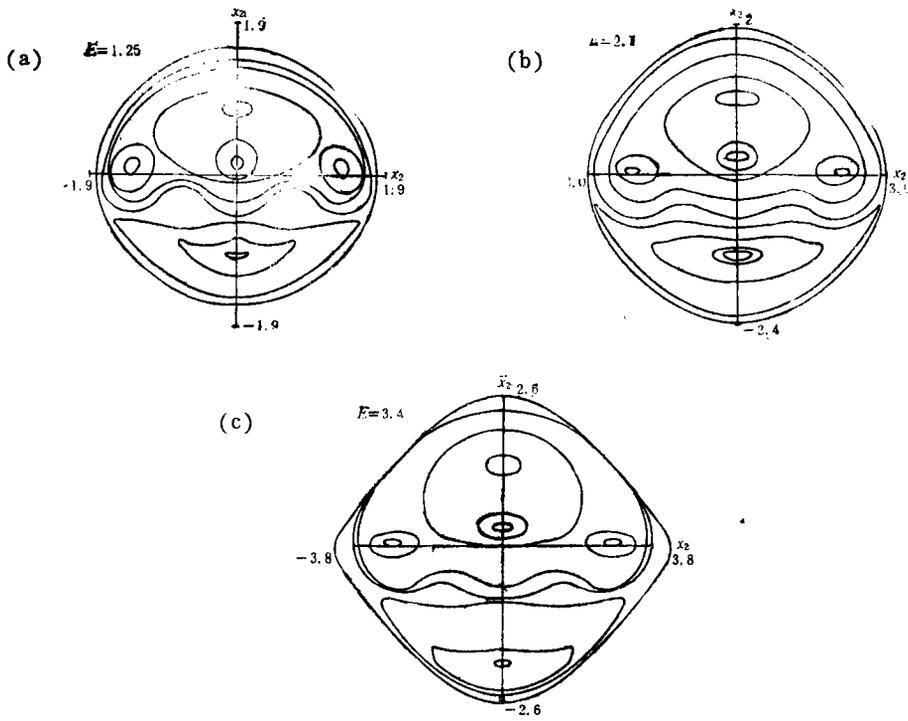


图5 保守双摆高能级情况的近似积分 ($E=1.25, 2.7, 3.4$)

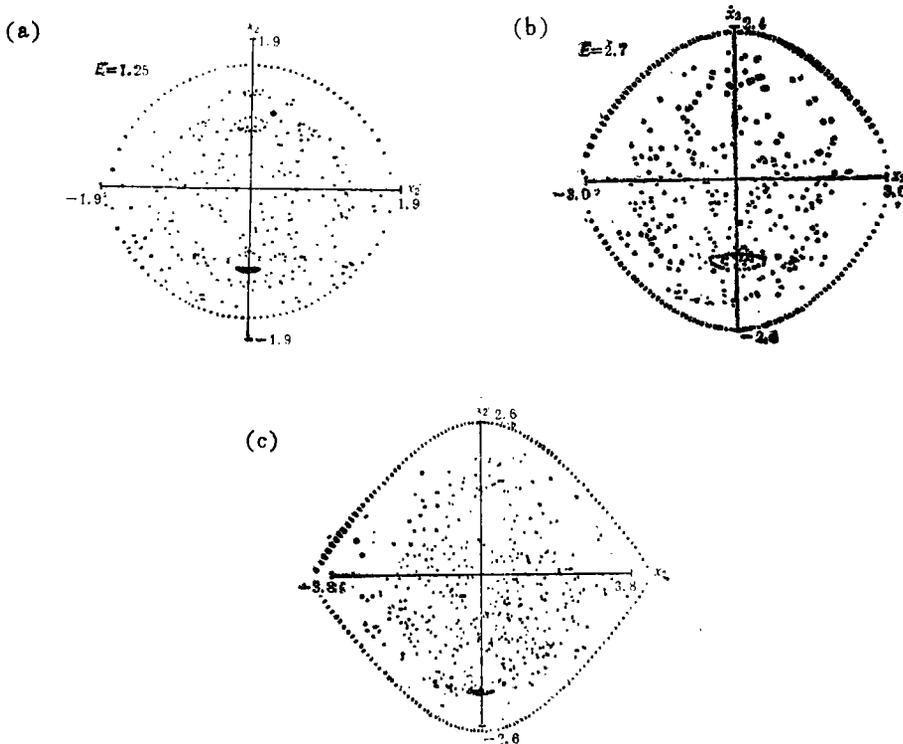
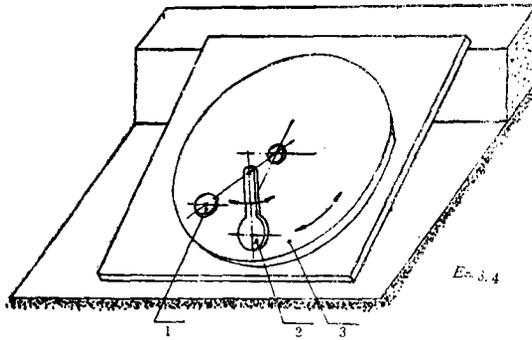


图6 保守双摆高能级情况的数值仿真 ($E=1.25, 2.7, 3.4$)



1——副摆, 2——主摆配重, 3——主摆

图7 双摆模型

圈,接着在中间摆动几次,再向左转两圈等等。当然,这个模型只能用作演示,但可以在此基础上改进以便进行记录并作进一步的分析。

联邦德国斯图加特大学力学研究所的W. O. Schiehlen 教授和E. Kreuyer 教授提供了有关双摆模型的一些资料,本系杨长俊、周镒如和何治奇同志曾在模型制作等方面提供过一些帮助,在此一并致谢。

参 考 文 献

- [1] Hénon, M. and C. Héiles, The applicability of the third integral of the motion, some numerical experiment, *Astron. J.*, 69 (1964), 73-79.
- [2] Gustavson, F., On constructing formal integrals of a Hamiltonian system near an equilibrium point, *Astron. J.*, 71 (1966), 670-686.
- [3] 凌复华, 《非线性振动中的数值方法》, 高等教育出版社(即将出版)。
- [4] 凌复华、殷学纲、何治奇, 《常微分方程数值方法及其在力学中的应用》, 重庆大学出版社(即将出版)。
- [5] Hénon, M., On the numerical computation of Poincaré maps, *Physica*, 50 (1982), 412.

Non-Integrability and Chaos of a Conservative Compound Pendulum

Ling Fu-hua Xu Ru-jin

(Department of Engineering Mechanics, Shanghai Jiaotong University, Shanghai)

Abstract

By using a series of canonical transformations (Birkhoff's series), an approximate integral of a conservative compound pendulum is evaluated. Level lines of this approximate integral are compared with the numerical simulation results. It is seen clearly that with a raised energy level, the nearly integrable system becomes non-integrable, i.e. the regular motion pattern changes to the chaotic one. Experiments with such a pendulum device display the behavior mentioned above.

Key words conservative compound pendulum, non-integrability, chaos, canonical-transformation, numerical simulation, Birkhoff's series, normal form, n th-fold resonance