

# 近海圆柱形贮液罐的振动特性\*

朱永谊 翁智远 吴家龙

(同济大学, 1990年4月21日收到)

## 摘 要

本文主要研究近海圆柱形贮液罐振动特性, 这是个典型液-壳相互作用体系的研究课题。文中提出的解析法, 将液、壳轴向模态位移用同一完备正交级数表示, 使液、壳振型解耦, 同时将液、壳振型函数分解为一个一致收敛级数和另一线性多项式, 解决了振型级数的收敛性和可微性。这样就得到对应于不同液深、任意边界条件、受约束的近海贮液罐的耦合固有频率的精确值和相应振型分布。

**关键词** 振动特性 固有频率 逸散阻尼 附加质量

## 一、前 言

随着海洋开发事业的发展, 目前所建造的近海结构物和陆上贮油设施的种类和数量正在逐年增加, 如平台塔柱、淡水塔、贮油罐。对近海贮液罐耦联振动的研究, 通常的方法有: Ritz法<sup>[1]</sup>、有限元法<sup>[2]</sup>、传递矩阵法<sup>[2]</sup>。这些研究表明: 不可压缩线性化速度势理论, 可以很好地描述内、外液体的振动, 且液面晃动对耦合固有频率的影响可以不计。

本文所讨论的近海贮液罐如图1所示, 其基本假设为:

(1) 容器内外液体是无旋、无粘性、不可压缩的理想流体, 壳半径与波长同一数量级, 直接运用小振幅波的线性势流理论。

(2) 忽略液面晃动对耦合固有频率的影响。本文首先用分离变量法, 得到液-壳耦合表达式, 然后将液、壳轴向模态位移用同一完备正交级数展开, 使液、壳振型解耦。同时按文献[3]所述解析法, 将振型函数分解为一个一致收敛级数和另一线性多项式, 解决了振型级数的收敛性和可微性。最后将振型函数代入基本方程, 得到对应于不同液深、任意边界条件、受约束的近海贮液罐的耦合固有频率的精确值和相应振型。

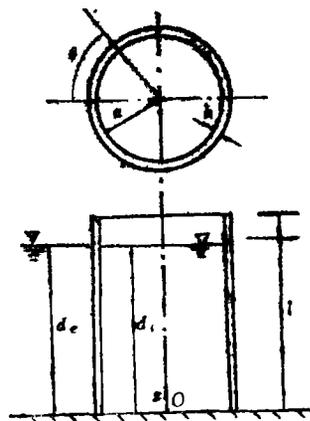


图 1 模型分析

\* 中国国家自然科学基金资助的课题。

## 二、液壳耦合振型与解耦

## 2.1 液-壳耦合振型表达式

按上节假设, 内流体速度势 $\varphi^i$ 应满足:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \varphi^i &= 0 & (r < a, 0 \leq z \leq d_i) \\ \frac{\partial^2 \varphi^i}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi^i}{\partial t} &= 0 & (z = d_i); \quad \frac{\partial \varphi^i}{\partial z} = 0 & (z = 0) \\ \frac{\partial \varphi^i}{\partial r} &= -w & \left( r = a - \frac{h}{2} \right); \quad \varphi^i = 0 & (r \rightarrow 0) \end{aligned} \right\} \quad (2.1a)$$

外流体速度势 $\varphi^e$ 应满足:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \varphi^e &= 0 & (r > a, 0 \leq z \leq d_e) \\ \frac{\partial^2 \varphi^e}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi^e}{\partial t} &= 0 & (z = d_e); \quad \frac{\partial \varphi^e}{\partial z} = 0 & (z = 0) \\ \frac{\partial \varphi^e}{\partial r} &= -w & \left( r = a + \frac{h}{2} \right); \quad \varphi^e = 0 & (r \rightarrow \infty) \end{aligned} \right\} \quad (2.1b)$$

不考虑液面重力波时, 式(2.1a)和(2.1b)的第二式变为:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi^i}{\partial t} &= 0 & (z = d_i) \\ \frac{\partial \varphi^e}{\partial t} &= 0 & (z = d_e) \end{aligned}$$

这里 $w$ 为壳径向速度。为方便起见, 设内外水深相同均为 $d$ 。

自由振动贮液罐面上的液动压力为:

$$\bar{p} = \begin{cases} P = \rho^i \frac{\partial \varphi^i}{\partial t} \Big|_{r=a-\frac{h}{2}} + \rho^e \frac{\partial \varphi^e}{\partial t} \Big|_{r=a+\frac{h}{2}} & (0 \leq z \leq d) \\ 0 & (d \leq z \leq l) \end{cases} \quad (2.2)$$

令液壳模态函数为:

$$\left. \begin{aligned} \varphi(z, \theta, r, t) &= \psi_\varphi(z, r) \cos n\theta \exp[i\omega t] \\ P(z, \theta, a, t) &= \psi_P(z) \cos n\theta \exp[i\omega t] \\ w(z, \theta, t) &= \psi_w(z) \cos n\theta \exp[i\omega t] \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

根据上述基本方程, 通过分离变量法得到水动压力振型为:

$$\psi_P = -(m_{nn}^i + m_{nn}^e) \omega^2 - i C_{nn}^e \omega \quad (2.4)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} m_{nn}^i &= 2\rho^i \sum_{s=0}^{\infty} \frac{I_n \left[ \lambda_s \left( a - \frac{h}{2} \right) \right]}{I_n' \left[ \lambda_s \left( a - \frac{h}{2} \right) \right]} \cdot \frac{\int_0^d \psi_w(z) \cos \lambda_s z dz}{\lambda_s d} \cos \lambda_s z \\ m_{nn}^e &= -2\rho^e \sum_{s=0}^{\infty} \frac{K_n \left[ \lambda_s \left( a + \frac{h}{2} \right) \right]}{K_n' \left[ \lambda_s \left( a + \frac{h}{2} \right) \right]} \cdot \frac{\int_0^d \psi_w(z) \cos \lambda_s z dz}{\lambda_s d} \cos \lambda_s z \end{aligned} \right\}$$

$$C_{mn}^i = 2\rho_i^i \operatorname{Im} \left\{ \frac{H_n^{(2)} \left[ K_0 \left( a + \frac{h}{2} \right) \right]}{H_n^{(2)'} \left[ K_0 \left( a + \frac{h}{2} \right) \right]} \cdot \frac{\int_0^d \psi_w(z) \operatorname{ch}(k_0 z) dz}{k_0 d + \frac{1}{2} \operatorname{sh}(2k_0 d)} \operatorname{ch}(k_0 z) \right\} \quad (2.5a, b, c)$$

上式中  $I_n$ ,  $K_n$  是修正的第一类、第二类 Bessel 函数,  $H_n^{(2)}$  是第二类 Hankel 函数, 且波数  $k_0$ ,  $\lambda_s$  满足下列条件:

$$k_0 g \operatorname{th}(k_0 d) = \omega^2, \quad \lambda_s = \frac{2s+1}{2d} \pi \quad (s=0, 1, 2, \dots)$$

$\rho_i^i$  和  $\rho_o^o$  是内部和外部流体的密度,  $\omega$  是耦合频率,  $\psi_w$  是壳径向振型,  $m_{mn}^i$ ,  $m_{mn}^o$  与壳径向加速度成正比, 使系统固有频率降低, 故称为附加质量沿轴向分布系数,  $C_{mn}^i$  与壳体径向速度成正比, 使系统能量衰减, 称为逸散(附加)阻尼沿轴向分布系数,  $m_{mn}^i$ ,  $m_{mn}^o$  是由不考虑液面重力波时的基本方程导出, 而  $C_{mn}^i$  是从考虑液面重力波的方程推出, 不然  $C_{mn}^i$  为零。这说明在本文假设前提下, 逸散阻尼是由于液体波向无限远处传播的能量耗散造成的。因此在作动力响应分析时, 必须计入重力波的影响。

### 2.2 液、壳振型解耦

我们在此求解相互作用问题的关键一步, 就在于如何处理 (2.5) 式中出现的积分表达式。将液、壳振型用同一完备正交系展开, 利用  $\{\cos(\lambda_s, z)\}$  在  $(0, d)$  区间内的完备正交性。

设:

$$\psi_w = \sum_{s=0}^{\infty} C_{mns} \cos \lambda_s z \quad (2.6)$$

将 (2.6) 式代入 (2.5a) 式, 则有:

$$\begin{aligned} \psi_F &= -\frac{2\omega^2}{d} \sum_{s=0}^{\infty} \int_0^d \psi_w(z) \cos(\lambda_s z) dz \cdot N_{ns} \cos(\lambda_s z) \\ &= -\omega^2 \rho_s \sum_{s=0}^{\infty} C_{mns} N_{ns} \cos(\lambda_s z) \end{aligned} \quad (2.7)^{(1)}$$

其中,  $\rho_s$  为壳的密度,

$$N_{ns} = \frac{1}{\lambda_s \rho_s} \rho_i^i \left\{ \frac{I_n \left[ \lambda_s \left( a - \frac{h}{2} \right) \right]}{I_n' \left[ \lambda_s \left( a - \frac{h}{2} \right) \right]} - \rho_o^o \frac{K_n \left[ \lambda_s \left( a + \frac{h}{2} \right) \right]}{K_n' \left[ \lambda_s \left( a + \frac{h}{2} \right) \right]} \right\} \quad (2.8)$$

由于将液、壳振型用同一完备正交系展开, 就避免了研究这种相互作用问题时经常遇到的积分表达式的困难, 在此仅增加附加质量、逸散阻尼项, 从而使问题大为简化, 其物理意义就是: 液壳振型得到了解耦, 由此可以建立液壳耦联振动的等效力学模型。

(i) 按自振特性定义, 这里不考虑阻尼项, 待最后求出振型后再代入 (2.5) 式求逸散阻尼。

### 三、液-壳体系的自振特性

#### 3.1 基本方程

(1) 圆柱壳振动方程为<sup>[4]</sup>:

$$\left. \begin{aligned}
 & a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1-\nu}{2} \left( 1 + \frac{K}{4} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + a \left[ \frac{1+\nu}{2} - 3(1-\nu) \frac{K}{8} \right] \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial \theta} \\
 & + \nu a \frac{\partial w}{\partial z} + (1-\nu) \frac{aK}{2} \frac{\partial^3 w}{\partial z \partial \theta^2} - \frac{1-\nu^2}{E} a^2 \rho_s \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \\
 & a \left[ \frac{1+\nu}{2} - \frac{3(1-\nu)K}{8} \right] \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \theta} + (1+K) \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{1-\nu}{2} a^2 \left( 1 + \frac{9}{4} K \right) \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \\
 & - \frac{3-\nu}{2} a^2 K \frac{\partial^3 w}{\partial z^2 \partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial \theta} - K \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} - \frac{1-\nu^2}{E} a^2 \rho_s \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \\
 & \frac{1-\nu}{2} a K \frac{\partial^3 u}{\partial z^2 \partial \theta} + \nu a \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{3-\nu}{2} a^2 K \frac{\partial^3 w}{\partial z^2 \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial \theta} + w + K \left[ a^4 \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} \right. \\
 & \left. + 2a^2 \frac{\partial^4 w}{\partial z \partial \theta^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} - \frac{\partial^3 v}{\partial \theta^3} \right] + \frac{1-\nu^2}{E} a^2 \rho_s \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{1-\nu^2}{Eh} a^2 \tilde{P} = 0
 \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

其中  $\tilde{P}$  由 (2.2) 式确定。

(2) 壳边界力和位移关系为:

$$\left. \begin{aligned}
 N_s &= D \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\nu}{a} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\nu}{a} w \right) \\
 \hat{N}_s &= \frac{D(1-\nu)}{2} \left[ \frac{1}{a} \left( 1 - \frac{3}{4} K \right) \frac{\partial u}{\partial \theta} + \left( 1 + \frac{9}{4} K \right) \frac{\partial v}{\partial z} - 3K \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial \theta} \right] \\
 \hat{\delta}_s &= K \left[ -\frac{1-\nu}{2a^3} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{3-\nu}{2a^2} \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial \theta} - \frac{2-\nu}{a^2} \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial \theta} - \frac{\partial^3 w}{\partial z^3} \right] \\
 M_s &= K \left[ \frac{\nu}{a^2} \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) - \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right]
 \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

这里  $D = \frac{Eh}{1-\nu^2}$  和  $K = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ 。

(3) 模态位移函数为:

$$\left. \begin{aligned}
 u(z, \theta, t) &= \psi_u(z) \cos n\theta \exp[i\omega t] \\
 v(z, \theta, t) &= \psi_v(z) \sin n\theta \exp[i\omega t] \\
 w(z, \theta, t) &= \psi_w(z) \cos n\theta \exp[i\omega t] \\
 \tilde{P}(z, \theta, t) &= \psi_p(z) \cos n\theta \exp[i\omega t]
 \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

(4) 振型函数

我们按液深高度分段, 取不同的振型函数, 即在有液处取 FSNT-SNA 组 (逐项精确满足, 一端自由支撑无切向约束, 另一端筒支无轴向约束边界条件), 在无液处取 SNA-SNA 组 (逐项精确满足两端筒支无轴向约束边界条件)。

令:

$$\left. \begin{aligned} \psi_u(z) &= \sum_{s=0}^{\infty} A_{mns} \sin \lambda_s z, \quad \psi_v(z) = \sum_{s=0}^{\infty} B_{mns} \cos \lambda_s z \\ \psi_w(z) &= \sum_{s=0}^{\infty} C_{mns} \cos \lambda_s z, \quad \psi_p(z) = - \sum_{s=0}^{\infty} C_{mns} \omega^2 N_{ns} \cos \lambda_s z \end{aligned} \right\} (0 \leq z \leq d) \quad (3.4a)$$

$$\left. \begin{aligned} \psi_u(z) &= \sum_{s=0}^{\infty} \bar{A}_{mns} \cos \bar{\lambda}_s z \\ &= \frac{1}{2} \bar{A}_{m n 0} + \sum_{s=1}^{\infty} \bar{A}_{mns} \cos \bar{\lambda}_s z \\ \psi_v(z) &= \sum_{s=0}^{\infty} \bar{B}_{mns} \sin \bar{\lambda}_s z = \sum_{s=1}^{\infty} \bar{B}_{mns} \sin \bar{\lambda}_s z \\ \psi_w(z) &= \sum_{s=0}^{\infty} \bar{C}_{mns} \sin \bar{\lambda}_s E = \sum_{s=1}^{\infty} \bar{C}_{mns} \sin \bar{\lambda}_s z, \quad \psi_p(z) = 0 \end{aligned} \right\} (d \leq z \leq l) \quad (3.4b)$$

$$\text{其中 } \lambda_s = \frac{2s+1}{2d} \pi, \quad \bar{\lambda}_s = \frac{s\pi}{l-d} \quad (s=0, 1, 2, \dots).$$

### 3.2 振型的收敛性和可微性<sup>[3]</sup>

任何振型函数都可以用一组完备正交级数表示, (3.4) 式中的  $\{\cos \lambda_s z\}$ 、 $\{\sin \lambda_s z\}$ 、 $\{\cos \bar{\lambda}_s z\}$ 、 $\{\sin \bar{\lambda}_s z\}$  都是完备正交基, 它们所组成的级数在  $[0, d]$  或  $[d, l-d]$  区间内可能非一致收敛, 其导数也不能通过级数逐项求导表示, 但我们可以通过级数的重新构造来解决振型的收敛性和可微性。例如对于

$$\psi_w(z) = \sum_{s=0}^{\infty} C_{mns} \cos \lambda_s z \quad (0 \leq z \leq d) \quad (3.5a)$$

通常只有当  $\psi_w(d) = 0$  时, 级数在  $[0, d]$  区间连续, 并且一致收敛到  $\psi_w(z)$ , 也可以逐项求导表示  $\psi_w'(z)$ 。但对于  $\psi_w(d) \neq 0$  一般情形, 令:

$$\psi_w(z) = \sum_{s=0}^{\infty} C_{mns} \cos \lambda_s z + \frac{z}{d} \psi_w(d) - \frac{z}{d} \psi_w(d) \quad (3.5b)$$

将等号右边最后一项展开为余弦级数, 并与第一项合并得:

$$\begin{aligned} \psi_w(z) &= \sum_{s=0}^{\infty} \left\{ C_{mns} + \frac{2}{\lambda_s d} \left[ \frac{1}{\lambda_s d} - (-1)^s \right] \psi_w(d) \right\} \cos \lambda_s z \\ &\quad + \frac{z}{d} \psi_w(d) \end{aligned} \quad (3.5c)$$

按定义等号右端级数项在  $[0, d]$  闭区间一致收敛, 其导数可以逐项求导获得<sup>[3]</sup>, 如下式:

$$\begin{aligned} \psi'_w(z) = & \sum_{s=0}^{\infty} \left\{ -C_{mns} \lambda_s - \frac{2}{d} \left[ \frac{1}{\lambda_s d} - (-1)^s \right] \psi_w(d) \right\} \sin \lambda_s z \\ & + \frac{\psi_w(d)}{d} \end{aligned} \quad (3.6)$$

同样道理, 我们可以得到 (3.4) 式各阶导数。

我们不必通过 H. Chung<sup>[6]</sup> 的 Stokes 变换, 而是经过级数的重新构造来处理振型的收敛性和可微性, 这具有明确的物理意义: 在某一特定的边界条件 (如 FSNT-SNA-SNA) 基础上, 通过强制和放松, 叠加上待定端点值的影响, (如  $\psi_w(d)$ ) 满足所求边界条件 (如 C-F). 更为一般, 本文所选取的线性多项式如能保证构造后的级数在区间  $[0, d]$  端点前四阶导数都连续, 这时构造后的 Fourier 级数系数的数量级为  $O(\lambda_s^{-5})$ , 可见本文的方法不但保证而且大为改善了振型的收敛性<sup>[3]</sup>。

### 3.3 任意液深的液壳频率方程

按 3.2 节中振型级数的求导方法, 我们得到 (3.4) 式各阶导数, 并把所得结果代入 (3.1), (3.2) 式, 经过大量的运算最后整理成矩阵形式得:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ \text{对} & S_{22} & S_{23} \\ & \text{称} & S_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{mns} \\ B_{mns} \\ C_{mns} \end{Bmatrix} &= [q_{ij}]_{3 \times 3} \\ &\cdot \{u(0), w'(0), \hat{N}_{z0}(0), \hat{\theta}_z(0), v(d), w(d), u'(d), w''(d)\}^T \end{aligned} \quad (3.7a)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \bar{S}_{11} & \bar{S}_{12} & \bar{S}_{13} \\ \text{对} & \bar{S}_{22} & \bar{S}_{23} \\ & \text{称} & \bar{S}_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{A}_{mns} \\ \bar{B}_{mns} \\ \bar{C}_{mns} \end{Bmatrix} &= [\bar{q}_{ij}]_{3 \times 3} \\ &\cdot \{v(d), w(d), u'(d), w''(d), v(l), w(l), N_z(l), M_z(l)\}^T \end{aligned} \quad (3.7b)$$

$$\left. \begin{aligned} N_z(l) &= D \left[ u'(l) + \frac{\nu}{a} n v(l) + \frac{\nu}{a} w(l) \right] \\ M_z(l) &= K \left[ \frac{\nu}{a^2} (n v(l) + n^2 w(l)) - m''(l) \right] \\ \hat{N}_{z0}(0) &= \frac{D(1-\nu)}{2} \left[ -\frac{n}{a} \left( 1 - \frac{3}{4} K \right) u(0) + \left( 1 + \frac{9}{4} K \right) v'(0) + 3K_n w'(0) \right] \\ \hat{Q}_z(0) &= K \left[ \frac{1-\nu}{2a^3} u(0) + \frac{3-\nu}{2a^2} n v'(0) + \frac{2-\nu}{a^2} n^2 w'(0) - w''(0) \right] \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

对于非 FSNT-SNA-SNA 边界条件, (3.7) 式变为:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} A_{mns} \\ B_{mns} \\ C_{mns} \end{Bmatrix} &= [b_{ij}]_{3 \times 3} \{u(0), w'(0), \hat{N}_{z0}(0), \hat{Q}_z(0), \\ &v(d), w(d), u'(d), w''(d)\}^T \end{aligned} \quad (3.9a)$$

$$\begin{cases} \bar{A}_{mns} \\ \bar{B}_{mns} \\ \bar{C}_{mns} \end{cases} = [\bar{b}_{ij}]_{3 \times 3} \{v(d), w(d), u'(d), w''(d), v(l), \\ w(l), N_z(l), M_z(l)\}^T \quad (3.9b)$$

对于最一般的SNA-FSNT (下端简支无轴向约束, 上端自由支撑无切向约束) 端部需要满足边界条件:

$$\left. \begin{aligned} v(0) = w(0) = N_z(0) = M_z(0) = 0 \\ u(l) = w'(l) = \hat{N}_{z0}(l) = \hat{Q}_z(l) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.10a)$$

连续条件为

$$u(d) = \bar{u}(d), v'(d) = \bar{v}'(d), w'(d) = \bar{w}'(d), w''(d) = \bar{w}''(d) \quad (3.10b)$$

将(3.9)式代入(3.4)式, 并利用(3.10)式得频率方程为:

$$\begin{aligned} [e_{ij}]_{12 \times 12} \{u(0), w'(0), \hat{N}_{z0}(0), \hat{Q}_z(0), v(d), w(d), u'(d), \\ w''(d), v(l), w(l), N_z(l), M_z(l)\}^T = \{0\} \end{aligned} \quad (3.11)$$

频率行列式为

$$|e_{ij}|_{12 \times 12} = 0 \quad (3.12)$$

我们可以从(3.12)式得到耦合固有频率精确值, 由(3.11), (3.9), (3.4)式得到振型分布。这里我们用FSNT-SNA-SNA组建立相应于求解SNA-FSNT边界条件最一般频率方程(3.11)式, 其余边界条件、约束条件下的频率方程只须删去相应的行和列。如果在 $z=d$ 处还有约束使 $v(d)=w(d)=0$ , 那么(3.11)退化为:

$$\begin{aligned} [e_{ij}]_{10 \times 10} \{u(0), w'(0), \hat{N}_{z0}(0), \hat{Q}_z(0), u'(d), w''(d), v(l), \\ w(l), N_z(l), M_z(l)\}^T = \{0\} \end{aligned} \quad (3.13)$$

如果罐高与液深相同, 则(3.11)退化整理得:

$$[e_{ij}]_{8 \times 8} \{u(0), w'(0), \hat{N}_{z0}(0), \hat{Q}_z(0), v(d), w(d), N_z(d), M_z(d)\}^T = \{0\} \quad (3.14)$$

### 3.4 几种边界情况下的频率方程

(1) C-F(一端固定、另一端自由的悬臂式)

$$[e_{ij}]_{8 \times 8} \{\hat{N}_{z0}(0), \hat{Q}_z(0), v(d), w(d), u'(d), w''(d), v(l), w(l)\}^T = \{0\} \quad (3.15)$$

(2) F-F(两端自由的自重式)

$$[e_{ij}]_{8 \times 8} \{u(0), w'(0), v(d), w(d), u'(d), w''(d), v(l), w(l)\}^T = \{0\} \quad (3.16)$$

(3) C-SNA(一端固定另一端简支无轴向约束)

$$[e_{ij}]_{6 \times 6} \{\hat{N}_{z0}(0), \hat{Q}_z(0), v(d), w(d), u'(d), w''(d)\}^T = \{0\} \quad (3.17)$$

对于平面内刚度较大的罐顶, 可以用C-SNA边界来定性分析其影响。

(4) FSNT-SNA

液深与罐高一致时不能从(3.11)式退化, 而须由(3.7a)式得:

$$[S_{ij}] \{A_{mns}, B_{mns}, C_{mns}\}^T = \{0\} \quad (3.18)$$

本节讨论的 $[S_{ij}]$ 、 $[\bar{S}_{ij}]$ 、 $[q_{ij}]$ 、 $[\bar{q}_{ij}]$ 、 $[b_{ij}]$ 、 $[\bar{b}_{ij}]$ 、 $[e_{ij}]$ 矩阵各元素除 $S_{33}$ 外均见文献[3]。 $S_{33}$ 增加了液体的附加质量项, 即

$$S_{33} = a^4 \lambda_s^4 K + 2a^2 K^2 \lambda_s^2 + K^4 + 1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \left( 1 + \frac{N_{ns}}{h} \right),$$

$$\omega_0 = \sqrt{E / \{ \rho_s a^2 (1 - \nu^2) \}} \quad (3.19)$$

对于FSNT-SNA边界, 第 $(n, s)$ 振型的附加质量系数为:

$$\frac{N_{ns}}{h} = \frac{1}{\lambda_s h \lambda_s} \left\{ \rho_s^i \frac{I_n \left[ \lambda_s \left( a - \frac{h}{2} \right) \right]}{I_n' \left[ \lambda_s \left( a - \frac{h}{2} \right) \right]} - \rho_s^i \frac{K_n \left[ \lambda_s \left( a + \frac{h}{2} \right) \right]}{K_n' \left[ \lambda_s \left( a + \frac{h}{2} \right) \right]} \right\} \quad (3.20)$$

从(3.20)式可知, 附加质量系数近似同罐厚成反比, 且随着振型数的增加, 其值减小。

#### 四、计算结果与讨论

为了讨论近海贮液罐振动特性, 解出以下若干算例: 基本数据为:  $E = 2.1 \times 10^{10} \times 9.8 \text{ N/m}^2$ ,  $\rho_s = 7.8 \times 10^3 \times 9.8 \text{ N/m}^3$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $\rho_s^i = \rho_s^e = 1000 \times 9.8 \text{ N/m}^3$ ,  $l = 80.0 \text{ m}$ , 除图表明外,  $a = 40.0 \text{ m}$ ,  $h = 0.1 \text{ m}$ , 边界G-F。

图2、图3分别表示对应于 $(n, m) = (1, 1), (1, 2), (1, 3)$ 以及 $(5, 1), (5, 2), (5, 3)$ 时, 容器

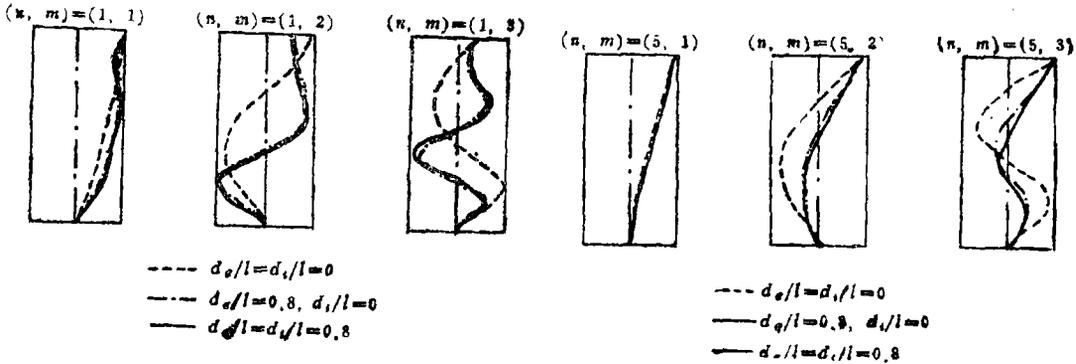


图2 壳径向振型随水深变化( $n=1$ )

图3 壳径向振型随水深变化( $n=5$ )

内外液体对其径向位移的振型分布的影响。可以看出, 容器内外的液体要改变振型分布, 而且纵轴方向高振型受到的影响比基本振型受到的影响大。

表1表示容器内、外液体对固有频率的影响, 可以看出: 容器内、外的液体要降低固有频率, 且本文结果, 与Ritz法(RRM)<sup>[1]</sup>、矩阵传递法(MPM)<sup>[2]</sup>、半解析元法(SAEM)<sup>[6]</sup>结果基本吻合, 文献[7]的半解析元法结果不够理想。随着振型数增加, 边界条件对固有频率影响减弱, 考虑基础变形的结果一般介于本文边界条件为C-F、FSNT-F解之间, 而考虑顶盖的结果介于本文边界条件为C-F、C-SNA( $n > 1$ )解之间, 因此我们可以根据不同边界条件下的解来定性分析基础变形和顶盖的影响。

表2、表3是耦合固有频率、附加质量系数随罐体尺寸变化规律(详见结论)。

表 1 耦合固有频率随水深变化 (\*均指C-F边界)

方法 f(Hz) (n,m)	$d_i/l=d_o/l=0.0$				$d_i/l=0.1, d_o/l=0.8$				$d_i/l=d_o/l=0.8$					
	[1]	[2]	[6]	[7]	本文	[1]	[2]	[6]	[7]	本文	[2]	本文		
	RRM*	MPM*	SAEM*	C-F	RRM*	MPM*	SAEM*	C-F	RRM*	C-F	FSNT-F	C-SNA		
(0,1)				15.69	15.24				3.82	4.11		1.84	1.84	
(1,1)	6.03	5.89	5.89	6.22	5.99	2.15	2.08	2.09	2.11	2.10	1.44	1.42	2.27	
(2,1)				5.68	2.99				2.06	1.07		0.75	0.02	1.63
(3,1)				7.64	1.66				2.88	0.64		0.45	0.03	1.19
(4,1)				9.16	1.04				4.56	0.43		0.31	0.06	0.90
(5,1)	0.77	0.77	0.77		0.77	0.38	0.39	0.43		0.37	0.28	0.26	0.11	0.71
(1,2)	15.51		15.20	15.99	15.19	4.68		4.70	5.10	4.94	3.17	3.32	2.78	3.77
(5,2)			3.40		3.32			1.84		1.43		1.05	0.37	1.85
(1,3)	18.35		18.92		18.23	6.27		7.11		6.78	3.93	4.69	4.56	4.97
(5,3)			7.45		7.27			4.02		3.23		2.39	1.59	3.12

表 2 耦合固有频率变化规律

$d_i/l$	$d_o/l$	$a/l$	$h/l$	(n,m)						
水深	水深			(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)
1.0	0.0	0.5	0.00125	5.99	2.00	1.66	1.04	15.19	8.23	19.56
1.0	0.0	0.5	0.00125	1.44	0.79	0.48	0.32	3.34	4.75	5.91
0.0	1.0	0.5	0.00125	1.64	0.83	0.49	0.33	3.85	5.31	6.40
0.5	0.5	0.5	0.00125	2.44	1.28	0.75	0.51	6.05	4.37	3.26
1.0	1.0	0.5	0.00125	1.09	0.58	0.35	0.24	2.55	3.60	4.44
0.0	0.0	0.5	0.01	6.11	3.10	1.97	2.14	15.27	18.41	19.77
1.0	1.0	0.5	0.01	2.85	1.50	1.02	1.17	6.77	9.33	11.20
0.0	0.0	2.0	0.00125	4.37	3.31	2.50	1.92	5.04	5.10	5.12
1.0	1.0	2.0	0.00125	0.43	0.38	0.30	0.27	0.76	1.00	1.19

表 3 附加质量系数变化规律

$d_i/l$	$d_o/l$	$a/l$	$h/l$	(n,m)						
水深	水深			(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)
1.0	0.0	0.5	0.00125	16.30	13.51	11.21	9.56	19.58	13.73	9.95
0.0	1.0	0.5	0.00125	12.34	11.98	10.48	8.93	14.57	10.79	8.34
0.5	0.5	0.5	0.00125	5.03	4.46	3.92	3.16	6.05	4.37	3.26
1.0	1.0	0.5	0.00125	29.20	25.58	21.49	17.78	34.48	24.64	18.40
1.0	1.0	0.5	0.01	1.48	1.29	1.13	1.43	1.59	1.23	1.03
1.0	1.0	2.0	0.00125	100.39	75.50	60.42	53.49	42.86	25.11	17.37

## 五、结 论

(一) 罐内、外液体的存在降低了对应空罐的固有频率，并改变空壳的振型，且内流对其影响较外流大些。

(二) 通常水越深、壳越瘦，附加质量系数越大。附加质量系数近似地同罐壁厚度成反比。随着振型数的增加，附加质量系数减小，即液体辐射影响减弱。

(三) 随着振型数的增加，边界条件对固有频率的影响减弱。

(四) 壳振动与梁振动分析有很大差异,壳振动分析除了能反映非梁式振动、内力振型以外,还能反映出固有频率相对密集区。一般罐壳越矮胖、越薄、液体越深,最易激发波数 $n$ 越大,频率越密集。

(五) 本文提出的解析法能有效地解决在 $d < l$ 情况下的不同液深、任意边界条件、受约束的近海圆柱形贮液罐的自振特性分析。本方法还可以考虑水的粘性、可压缩性和重力波的影响,因此本文有推广应用价值。

### 参 考 文 献

- [ 1 ] Tanaka, Y., and T. Hamamoto, 'Dynamics behaviour of offshore cylindrical tanks, *Theor. & Appl. Mech.*, 30 (1980).
- [ 2 ] 田中、滨本, 波浪及レ水平地动に对よ为固定式海洋田筒タエウの动的应答解析, 日本建筑学会论文报告集, No.324 (1983).
- [ 3 ] 朱永谊、翁智远、吴家龙, 受约束的圆柱壳的振动分析, 振动工程学报, 1(1) (1987).
- [ 4 ] Sanders, J. L., Jr., An improved first-approximation theory for thin shells, NASA Report, 24 (1959).
- [ 5 ] Chung, H., Free vibration analysis of circular cylindrical shells, *J. of Sound & Vibration*, 74 (3)(1981).
- [ 6 ] 曹志远、张佑启, 结构与外流体动力相互作用的半解方法, 力学学报, 17(5) (1985).
- [ 7 ] Chung, Y. K. and Cao Zhi-yuan, Dynamic analysis of prismatic structure surrounded by an infinite fluid medium, *EESD*, 13 (1985).

## Vibration Characteristics of Offshore Cylindrical Tanks

Zhu yong-yi    Weng Zhi-yuan    Wu Jia-long

(Tongji University, Shanghai)

### Abstract

The vibration characteristics of offshore cylindrical tanks are studied in this paper. This is a typical topic of liquid-shell interaction system. In this paper, a general analytical method is presented by which the axial modal functions of liquid and shell are represented as the same complete orthogonal series for uncoupling the mode of liquid and shell. Simultaneously, the mode functions are expanded into a uniform convergence series and a linear polynomial, so that the problem of convergence and differentiation of mode series is solved. Therefore, the rather exact natural frequency and its corresponding mode of offshore cylindrical tank with different liquid depths, with arbitrary conditions and with intermediate constraints can be obtained.

**Key words** vibration characteristics, natural frequency, radiation damping, added mass