

一类近可积Hamilton系统中随机现象 和Smale马蹄间的关系*

董广茂

(西安工业学院)

刘曾荣 许政范

(苏州大学, 中科院力学所LNM实验室) (上海海运学院)

摘 要

本文得到一种方法, 可以用来研究含有两时间尺度系统中的复杂动力学行为. 特别, 利用这种方法, 本文讨论了一类含有两时间尺度的近可积 Hamilton 系统的随机性, 证明它实际上一种 Smale 马蹄意义下的混沌. 最后, 通过一个例子说明我们方法的有效性并在其中发现了一张随机网.

关键词 随机性 Smale 马蹄 Ω -稳定性 时间尺度 随机网

一、引 言

大量的数值结果表明, 在许多近可积的 Hamilton 系统的相空间都出现了由混沌海和岛屿构成的无穷自嵌套结构. 我们主要对共振附近出现的随机现象感兴趣. 一般认为, 这是由共振附近的鞍连线的横截相交引起的. 遗憾的是, 这一点并未在理论上得到证明([1~2], [5~6], [8]).

正象[1~2], [4]所指出的, 对于显含一个时间尺度的系统, 当用Melnikov方法检验鞍连线的横截相交时是失效的, 因为相应的Melnikov函数是指数无穷小量, 没有简单零点.

基于此, 我们研究一类显含两时间尺度一个快变量、一个慢变量的(近可积Hamilton)系统并得到了一些结果, 用这些结果可以证明该系统中出现的随机现象是 Smale 马蹄意义下的混沌, 我们还用这种方法讨论了一个具体例子, 并在其中发现了一张随机网(stochastic web).

二、一些准备

我们将研究的Hamilton系统具有如下形式:

$$H(J, \theta, t) = H_0(J) + \varepsilon H_1(J, \theta, t) + \varepsilon^2 H_2(J, \theta, t) \quad (2.1)$$

其中 (J, θ) 为作用-角变量, $\frac{\Omega}{\omega} = \frac{r}{s}$, $\frac{\Omega'}{\omega'} = \frac{r'}{s'}$, $\omega = \frac{\partial H_0(J)}{\partial J}$, r, s, r', s' 皆为整数, Ω 和

* 本文得到国家自然科学基金资助.

$\Omega' + o(\varepsilon)$ 为 H_1 和 H_2 关于 t 的频率。很明显, 该系统具有两个不同的时间尺度: 一个为 t , 另一个为 εt 。

如果系统(2.1)是退化的, 通过微分同胚变换, 它可以化成具有下列形式的系统:

$$\dot{x} = \varepsilon f(x, t) + \varepsilon^2 g(x, \varepsilon t, t) \quad (2.2)$$

其中 f 和 g 是 $C^r(r \geq 2)$ 函数, 关于 t 分别以 T_1 和 T_2 为周期, g 关于 εt (记为 τ) 以 T 为周期。细节可参见[1]或本文的第四节。

如果 $g \neq 0$ 且 $T_1/T_2 = m/n$, 其中 m 和 n 为整数, 那么 f 和 g 关于 t 有相同的周期 nT_1 或 mT_2 , 不妨仍记为 T_1 。

作微分同胚变换([2], [7]):

$$x = y + \varepsilon u(y, \tau) + \varepsilon^2 v(y, \tau, t) \quad (2.3)$$

那么系统(2.1)可变成下面的等价系统:

$$\dot{y} = \varepsilon \bar{f}(y) + \varepsilon^2 [\bar{f}_1(y) + \bar{g}(y, \tau)] + \varepsilon^3 h(y, \tau, t, \varepsilon) \quad (2.4)$$

其中 h 连续有界且

$$\bar{f}(y) = \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} f(y, t) dt, \quad \bar{g}(y, \tau) = \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} g(y, \tau, t) dt,$$

$\bar{f}_1(y) = \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} Df(y, t) u(y, t) dt$ 为 $Df(y, t) u(y, t)$ 的平均部分, u 可从方程 $\partial u / \partial t = \bar{f}(y, t)$ 中解出, 这里 $\bar{f}(y, t) = f(y, t) - \bar{f}(y)$, 具体细节可参阅[1~2]、[7]。

总而言之, 要研究系统(2.1)和(2.2)的动力学行为, 只需研究(2.4)的就够了。

三、判别方法

为陈述方便, 上节系统(2.4)简记如下:

$$x' = f(x) + \varepsilon g(x, \tau) + \varepsilon^2 h(x, \tau, \varepsilon, \varepsilon) \quad (3.1)$$

其中 f 和 g 为 $C^r(r \geq 2)$ 函数, g 关于 τ 以 T 为周期, $x \in D \subset \mathbb{R}^2$, D 为有界闭集, $x' = dx/d\tau$ 。

我们感兴趣的是系统(3.1)的动力学行为和下面系统的动力学行为之间的关系:

$$\dot{y} = f(y) + \varepsilon g(y, \varepsilon) \quad (3.2)$$

假设 $x(\tau, t)$ 为(3.1)的以 $x(0, 0) = x_0$ 为初始条件的解, $y(\tau)$ 为(3.2)的以 $y(0) = y_0$ 为初始条件的解。由 Gronwall 不等式, 有

$$\begin{aligned} |x(\tau, t) - y(\tau)| &\leq |x_0 - y_0| + (L_1 + \varepsilon L_2) \int_0^\tau |x(s, s/\varepsilon) - y(s)| ds + \varepsilon^2 M \tau \\ &\leq [|x_0 - y_0| + \frac{\varepsilon^2 M}{L_1 + \varepsilon L_2} \exp[(L_1 + \varepsilon L_2)\tau]], \end{aligned}$$

其中 L_1 和 L_2 为 f 和 g 关于 y 的 Lipschitz 常数, M 为 h 的一个上界。

因此, 我们得到

引理 3.1 对上面定义的 $x(\tau, t)$ 和 $y(\tau)$, 如果

$$|x_0 - y_0| = o(\varepsilon^2),$$

那么

$$|x(\tau, t) - y(\tau)| = o(\varepsilon^2), \quad \tau = O(1).$$

建立相应于系统(3.1)和(3.2)的 Poincaré 映射:

$$P_\varepsilon: \Sigma_{\tau_0} \longrightarrow \Sigma_{\tau_0},$$

$$P_\varepsilon: \Sigma_{\tau_0} \longrightarrow \Sigma_{\tau_0},$$

其中 $\Sigma_{\tau_0} = \{(x, \tau) \in D \times S_T^1 \mid \tau = \tau_0 \in [0, T]\}$, $S_T^1 = \mathbf{R}/T$.

注意到, 当用 P'_ε 来研究(3.1)的动力学行为时是有误差的. 因为 h 关于 τ 和 t , 即 τ/ε , 有不同的周期, 当我们在胎面 $D \times S_T^1$ 上讨论时, h 中的 τ/ε 中的 τ 被扭曲了. 幸而, 根据与引理3.1类似的推导, 在 $o(\varepsilon^2)$, 误差不会发生作用.

根据引理3.1, 我们知道:

$$P'_\varepsilon x - P_\varepsilon x = o(\varepsilon^2) \quad (x \in D).$$

定理3.1 映射 P'_ε 和 P_ε 满足如下关系:

$$P'_\varepsilon = P_\varepsilon + o(\varepsilon^2).$$

如果(3.2)具有Smale马蹄意义下的混沌, 则 P_ε 有一不变集 A ($[2 \sim 3]$).

1970年, S. Smale证明了: P_ε 是 Ω -稳定的. 因此, 当 ε 充分小时, P'_ε 也有一不变集 A' ($[2 \sim 3]$). Ω -稳定性也使我们知道, P'_ε 是可以用来研究(3.1)的复杂行为的.

定理3.2 如果(3.2)有与 ε 无关的简单零点, 则(3.1)有Smale马蹄意义下的混沌.

现在, 我们就可以讨论象系统(2.1)或(3.1)、(3.2)中的混沌或随机性了.

四、应 用

在这一节, 我们利用第三节中的结果来研究一个近可积的Hamilton系统, 发现了一张随机网, 它实际上是Smale马蹄意义下的混沌结构.

我们研究的系统如下:

$$\begin{aligned} H(x, y, t) = & \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{2} \omega^2 x^2 - \varepsilon \frac{\alpha}{k} \cos(kx - \Omega t) \\ & + 2\varepsilon^2 \beta x^2 \sin(2\omega - q\varepsilon)t \end{aligned} \quad (4.1)$$

其中 $N\omega = \Omega$, N 为正整数.

该系统描述了一类加速器的共振域附近的运动([9]).

作变换:

$$x = (2J/\omega)^{1/2} \sin\theta, \quad y = (2J\omega)^{1/2} \cos\theta,$$

系统(4.1)变为如下新的Hamilton系统:

$$\begin{aligned} \bar{H}(J, \theta, t) = & \omega J - \varepsilon \frac{\alpha}{k} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} J_n \left(k \left(\frac{2J}{\omega} \right)^{1/2} \right) \cos(n\theta - \Omega t) \\ & + \varepsilon^2 \frac{2\beta J}{\omega} (1 - \cos 2\theta) \sin(2\omega - q\varepsilon)t \end{aligned} \quad (4.2)$$

其中 (J, θ) 为作用-角变量, $J_n(\cdot)$ 为Bessel函数.

注意到 $N\omega = \Omega$, 取母函数 $F = (N\theta - \Omega t)I$, 得新的Hamilton系统([1], [5~6]):

$$\bar{H}'(I, \varphi, t) = \bar{H}(J, \theta, t) + \frac{\partial F}{\partial t} \quad (4.3)$$

(I, φ) 为新的作用-角变量.

从前两节的结果, 我们只需研究相应于系统(3.2)的如下系统:

$$\left. \begin{aligned} I' &= \frac{\alpha}{k} J_N(k\rho) \sin\varphi + \varepsilon \frac{2\beta I}{\omega} \cos\left(\frac{2\varphi}{N} - q\tau\right) - \varepsilon a(\rho) \sin\varphi \\ \varphi' &= \frac{N\alpha}{\omega\rho} J'_N(k\rho) \cos\varphi + \varepsilon \frac{N\beta}{\omega} \sin\left(\frac{2\varphi}{N} - q\tau\right) - \varepsilon b(\rho) \cos\varphi \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

其中 $\rho = (2NI/\omega)^{1/2}$, $\tau = -\varepsilon t$.

至于这个系统是如何得到, 可参见第二节、[1]、[5~6]. 我们没有写 $a(\rho)$ 和 $b(\rho)$ 的具体形式, 因为, 正象后面将看到的, 他们在计算中并不发生作用.

系统(4.4)的未摄动系统的Hamilton量为

$$H_0(I, \varphi) = \frac{\alpha}{k} J_N(k\rho) \cos\varphi,$$

其相应的双曲和椭圆不动点集分别为:

$$P_h = \{(\rho^*, \varphi^*) \mid J_N(k\rho^*) = 0, \varphi^* = \pm\pi/2\},$$

$$P_e = \{(\rho^*, \varphi^*) \mid J'_N(k\rho^*) = 0, \varphi^* = 0, \pi\}.$$

连接两不动点 $(\rho^*, \pm\pi/2)$ 的弧状鞍连线的方程为:

$$(\rho(\tau), \varphi(\tau)) = \left(\rho^*, 2\arctg\left(\operatorname{th}\left(\frac{1}{2}a\tau\right)\right)\right) \quad \left((\rho^*, \pm\frac{\pi}{2}) \in P_h\right)$$

其中 $a = \frac{N\alpha}{\omega\rho^*} J'_N(k\rho^*)$, $\varphi(\tau)$ 为奇函数.

很容易计算出相应的Melnikov函数:

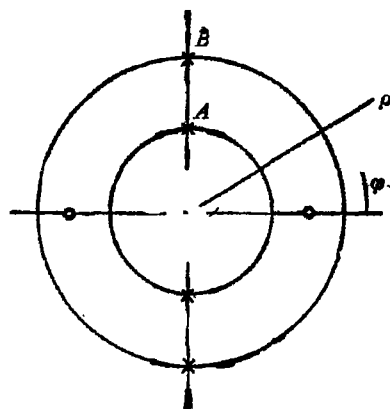
$$M_1(\tau_0) = \frac{4a\beta I^*}{\omega} \int_0^\infty \cos\varphi \cos\left(\frac{2\varphi}{N} - q\tau\right) d\tau \cdot \cos q\tau_0,$$

显然, 它有与 ε 无关的简单零点, 因此, 在 ε 充分小的情况下, 所有的弧状鞍连线都横截相交.

连接鞍点 $(\rho^*, \pm\pi/2)$ 和 $(\rho^*, \pm\pi/2)$ 的直线状鞍连线方程, 比如图1中的 AB 的方程为:

$$(\rho(\tau), \varphi(\tau)) = \left(\rho^*(\tau), \frac{\pi}{2}\right),$$

很明显, $J_N(k\rho^*(\tau)) \rightarrow 0$, $\tau \rightarrow \pm\infty$.



• 椭圆不动点 × 双曲不动点

图 1

计算相应的Melnikov函数, 得:

$$M_2(\tau_0) = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha}{k} J_N(k\rho^*(\tau)) \frac{N\beta}{\omega} \sin\left(\frac{\pi}{N} - q(\tau + \tau_0)\right) d\tau \\ = l_1 \cos q\tau_0 + l_2 \sin q\tau_0.$$

其中 $l_1 = -\frac{\alpha\beta N}{k\omega} \int_{-\infty}^{\infty} J_N(\rho^*(\tau)) \sin\left(\frac{\pi}{N} - q\tau\right) d\tau,$

$$l_2 = -\frac{\alpha\beta N}{k\omega} \int_{-\infty}^{\infty} J_N(\rho^*(\tau)) \cos\left(\frac{\pi}{N} - q\tau\right) d\tau.$$

由于除了最多可数个 q 外, l_1 和 l_2 不可能同时为零 ([10]), 因此, $M_2(\tau_0)$ 有与 ε 无关的简单零点, 也就是说, 当 ε 很小时, 所有的直线状的鞍连线都横截相交。

由于Bessel函数有无穷多个零点, 我们从而知道系统(4.4)有一张由无穷条横截相交的分离线构成的随机网, 这实际上也是Smale马蹄意义下的一种混沌结构([2~3], [11]).

由定理3.2, 系统(4.1)也有一张随机网, 并且是一个Smale马蹄意义下的混沌结构。

参 考 文 献

- [1] Lichtenberg, A. J. and M. A. Lieberman, *Regular and Stochastic Motions*, Springer-Verlag, New York (1983).
- [2] Guckenheimer, J. and P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*, Springer-Verlag (1983).
- [3] Palis, J., Jr. and W. de Melo, *Geometric Theory of Dynamical Systems: An Introduction*, Springer-Verlag, New York Inc. (1982).
- [4] Sanders, J. A. and F. Verhulst, *Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems*, Springer-Verlag, New York Inc. (1985).
- [5] Chernikov, A. A., R. Z. Sagdeev and Zaslavsky, Stochastic webs, *Physica*, Amsterdam, North-Holland, **D 33** (1988).
- [6] Chernikov, A. A., M. Ya. Natanzon, Petrovichev, R. Z. Sagdeev and G. M. Zaslavsky, Some peculiarities of stochastic layers and web formation, *Phy. Lett. A.*, **122** (1987).
- [7] Hale, J. K., *Ordinary Differential Equations*, Robert E. Krieger Publishing Company (1980).
- [8] Chirikov, B. V., A universal instability of many dimensional oscillator systems, *Phys. Rep.*, **52** (1979), 265.
- [9] 刘曾荣、罗诗裕、李继彬, 具有缓变周期扰动系统的动力学行为, *数学物理学报*, **7(3)** (1987).
- [10] Holmes, P. J. and J. E. Marsden, Horseshoes and Arnold diffusion for Hamiltonian systems on Lie group, *Indiana U. Math. J.*, **32(2)** (1986).
- [11] Qian Min and Yan Yin, Transversal heteroclinic cycle and its application to Henon mapping, *Kexue Tongbao*, **31(1)** (1986).

Stochasticity near Resonances in a kind of Near-Integrable Hamiltonian Systems Based on Smale Horseshoes

Dong Guaug-mao

(Xi'an Institute of Technology, Xi'an)

Liu Zeng-rong

(Suzhou University, Suzhou; LNM, Institute of Mechanics,

Chinese Academy of Sciences)

Xu Zheng-fan

(Shanghai Maritime University, Shanghai)

Abstract

In this paper, a method is developed to detect the appearance of stochasticity in a kind of near-integrable Hamiltonian system with two time-scales. One is fast and the other slow. The stochasticity is showed to be chaos in the sense of Smale horseshoes actually. A stochastic web is discovered in our example by use of the results obtained in this paper.

Key words stochasticity, Smale horseshoe, Ω -stability, timescale, stochastic web