应用数学和力学，第13卷第2期（1992年2月）　　应用数学和力学编委会编
Applied Mathematics and Mechanics　　重庆出版社出版

# 一般符号动力系统的浑沌性态*

傅新楚　　周焕文

（中国科学院武汉数学物理所）（武汉大学数学系）

（1990年12月15日收到）

**摘　要**

本文将符号动力系统理论推广到一般的情况，讨论当 $X$ 为可分度量空间时，一般符号动力系统$(\Sigma(X),\ \sigma)$及其特例的浑沌性质及应用．

**关键词**　符号动力系统　浑沌　移位不变集

## 一、引　言

早在1898年，Hadamard就将符号动力系统的技巧用于负曲率曲面上的测地线的研究．1938年，Morse和Hedlund首次将符号动力学作为一个独立的学科提出．现在，符号动力系统已成为研究动力系统的浑沌性质的有力工具．不过，人们发现，具有有限个符号的符号动力系统$(\Sigma(N),\ \sigma)$在解决实际问题时，是有局限性的．文献[4]认为，为了研究一些复杂的不变集，必须考虑具有无穷个符号的符号动力系统．文[2]就是这种研究的尝试．本文在文[4]、[2]的基础上，将符号动力系统理论推广到一般情况．讨论当$X$为可分度量空间时，符号动力系统$(\Sigma(X),\ \sigma)$的性质，证明了在文[1]及Li-Yorke意义下$(\Sigma(X),\ \sigma)$是浑沌的．并且证明这种推广在某种意义下是最一般的．本文还介绍了文[2]所讨论的当$\mathrm{card}(X)=\omega_0$时的特例，以及文[3]中所讨论的关于$(\Sigma(Z),\ \sigma)$在一般连续自映射所生成的离散半动力系统中的应用．

## 二、一般符号动力系统

设$(X,\ d)$为可分度量空间，$\mathrm{card}(X)\geqslant 2$，其中，$\mathrm{card}(\cdot)$表示集合的基数．记

$$\Sigma(X)=\prod_{i=0}^{+\infty}S_i,\ S_i=X,\qquad i=0,1,\cdots,$$

$\Sigma(X)$上的度量定义为

$$\rho(x,y)=\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{2^i}\frac{d(x_i,y_i)}{1+d(x_i,y_i)},\ x=(x_0,x_1,\cdots),\ y=(y_0,y_1,\cdots)\in\Sigma(X)\qquad(2.1)$$

* 国家自然科学基金资助项目．

记$\sigma$为$\Sigma(X)$上的移位（自）映射，

$$\sigma((x_0,x_1,\cdots))=(x_1,x_2,\cdots),\ (x_0,x_1,\cdots)\in\Sigma(X)$$

则$(\Sigma(X),\ \sigma)$构成一单边符号动力系统．

当$\mathrm{card}(X)=N$为有限值时，即为符号动力系统$(\Sigma(N),\ \sigma)$．文[4]对此有详细讨论．下节我们将详细讨论$\mathrm{card}(X)=\omega_0$，即$X$为可列集时的情形．本节先讨论一般情况．

关于浑沌系统的定义，有许多种．本节分别采用文[1]的定义及Li-Yorke的定义．

**定义2.1**　设$(X,\ d)$为度量空间，$f:X\to X$连续．称$f$是浑沌的（或称$(X,f)$是浑沌系统），如果

（i）$f$敏感地依赖于初值，即存在$\delta>0$，使得对于$X$中的任一点$x$的任一邻域$\mathscr{N}$，存在$y\in\mathscr{N}$及$n\geqslant 0$，使

$$d(f^n(x),f^n(y))>\delta$$

(ii)　$f$为拓扑传递的，即$f$存在一条在$X$中稠密的轨道；

(iii)　$f$的周期点集在$X$中稠密．

我们有如下结论．

**定理2.1**　符号动力系统$(\Sigma(X),\ \sigma)$是一浑沌系统(在定义2.1的意义下)，其中$X$为可分度量空间，$\mathrm{card}(X)\geqslant 2$．

**证明**　我们只需验证定义2.1中的条件(i)～(iii)．

（i）　取$\delta_0$为某正常数，满足性质：$\forall a\in X$，$\exists b\in X$，使得$d(a,b)>\delta_0$．下证这样的$\delta$是存在的．

当$\inf\limits_{a\in X}\sup\limits_{b\in X}d(a,b)=+\infty$时，显然存在$\delta_0>0$，使$\forall a\in X$，$\exists b\in X$，满足$d(a,b)>\delta_0$．不然，则$\forall\delta_0>0$，$\exists a_0\in X$，$\forall b\in X$，$d(a_0,b)\leqslant\delta_0$，故$\sup\limits_b d(a_0,b)\leqslant\delta_0$，故$\inf\limits_a\sup\limits_b d(a,b)\leqslant\sup\limits_b d(a_0,b)\leqslant\delta_0<+\infty$，矛盾！

当$\inf\limits_{a\in X}\sup\limits_{b\in X}d(a,b)\neq+\infty$时，可取$\delta_0=(1/2)\inf\limits_{a\in X}\sup\limits_{b\in X}d(a,b)$．因为$\mathrm{card}(X)\geqslant 2$，故存在$a_0$，$b_0\in X$，使$d(a_0,b_0)\neq 0$．则$\forall a\in X$，

$$\sup_{b\in X}d(a,b)\geqslant\max\{d(a,a_0),\ d(a,b_0)\}\geqslant\frac{d(a,a_0)+d(a,b_0)}{2}\geqslant\frac{1}{2}d(a_0,b_0)>0$$

故有
$$\inf_{a\in X}\sup_{b\in X}d(a,b)\geqslant d(a_0,b_0)/2>0$$

所以　$0<\delta_0<+\infty$．故

$$\delta_0<\inf_{a\in X}\sup_{b\in X}d(a,b)\leqslant\sup_{b\in X}d(a,b),\qquad\forall a\in X$$

故　$\forall a\in X$，$\exists b\in X$，使$d(a,b)>\delta_0$．

取　　$\delta=\delta_0/(1+\delta_0)$

则对于$\Sigma(X)$中的任一点，$x\in X$及其任一邻域$\mathscr{N}$，作

$$y^{(k)}=(x_0,x_1,\cdots,x_k,y_{k+1},\cdots)$$

其中$y_{k+1}\in X$满足$d(x_{k+1},\ y_{k+1})>\delta_0$．当$k$足够大时，$y^{(k)}\in\mathscr{N}$，且

$$\rho(\sigma^{k+1}(x),\sigma^{k+1}(y^{(k)}))=\frac{d(x_{k+1},y_{k+1})}{1+d(x_{k+1},\ y_{k+1})}+\cdots>\frac{\delta_0}{1+\delta_0}=\delta$$

(ii)　因$X$可分，所以存在可数子集$A\subseteq X$，使$\bar{A}=X$．

因$(\Sigma(A),\ \sigma)$为拓扑传递的[2]，故存在$z\in\Sigma(A)$，使

$$\mathrm{cl}\{\sigma^k(z),\ k=0,1,\cdots\}\supseteq\Sigma(A)$$

$\forall \varepsilon>0$，$\forall x=(x_0,x_1,\cdots)\in\Sigma(X)$，对$x_k$，存在$y_k\in A$，使

$$d(x_k,y_k)<\varepsilon/4,\qquad k=0,1,\cdots$$

作$y=(y_0,y_1,\cdots)$，则对$y\in\Sigma(A)$，存在$n>0$，使

$$\rho(\sigma^n(z),\ y)<\varepsilon/2$$

故
$$\rho(x,\sigma^n(z))\leqslant\rho(x,y)+\rho(y,\ \sigma^n(z))<\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{1}{2^i}\ \frac{\varepsilon}{4+\varepsilon}+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$$

(iii) $\forall x\in\Sigma(X)$，作

$$y^{(k)}=(x_0,x_1,\cdots,x_k,x_0,x_1,\cdots,x_k,\cdots)$$

则$y^{(k)}$为$\sigma$的周期点；且对任$\varepsilon>0$，存在足够大的$k$，使得

$$\rho(y^{(k)},\ x)<\varepsilon$$ □

定理得证。

当$(X,\ d)$为任一度量空间，$\mathrm{card}(X)\geqslant2$时，由定理2.1 的证明过程易见，符号动力系统$(\Sigma(X),\ \sigma)$具有性质：(i)$\sigma$敏感地依赖于初值；(ii)$\sigma$的周期点集在$\Sigma(X)$中稠密。但$\sigma$不一定为拓扑传递的。故$(\Sigma(X),\ \sigma)$不一定为定义2.1意义下的浑沌系统。定理 2.1 说明，空间$X$的可分性是$(\Sigma(X),\ \sigma)$为浑沌系统的充分条件。我们自然要问，它是否也是必要条件？回答是肯定的。

**定理2.2** 设$(X,\ d)$为度量空间，$\mathrm{card}(X)\geqslant2$，空间$\Sigma(X)$上的度量$\rho$同(2.1)式。则$(\Sigma(X),\ \sigma)$在定义2.1的意义下为浑沌系统的充分必要条件是$X$为可分的。

**证明** 只证必要性即可。

因$\sigma$为拓扑传递的，即存在$z\in\Sigma(X)$，使

$$\mathrm{cl}\{\sigma^n(z),\ n=0,1,\cdots\}=\Sigma(X)$$

作集合$Z=\{z_i,i=0,1,\cdots\}$，则$Z$为$X$的可数子集。

$\forall\varepsilon>0$，$\forall a\in X$，作$x=(a,x_1,x_2,\cdots)\in\Sigma(X)$，则存在$n>0$，使

$$\rho(\sigma^n(z),\ x)<\varepsilon/(1+\varepsilon)$$

从而
$$\frac{d(z_n,a)}{1+d(z_n,a)}\leqslant\rho(\sigma^n(z),\ x)<\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$$

即
$$d(z_n,a)<\varepsilon$$

故$\mathrm{cl}Z=X$，即$X$为可分的。证毕。 □

定理2.2说明，在度量空间中推广符号动力系统并保持其浑沌性时，可分空间是一个极至。这说明本文的推广在某种意义下是最一般的。

另一方面，对于一般度量空间$X$，我们来讨论一般符号动力系统$(\Sigma(X),\ \sigma)$的在定义2.1的意义下浑沌的子移位$\sigma'$。定理2.2提示这种子移位的一种构造方式为：取$X$的可分子空间$A$，则子移位$\sigma|_{\Sigma(A)}$为浑沌的，即有下面的定理。

**定理2.3** 设$X$为度量空间，$\mathrm{card}(X)\geqslant2$。则子移位$\sigma|_{\Sigma(A)}$为在定义2.1的意义下浑沌的充分必要条件为$A$是$X$的可分子空间，且$\mathrm{card}(A)\geqslant2$。 □

下面讨论一般符号动力系统$(\Sigma(X),\ \sigma)$在Li-Yorke意义下的浑沌性。

Li和Yorke关于线段自映射的著名定理[7]现已成为刻划浑沌本质的数学定义之一。文[9、10]对浑沌的Li-Yorke定义作了剖析和改进。我们下面采用的定义相当于文[10]中强浑沌(strongly chaotic)的定义。

**定义2.2** 设$(M,d)$为度量空间，$f:M\to M$连续。称系统$(M,f)$为在Li-Yorke意义下

（强）浑沌的，如果存在不可数子集$S\subseteq M$满足$f(S)\subsetneq S\subseteq\Omega(f)-P(f)$，且

A) $\lim\limits_{n\to\infty}\sup d(f^n(x),f^n(y))>0,\quad \forall x,y\in S,\ x\neq y,$

B) $\lim\limits_{n\to\infty}\inf d(f^n(x),f^n(y))=0,\quad \forall x,y\in S,$

C) $\lim\limits_{n\to\infty}\sup d(f^n(x),f^n(p))>0,\quad \forall x\in S,\forall p\in P(f),$

D) $\lim\limits_{n\to\infty}\inf d(f^n(x),f^n(p))>0,\quad \forall x\in S,\forall p\in P(f)-\{e\},$

其中$e$是$f$的某个不动点，$S$称为$f$的(强)浑沌集.

**定理2.4** 符号动力系统$(\Sigma(X),\sigma)$在Li-Yorke意义下是浑沌的，其中$X$为可分度量空间，$\mathrm{card}(X)\geqslant 2$. 当$\mathrm{card}(X)=\omega$时，存在$\sigma$的浑沌集$S$，使对于任一可数子集$A\subset X$，$S\not\subset\Sigma(A)$.

**证明** 因为$X$为可分空间，所以$\mathrm{card}(X)\leqslant\omega$. 当$\mathrm{card}(X)$为有限时，证明同[8]. 当$\mathrm{card}(X)=\omega_0$时，证明参见[2]. 下面讨论$\mathrm{card}(X)=\omega$的情况下浑沌集$S$的构造.

任取两个不同的点$a$，$b\in X$. 设$\alpha:(0,1)\to X-\{a\}$为一满映射. 对于任一实数$r\in(0,1)$，作$x^r$如下：

$$\begin{cases} x_0^r=b \\ x_{k^2}^r=\begin{cases} a, & [kr]-[(k-1)r]=1 \\ b, & [kr]-[(k-1)r]=0 \end{cases} \\ x_l^r=\begin{cases} b, & k^2+1\leqslant l\leqslant (k+1)^2-2 \\ \alpha(r). & l=(k+1)^2-1 \end{cases} \end{cases}$$

其中$k=1,2,\cdots$，$[\cdot]$表示取整数部分.

则$x^r=(x_0^r,x_1^r,\cdots)\in\Sigma(X)$，记

$$S_0=\{x^r: r\in(0,1)\},\quad S=\bigcup_{k=0}^{+\infty}\sigma^k(S_0)=\{\sigma^k(x^r): x^r\in S_0,k\geqslant 0\}$$

则类似于[8]可证$S$即为$\sigma$的浑沌集. 例如，取$e=(b,b,\cdots)$，则定义2.2中的条件D)成立. 因为不难证明$\omega(\sigma^k(x),\sigma)$ $(\forall k\geqslant 0,\ \forall x\in S)$中不含除$e$外的其它周期点.

设$A$为$X$的任一可数子集，则存在$\bar{x}\in X-A$. 取$\bar{r}\in(0,1)$，使$\alpha(\bar{r})=\bar{x}$，则$x^{\bar{r}}=(x_0^{\bar{r}},x_1^{\bar{r}},\cdots)\bar{\in}\Sigma(A)$，从而$S\not\subset\Sigma(A)$. 定理得证. □

顺便指出，上述构造浑沌集的方法可适用于$2\leqslant\mathrm{card}(X)\leqslant\omega$的各种情况. 另外，我们还可考虑$(\Sigma(X),\sigma)$的无限型子移位（由一个无穷阶转移矩阵决定）的性质. 这些性质有些与有限型子移位的相似，也有些是特有的. 我们拟另文讨论.

## 三、card(X)＝$\omega_0$的情况

本节讨论上节的一个特例. 考虑

$$X=Z^+=\{0,1,2,\cdots\}$$

$Z^+$上的度量$d$为

$$d(a,b)=\begin{cases}0 & a=b \\ 1 & a\neq b\end{cases}\qquad a,b\in Z^+$$

记 $\Sigma(Z)=\prod_{i=0}^{+\infty}S_i,\qquad S_i=Z^+,i=0,1,\cdots$

$\Sigma(Z)$上的度量$\rho$定义为

$$\rho(x,y)=\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{1}{2^i}d(x_i,y_i),\ x=(x_0,x_1,\cdots),\ y=(y_0,y_1,\cdots)\in\Sigma(Z)$$

记$\sigma$为$\Sigma(Z)$上的移位映射，则$(\Sigma(Z),\sigma)$构成一单边符号动力系统.

文[2]讨论了$(\Sigma(Z),\sigma)$的性质，并证明了下面的定理.

**定理3.1** 符号动力系统$(\Sigma(Z),\sigma)$在Li-Yorke意义下是浑沌的，且存在浑沌集

$$S\not\subset\bigcup_{N=1}^{+\infty}\Sigma(N)\qquad\square$$

由定理2.1我们有

**定理3.2** 符号动力系统$(\Sigma(Z),\sigma)$在定义2.1的意义下是浑沌的. □

## 四、应用于一般连续自映射

本节利用符号动力系统$(\Sigma(Z),\sigma)$讨论一般拓扑空间及度量空间上连续自映射的浑沌性质，给出了一般连续自映射存在无穷阶（伪）移位不变集的充分必要条件.这些结果在文[3]中有详细的论证. 这里只叙述主要定义及结论.

**定义4.1** 设$X$为拓扑空间，$f:X\to X$为连续映射. $\Lambda$是$f$的不变集，即$f(\Lambda)\subseteq\Lambda$. 结果存在同胚$h:\Lambda\to\Sigma(Z)$，使得下列图表可交换，

$$\begin{array}{ccc}\Lambda & \xrightarrow{f} & \Lambda\\ h\downarrow & & \downarrow h\\ \Sigma(Z) & \xrightarrow{\sigma} & \Sigma(Z)\end{array}$$

即$f|_\Lambda$与$\sigma$拓扑共轭，则称$\Lambda$为$f$的（或离散半动力系统$(X,f)$的）无穷阶移位不变集. 若$h$仅为连续、满映射，即$f|_\Lambda$与$\sigma$半拓扑共轭，则称$\Lambda$为$f$的(或$(X,f)$的)无穷阶伪移位不变集.

**定理4.1** 设$f:X\to X$连续，$X$为列紧的$T_1$空间. 则$f$有无穷阶伪移位不变集的充要条件是存在非空闭集$A_0,A_1,\cdots\subseteq X$，满足

(i) $f(A_j)\supseteq\bigcup_{i=0}^{+\infty}A_i,\qquad j=0,1,\cdots$;

(ii) 存在开集$O_0,O_1,\cdots$，使

$$A_i\subseteq O_i,\text{且}O_i\cap\Big(\bigcup_{j=0,j\neq i}^{+\infty}A_j\Big)=\phi,\qquad i=0,1,\cdots\qquad\square$$

**定理4.2** 设$f:X\to X$连续，$(X,d)$为完备度量空间. 则$f$有无穷阶移位不变集的充要条件是存在非空闭集$A_0,A_1,\cdots\subseteq X$，满足

(i) $f(A_j)\supseteq\bigcup_{i=0}^{+\infty}A_i,\qquad j=0,1,\cdots$;

(ii) 存在开集$O_0,O_1,\cdots$，使

$$A_i \subsetneq O_i,\ 且O_i \cap \left( \bigcup_{j=0, j\neq i}^{+\infty} A_j \right) = \phi, \qquad i=0,1,\cdots;$$

(iii) $\lim\limits_{n\to+\infty} D\left( \bigcap\limits_{s=0}^{n} f^{-s}(A_{i_s}) \right) = 0$, $\forall\,(i_0, i_1, \cdots) \in \Sigma(Z)$. 其中$D(A)$ 表示子集$A$的直径，

$D(A) = \sup\limits_{a_1, a_2 \in A} d(a_1, a_2)$. □

定理4.1及定理4.2中的无穷阶（伪）移位不变集可表为：

$$A = \bigcup_{(i_0, i_1, \cdots) \in \Sigma(Z)} \bigcap_{s=0}^{+\infty} f^{-s}(A_{i_s})$$

粗略地说，$A$为可列个Cantor集的并．它是非紧致的，完全的，完全不连通的．除了紧性外，其它性质与Cantor集相同．

## 五、结 束 语

本文只讨论了单边符号动力系统的情况．对于双边符号动力系统，也有相应的结果．

浑沌理论中，还有许多问题有待更深入的研究[6]．而浑沌的统一数学定义就是一个非常重要的课题．下列几种定义是目前理论研究中经常被采用的：1) Li-Yorke定义；2) Devaney定义；3) Smale马蹄；4) 存在横截同宿点；5) 拓扑混合；6) 符号动力系统．其中6) 蕴涵1)、2)、5)，6)与3) 拓扑共轭，4) 存在子系统与6) 拓扑共轭．可见，符号动力系统是一个典型的浑沌系统，对它的深入研究将有助于浑沌定义的最终形成．而且它本身也是研究具体系统浑沌性质的强有力工具．

## 参 考 文 献


[1] Devaney, R., *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc. (1987).

[2] 傅新楚，非紧致符号空间上移位映射的 Li-Yorke 浑沌性态，非线性动力学研讨会交流论文，中国科技大学 (1990).

[3] 傅新楚，自映射的无穷阶移位不变集，同上，并刊于《青年论文荟萃——常微分方程专辑》，科学出版社 (1991).

[4] Wiggins, S., *Global Bifurcations and Chaos: Analytical Methods*, Springer-Verlag (1988).

[5] 张筑生，《微分动力系统原理》，科学出版社 (1987).

[6] 郭友中、周焕文，分叉、怪引子、阵发性与浑沌，力学进展，14(3) (1984), 255—274.

[7] Li, T. Y. and J. A. Yorke, Period three implies chaos, *Amer. Math. Monthly*, 82 (1975), 985—992.

[8] 周作领，转移自映射的紊动性状，数学学报，30(2) (1987), 284—288.

[9] 周作领，紊动与全紊动，科学通报，(4) (1987), 248—250.

[10] Zhou, Z. L. (周作领), The topological Markov chain, *Acta Math. Sinica* (New Series), 4(4) (1988), 330—337.

# Chaotic Behaviour of the General Symbolic Dynamics

Fu Xin-chu
(*Wuhan Institute of Mathematical Sciences, Wuhan*)

Chou Huan-wen
(*Wuhan University, Wuhan*)

**Abstract**

This paper extends symbolic dynamics to general cases. Some chaotic properties and applications of the general symbolic dynamics $(\Sigma(X), \sigma)$ and its special cases are discussed, where $X$ is a separable metric space.

**Key words** symbolic dynamics, chaos, shift-invariant set