

# 特征化积分格式的设计及其 在浅水波问题中的应用\*

刘 儒 勋

(中国科技大学数学系, 1989年10月11日收到)

## 摘 要

本文介绍一种简单而又行之有效的顺风型格式——特征化积分格式的设计方法及应用技术, 用这种方法设计的顺风型格式不受方程有型性的限制, 容易推广, 又能比较灵活地调节数值耗散性, 使之适用不同的间断解的要求。

本文利用这种方法作了非线性水波在岸上的变形、破碎过程的数值模拟, 结果表明方法稳定、有效; 同时作了二维溃坝灾害的数值模拟, 表明方法向多维推广的简单、可行性。

**关键词** 特征线 数值模拟 浅水波问题

## 一、引 言

现今对非线性波问题的顺风格式的设计引起极大的重视, 这不仅因为这类格式具有单调、稳定、耗散效应适中、色散效应受到抑制的优点, 而且在于它体现了客观物理实质, 反映了扰动的传播规律。从已有的大量工作<sup>[1~6]</sup>看来, 实现顺风格式的设计仍多限于守恒方程形式, 而且都要构造数值流向量的复杂形式, 理论基础也比较复杂, 技巧性强, 难以推广和灵活运用。

本文提出一种全然不同的途径——特征化积分法。这是在作者的以往工作<sup>[6~13]</sup>上的一种总结和提高。这种方法符合物理实际, 又不限于守恒型控制方程, 容易向多元、多维推广, 尤其是对数值耗散性效应的调节、控制比较灵活, 适应于不同的间断解问题和正、反问题的数值解。方法的思想简单、直观, 理论基础明确。

考虑简单的模型方程

$$\begin{cases} u_x + au_x = h(x, t), & a = \text{常数} > 0 \\ u(x, 0) = u^0(x) \end{cases} \quad (1.1)$$

$$(1.2)$$

记特征线

$$c: dx = a dt, \text{ 或 } x - at = \text{常数} \quad (1.3)$$

则容易得到(1.1) + (1.2)的准确解的积分表示

\* 戴世强推荐。

$$u(x, t) = u^0(x - at) + \int_0^t h(\xi - a(t - \tau), \tau) d\tau \quad (1.4)$$

更进一步, 考虑常系数方程组初值问题

$$\begin{cases} \mathbf{u}_t + \mathbf{a}\mathbf{u}_x = \mathbf{h}(x, t) \end{cases} \quad (1.5)$$

$$\begin{cases} \mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}^0(x) \end{cases} \quad (1.6)$$

式中  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T$ ,  $\mathbf{h} = (h_1, h_2, \dots, h_n)^T$ ,  $\mathbf{a} = (a_{ij})_{n \times n}$  为系数矩阵, 若系数矩阵  $\mathbf{a}$  有互异实特征值及无关的相应的左特征向量组 (按 Lax 意义下的双曲型)

$$\lambda_i; \mathbf{w}_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1.7)$$

则 (1.5) + (1.6) 也有联立的积分形式给出的准确解

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_i \cdot \mathbf{u}(x, t) &= \mathbf{w}_i \cdot \mathbf{u}^0(x - \lambda_i t) + \int_0^t \mathbf{w}_i \cdot \mathbf{h}(\xi - \lambda_i(t - \tau), \tau) d\tau \\ &\quad (i = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (1.8)$$

这是由特征化常微分方程组

$$(\mathbf{w}_i \cdot d\mathbf{u})_{c_i} = \mathbf{w}_i \cdot \mathbf{h} dt \quad (1.9)$$

$$c_i: dx = \lambda_i dt, \text{ 或 } x - \lambda_i t = \text{常数} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1.10)$$

的沿特征线积分得到的。

积分方程 (1.4) 和 (1.8) 分别给出了初值问题 (1.1) + (1.2) 和 (1.5) + (1.6) 的准确表达式。在右函数  $\mathbf{h}$  简单可积情况下即可求积得到解析表达。由这些积分可见, 在  $x-t$  平面上  $(x, t)$  点的解是由初始扰动  $\mathbf{u}^0(x)$  及右函数的传播、叠加而成, 而这些叠加、传播严格沿特征线  $c_i$  进行, 论文 [11~14] 还对间断解问题、反问题作了相应的讨论和分析。即使对非线性问题, 如  $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{u})$ ,  $\mathbf{h} = \mathbf{h}(x, t, \mathbf{u}, \mathbf{u}_x)$ , 也可以建立其沿“特征线”的特征化非线性常微分方程组, 以及沿特征线积分方程形式给出的解式。这种积分形式或特征化常数组正是我们数值方法的基础。也是迭代校正, 提高数值解精度, 调节数值耗散效应的依据。

本文的第二节将简要介绍特征积分化方程的建立和离散化格式设计的基本点; 第三节介绍利用这种方法对非线性波在缓坡上的爬升, 变形和回落过程的模拟及结果, 对二维溃坝灾害的数值试验。最后列出必要的参考文献。

## 二、特征化积分格式的设计

### 2.1 不失一般性, 考虑一维多元双曲组

$$\begin{cases} \mathbf{u}_t + (\mathbf{f}(\mathbf{u}))_x = \mathbf{h}, \mathbf{a}(\mathbf{u}) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \end{cases} \quad (2.1)$$

$$\begin{cases} \mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}^0(x) \end{cases} \quad (2.2)$$

采用其拟线性形式

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{a}(\mathbf{u})\mathbf{u}_x = \mathbf{h} \quad (2.1)$$

其中  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T$ ,  $\mathbf{h} = (h_1, h_2, \dots, h_n)^T$ ,  $\mathbf{a} = (a_{ij}(\mathbf{u}))_{n \times n}$  为  $\mathbf{f} = (f_1(\mathbf{u}), \dots, f_n(\mathbf{u}))^T$  的 Jacobi 矩阵, 它有几个互异的实特征和相应的线性无关的左特征向量组

$$\lambda_i(\mathbf{u}), \mathbf{w}_i(\mathbf{u}) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.3)$$

仿照第一节, 也引入“特征线”

$$c_i: dx = \lambda_i(\mathbf{u}) dt \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.4)$$



$$4. \quad (a) \quad \tilde{u}_i^n := \begin{cases} u_i^n, & \tilde{x}_i^* < x_{j+1/2}, \\ u_{j+1}^n, & \tilde{x}_i^* > x_{j+1/2}, \end{cases} \quad (w_i)^n \tilde{x}_i^* := w_i(u_i^n) \quad (2.14a)$$

$$(b) \quad \tilde{u}_i^n := (1-\delta)u_i^n + \delta u_{j+1}^n, \quad \delta = (x_{j+1} - \tilde{x}_i^*) / \Delta x \quad (2.14b)$$

$$5. \quad (w_i)^n \tilde{x}_i^* \cdot \tilde{u}_{j+1/2}^{n+1/2} = (w_i)^n \tilde{x}_i^* \cdot u_i^n + (w_i)^n \tilde{x}_i^* \cdot h_i^n \Delta t / 2 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (2.15)$$

在上述预估计算中,特征线 $c_i$ 交点 $(\tilde{x}_i^*, t_n)$ 上各量的计算,可以根据需要采用4.(a)形式(无耗散性)或4.(b)形式(具有加权滤波性质的数值耗散).最后得到相应于不同特征线 $c_i$ ,即 $\lambda_i$ 的一个代数方程,共构成 $n$ 个方程组求解 $\tilde{u}_{n+1/2}$ .以此为初次近似,根据(2.9)和(2.10)的梯形积分公式,进行校正计算.

校正计算 ( $i=1, 2, \dots, n$ )

$$1. \quad s := \text{sign} \left( (w_i \cdot u)_i^n + (\bar{w}_i)_{j+1/2}^{n+1/2} \cdot \tilde{u}_{j+1/2}^{n+1/2} \right) \quad (2.16)$$

$$2. \quad L := \lambda_i \left( (u_{j+1/2+s/2}^n + \tilde{u}_{j+1/2}^{n+1/2}) / 2 \right) \quad (2.17)$$

$$3. \quad x_i^* := x_{j+1/2} - L \Delta t / 2 \quad (2.18)$$

$$4. \quad (a) \quad u_i^n := (1-\delta)u_i^n + \delta u_{j+1}^n, \quad \delta := (x_{j+1} - x_i^*) / \Delta x \quad (2.19a)$$

$$(b) \quad u_i^n := \begin{cases} u_j^n, & x_i^* \leq x_{j+1/2} \\ u_{j+1}^n, & x_i^* > x_{j+1/2} \end{cases} \quad (2.19b)$$

$$5. \quad \left. \begin{aligned} \bar{u} &:= (u_i^n + \tilde{u}_{j+1/2}^{n+1/2}) / 2 \\ \bar{w} &:= w(\bar{u}), \quad \bar{h} := h(\bar{u}) \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

$$6. \quad \bar{w}_i \cdot u_{j+1/2}^{n+1/2} = \bar{w}_i \cdot (u_i^n + \bar{h} \Delta t / 2) \quad (2.21)$$

在上述各步中,4.(a)是线性插值求 $u_i^n$ ,这意味着是引入了数值耗散效应;而4.(b)则不然,它不引入数值耗散效应.因而通过采用4.(a)或4.(b)次数之不同就能调节计算过程的耗散效果.此外,第5步可采用下式代替

$$\bar{u} = (u_i^n + \tilde{u}_{j+1/2}^{n+1/2}) / 2, \quad \bar{w}_i = (w_i(u_i^n) + w_i(u_{j+1/2}^{n+1/2})) / 2 \quad (2.20)'$$

利用预估计(2.11)~(2.15)和校正计算(2.16)~(2.21)我们最后得到中格点值 $u_{j+1/2}^{n+1/2}$ .然后,以这些值为基础采用相似的过程计算整格点 $(x_j, t_{n+1})$ 上的值 $u_j^{n+1}$ .

### 2.3 在有激波存在的情况

我们可以利用激波、稀疏波的识别采用对策<sup>[9]</sup>,也可采用随机选择法<sup>[10]</sup>.例如后者

#### 1. 计算

$$\left. \begin{aligned} l &:= \lambda_i(u_j^n), & r &:= \lambda_i(u_{j+1}^n) \\ u_i &:= u_j^n, & u_i^l &:= u_{j+1}^n \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

2. 若 $l > r$ ,这是微波结构(图2(a)),则计算

$$\left. \begin{aligned} s &:= (l+r)/2 \\ \xi &:= 2\theta\Delta x/\Delta t \quad \left(\theta \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right) \end{aligned} \right\} \quad (2.23)$$

$$\left. \begin{aligned} w_i^n \cdot u_{j+1/2}^{n+1/2} &= w_i^n \cdot (u_i^n + h(u_i^n) \Delta t/2) && (\text{当 } \xi < s) \\ w_r^n \cdot u_{j+1/2}^{n+1/2} &= w_r^n \cdot (u_r^n + h(u_r^n) \Delta t/2) && (\text{当 } \xi > s) \end{aligned} \right\} \quad (2.24)$$

其中  $\theta$  为均匀分布于  $[-1/2, 1/2]$  上的随机数.

3. 若  $l \leq r$ , 为稀疏波结构, 计算并形成

$$\left. \begin{aligned} w_l^n \cdot u_{j+1/2}^{n+1/2} &= w_l^n \cdot (u_l^n + h(u_l^n) \Delta t/2) && (\text{当 } \xi < l) \\ \bar{w} \cdot u_{j+1/2}^{n+1/2} &= \bar{w} (u + h(\bar{u}) \Delta t/2) && (\text{当 } l < \xi < r) \\ w_r^n \cdot u_{j+1/2}^{n+1/2} &= w_r^n \cdot (u_r^n + h(u_r^n) \Delta t/2) && (\text{当 } \xi > r) \end{aligned} \right\} \quad (2.25)$$

其中

$$\bar{u} = u_l + (u_r - u_l) (\xi - l) / (r - l) \quad (2.26)$$

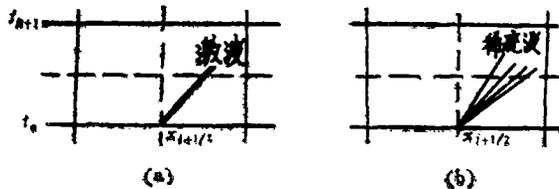


图 2

上述过程是基于求解Riemann问题[11~15]所提的拟随机选择法<sup>[13~15]</sup>, 仅当间断解情况下采用. 这样不仅较少引入数值耗散, 并能保持间断解的锐利形态. 此外, 类似第二节 2.2, 这里也需采用预估校正的两个过程, 以提高解的精度. 方法也是在校正步时对  $\lambda, w$  等取特征线上的平均值代替.

显然, 如果能有效, 灵活地运用上述所述三组计算步骤, 特别是调节耗散性, 控制色散性和提高数值解的精度, 这是经验和技巧问题. 若是灵活, 技巧, 越能得到好的模拟结果.

2.4. 对于多维问题 可通过分裂方法或投影特征线方法构造多步分裂续接的特征化积分格式.

### 三、在浅水波问题中的应用

特征化积分方法有很强的适应性. 例如在文献[6~13]中, 已部分采用了方法的思想, 应用到不同的问题并得到了较满意的结果. 本文将进一步灵活地利用特征化积分方法, 模拟两类浅水波问题.

### 3.1 非线性浅水波在缓坡上爬升、变形的模拟

模拟波浪在岸滩上的爬高、变形、破碎和回落的过程对海岸工程有很大意义<sup>[16,20]</sup>。论文[16,17]提出了不同的方法,进行了简化模型的数值模拟试验,取得了很满意的模拟效果和图形。但是,其中论文[17]所提的主格式本身不是很好的,甚至具有非线性不稳定性。只是因为作者们采用了必须的滤波手段才保证了非线性稳定,并有效地抑制了数值色散效应。这样同时也引入了数值耗散。

本文采用上述所提论文<sup>[17]</sup>的模型,经等价变换化成拟线性形式

$$u_t + Au_x = h(x, t, u) \tag{3.1}$$

其中

$$\left. \begin{aligned} u &= \begin{pmatrix} h \\ u \end{pmatrix} & A &= \begin{pmatrix} u & h \\ g & u \end{pmatrix} \\ & & & 0 \\ h &= \left( \frac{E}{h} (hu)_{xx} + \frac{h}{3} (hu)_{xxx} + g \frac{h_0}{c^2 x} - g \frac{|u| \operatorname{sign}(h)}{c_0^2 h^{4/3}} \right) \end{aligned} \right\} \tag{3.2}$$

$h$ 为总深,  $g$ 为重力加速度,  $u$ 为波速,  $E$ 为涡动粘性系数,  $c$ 为Chezy系数

$$h = h_0 + \xi, \quad c = c_0 h^{1/6} \tag{3.3}$$

$\xi$ 为波面升高。认为左边为稳定海区,取条件

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \tag{3.4}$$

右边为平直缓坡,倾角  $\beta$ 。也采用论文[17]中的处理,认为一薄层水代替右侧自由(活动)边界。

$$hu = 0, \quad h = h_0 = \delta \tag{3.5}$$

在水面上引入一孤立波

$$s(x, 0) = A \operatorname{sech}^2 \left( \sqrt{\frac{3A}{4h_0}} \frac{x - x_a}{h_0} \right) \tag{3.6}$$

$x_a$ 为孤立波中心位置,  $A$ 为初始波高。

我们算例取  $\tan \beta = 1/50$ ,  $h_0 = 10\text{m}$ ,  $A = 1\text{m}$ ,  $\delta = 0.001\text{m}$ ,  $E = 0$ ,  $c_0 = 100\text{m}^{1/2}/\text{s}$ 。首先经无量纲化处理,将方程全部无量纲化。然后设计特征化积分格式,对右函数中流量的高阶微商采用三层网格量沿特征线近似。计算结果表明是与[17]相近的。特别是这里不引入滤波过程,方法是稳定的。如图3示。

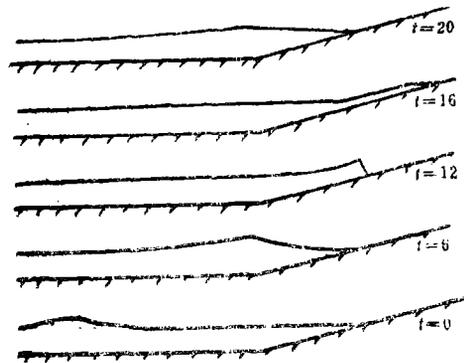


图 3

### 3.2 二维溃坝灾害的数值试验

我们考虑二维浅水波模型方程

$$u_t + Au_x + Bu_y = h \tag{3.7}$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u} &= \begin{pmatrix} \eta \\ u \\ v \end{pmatrix} & \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} u & \eta & 0 \\ g & u & 0 \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix} \\ \mathbf{B} &= \begin{pmatrix} v & 0 & \eta \\ 0 & v & 0 \\ g & 0 & v \end{pmatrix} & \mathbf{h} &= \begin{pmatrix} 0 \\ R_x + gh_x \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

$\eta$ 为总水深,  $u, v$ 分别为 $x, y$ 方向速度,  $R_x$ 是河床的摩擦效应项.

$$R_x = -gu^2/c^2\eta, \quad c = 52\text{m}^{1/2}/\text{s} \quad (3.9)$$

初条件为

$$\eta = \begin{cases} 100\text{m} & (x \leq 0) \\ 1\text{m} & (x > 0) \end{cases} \quad u = v = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ 0 & (x > 0) \end{cases} \quad (3.10)$$

同样, 先化成无量纲化形式. 采用分裂方法

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u}_t + \mathbf{A}\mathbf{u}_x &= 0 \\ \mathbf{u}_t + \mathbf{B}\mathbf{u}_y &= 0 \\ \frac{d\mathbf{u}}{dt} &= \mathbf{h} \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

然后设计三步分裂续接的特征化积分格式. 计算结果见图4(a)、(b). 图4(a)在 $t=2$ (实线) $t=4$ (虚线)的水深, 图4(b)则给出流速分布图.

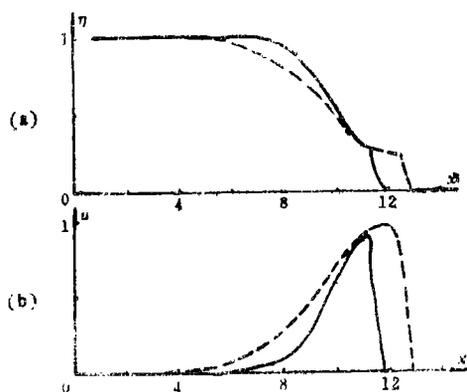


图 4

作者对李百浩先生深表感谢, 他计算了第一个例子. 也对夏南、魏勇和王如云先生表示感谢, 同他们的多次有趣的讨论颇受启发.

### 参 考 文 献

- [1] Lax, P. D., Shock wave and entropy, *Proc. Symposium at the University of Wisconsin* (1991).
- [2] Harten, A., *SIAM J. Numer. Anal.*, **21** (1984), 1.
- [3] Osher, S., *SIAM J. Numer. Anal.*, **22** (1985), 947.
- [4] Munz, C.-D., *J. Comp. Phys.*, **77** (1988), 78.
- [5] Engquist, B. B. and S. Osher, *Math. of Computation*, **36** (1981), 154.
- [6] 刘儒勋、李百浩, 中国科技大学学报, **16**(2)(1986).
- [7] 刘儒勋、魏勇, 计算物理, **3**(2) (1986).
- [8] 刘儒勋、李百浩, 计算物理, **4**(2) (1987).
- [9] 忻孝康、刘儒勋、蒋伯诚, 《计算流体力学》, 国防科技大学出版社 (1989).
- [10] 刘儒勋、李百浩, 中国科技大学学报, **19**(1) (1989).
- [11] Liu Ru-xun, *ACTA Mathematica Scientia*, **10**(1) (1990).
- [12] Liu Ru-xun, *Acta Mathematica Scientia*. (待发表)
- [13] 王如云、刘儒勋, 中国科技大学学报, **20**(1) (1990).
- [14] Glimm, J., *Comm. Pure & Appl. Math.*, **18** (1965), 697.

- [15] 刘儒勋, 力学与实践, 6(4) (1984).  
[16] 唐建华, 海洋学报, (6) (1984), 692.  
[17] 邹光远、陈跃松, 力学学报, 21(1)(1989).  
[18] 吴坚, 刘儒勋、李百浩, 计算物理。(待发表)  
[19] Kinnmark, I., The shallow water wave equations: formulation, analysis and application, *Lecture Notes in Engineering* (13) (1985).  
[20] 文圣常、余宙文, 《海浪理论与计算原理》, 科学出版社 (1985).

## The Design of Characterizing-Integral Schemes and the Application to the Shallow Water Wave Problems

Liu Ru-xun

(*Department of Mathematics, University of Sci. & Tech. of China, Hefei*)

### Abstract

In this paper a new approach for designing upwind type schemes—the characterizing-integral method and its applied skills are introduced. The method is simple, convenient and effective. And the method isn't only limited to conservation laws unlike other methods. It may be easily extended to multi-dimension problems. Furthermore, the numerical dissipation of the method can be flexibly regulated, so that it is especially suitable for solving various discontinuity problems.

The paper shows us how to use this approach to simulate deformation and breaking of a nonlinear shallow water wave on a gentle slope, and to compute two-dimensional dam failure problem.

**Key words** characteristics, numerical simulation, shallow water wave