应用数学和力学，第13卷第4期(1992年4月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

拟线性方程边值问题的跳跃层个数*

程建华　　祝　清

（合肥 安徽大学数学系，1990年12月25日收到）

摘　　要

本文讨论了拟线性微分方程边值问题的跳跃层个数．并且指出，当文献[1]所给判断函数恒等于零时，原方程必须重新讨论．本文给出几例以示说明．

关键词　跳跃层　判断函数　零点　影　逼近

一、引　　言

R．Lutz与T．Sari在文献[1]中讨论了拟线性方程：

$$(P_\varepsilon)\quad \begin{cases}\varepsilon\ddot{x}+f(t,x)\dot{x}+g(t,x)=0\\ x(0)=A,\ x(1)=B,\ \varepsilon\sim 0,\ \varepsilon>0\end{cases}\tag{1.1}$$

仅在一点处产生跳跃层的条件．同样地，上述方程(1.1)了解可在两点、有限多个点、无穷可数多个点以及“所谓的在整个区间[0,1]上”产生跳跃．由于满足一定的条件（此条件已在[1]中给出）以后，上述方程解是否产生跳跃，就是看由[1]中所定义的两曲线$s_1(t)$与$s_2(t)$在(0,1)中是否横截相交，即判断函数$F_1=F_1(t,u_2(t))$在(0,1)上是否存在一阶零点，现在研究多个跳跃层情况，就是研究判断函数

$$F_1(t,u_2(t))=\int_{u_1(t)}^{u_2(t)}f(t,s)ds$$

在(0,1)上存在几个一阶零点的个数问题．在多处产生跳跃层方程(1.1)之解有着明显的物理意义与几何意义．另外，对判断函数$F_1(t,u_2(t))\equiv 0$情形应给予特别注意．下面我们着重通过几个例子来说明多个跳跃层存在问题．

二、多个跳跃层的存在性

假定$t^*<\bar{t}^*(t^*,\bar{t}^*\in(0,1))$是判断函数$F_1=F_1(t,u_2(t))$的两个一阶零点，那么函数$F_1=F_1(t,u_2(t))$的大致几何形象只能是如图1的两种图形．

* 许政范推荐．
1990年3月23日第一次收到．

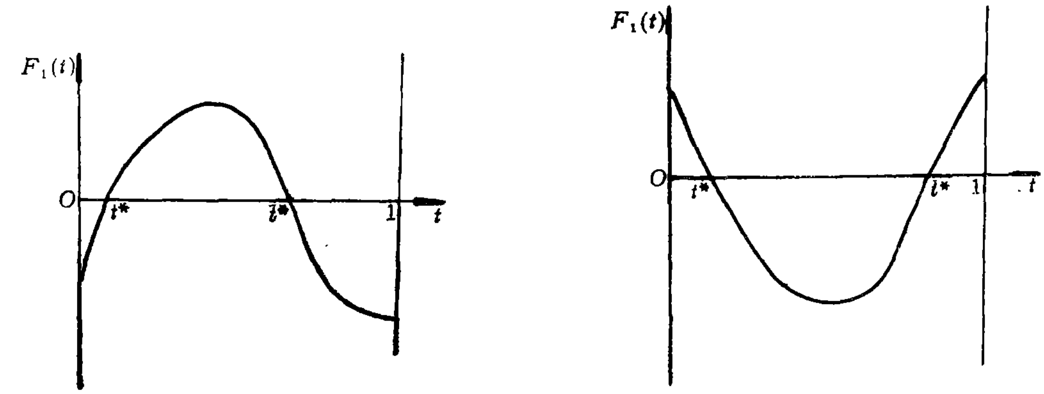

图 1

由第一种情形所对应的分枝曲线图如图2，其临界台阶是t^*与$\bar{t}^*$ 两处的"桥梁"；对于第二种$F_1(t,u_2(t))=0$情况类似讨论．依文献中讨论的结果，亦有：方程(1.1)有一解且在t^*与$\bar{t}^*$处产生跳跃层之解有限，它在$[0,t^*)$上，沿弧$(t,u_1(t))$缓慢运动，在t^*点跳跃，在此之后，它在$(t^*,\bar{t}^*)$上沿弧$(t,u_2(t))$缓慢运动，在$\bar{t}^*$点又产生跳跃，重新跳到弧$(t,u_1(t))$，随之，即在$(\bar{t}^*,1]$上沿弧$(t,u_1(t))$缓慢运动．t^*，$\bar{t}^*$两处跳跃层的厚度均为ε，示意见图3．

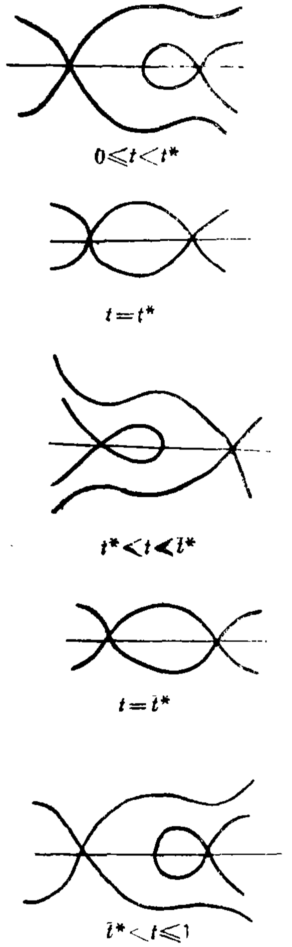

图 2

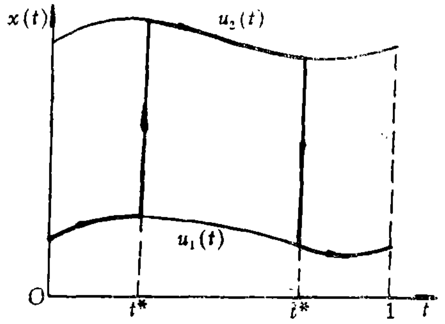

图 3

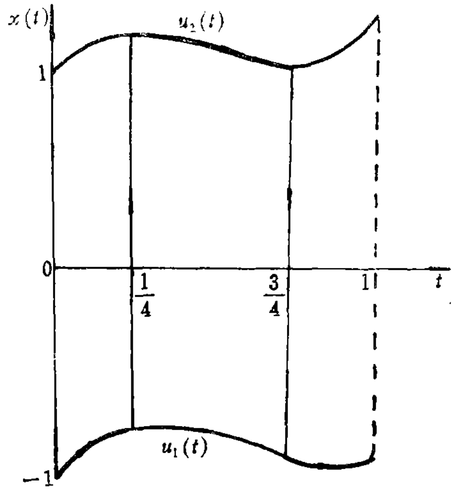

图 4

例1 讨论下列方程

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon\ddot{x}+x\dot{x}+x(-3t^2+2t-3/16)=0\\&x(0)=-1,\ x(1)=19/16,\ \varepsilon>0,\ \varepsilon\sim 0\end{aligned}\right\}\tag{2.1}$$

此时$u(t)=0,t\in[0,1]$当$\varepsilon=0$时，两退化方程

$$x\dot{x}+x(-3t^2+2t-3/16)=0,\ x(0)=-1$$

和

$$x\dot{x}+x(-3t^2+2t-3/16)=0,\ x(1)=19/16$$

之解$u_1(t),u_2(t)$，其中

$$\begin{cases}u_1(t)=t^3-t^2+3t/16-1<0=u(t), & t\in[0,1]\\u_2(t)=t^3-t^2+3t/16+1>0=u(t), & t\in[0,1]\end{cases}$$

令

$$F_1(t,u_2(t))=\int_{u_1(t)}^{u_2(t)}f(t,s)ds=\frac{s^2}{2}\Bigg|_{u_1(t)}^{u_2(t)}=t^3-t^2+\frac{3}{16}t=0$$

得：$t_1=1/4$，$t_2=3/4$为$F_1(t)$在$(0,1)$中的零点，且$F_1'(1/4)=-1/4$，$F_1'(3/4)=1/2$。因此：

原方程(2.1)在$t=1/4$与$t=3/4$处产生跳跃层的积分曲线，在$[0,1/4)$段沿弧$(t,u_1(t))$缓慢运动；在$t=1/4$处发生跃迁，在此之后，在$(1/4,3/4)$上，沿弧$(t,u_2(t))$缓慢运动；在$=3/4$处再次发生跃迁，在$(3/4,1]$上沿弧$(t,u_1(t))$缓慢运动，且$t=1/4$与$t=3/4$时刻的跳跃层厚度均为ε。

同理可以通过下例看出，存在有限多个跳跃层。

例2 考虑下列方程

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon\ddot{x}+x\dot{x}+x\left[\left(-\sum_{i=2}^{m}\frac{1}{t-1/i}\right)\left(\prod_{i=2}^{m}\left(t-\frac{1}{i}\right)\right)\right]=0\\&x(0)=-A-1,\ x(1)=A+1+(-1)^m\prod_{i=2}^{m}\frac{1}{i}\\&\text{其中}\varepsilon>0,\ \varepsilon\sim 0,\ m-\mathrm{st},\ m\geqslant 3\end{aligned}\right\}\tag{2.2}$$

由计算可知：方程(2.2)解在$t=1/i\,(i=2,3,\cdots,m)$时刻产生厚度为ε的跳跃层。

三、判断函数$F_1(t,u_2(t))\equiv 0$的进一步讨论

现在有趣的问题是当$F_1(t,u_2(t))\equiv 0,t\in[0,1]$时，似乎很难说明方程(1.1)解的性质。是否可以这样来陈述解的性质呢？即方程(1.1)之解在(0,1)中自始至终连续不断地发生跳跃，一会儿从$u_1(t)$跃到$u_2(t)$，一会儿又从$u_2(t)$跃到$u_1(t)$。但这种解释显然是荒诞的，因为如此看来，方程(2.1)之解只能处于一种孤立的动态中，这就是说解的轨迹$x(t)$不能从t_1运动到$t_2(t_1<t_2)$只能在t_1处从$u_1(t)$跃到$u_2(t)$，再从$u_2(t)$上跃到$u_1(t)$，以致往复不断。

实际上，对于判断函数$F_1(t,u_2(t))$在$(0,1)$上恒等于零的情形，还需作更为具体的分析与讨论。下面由两个例子来说明，此时方程(1.1)的解可能发生跳跃，也可能不发生跳跃。出现这一反常现象的根本原因是：$F_1(t,u_2(t))\equiv 0$，$t\in[0,1]$导致$F_1'(t,u_2(t))\equiv 0,t\in[0,1]$，即$(0,1)$中$F_1(t,u_2(t))$的任一零点均不是一阶零点。

例3 对于方程

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon\ddot{x}+2(t-x)\dot{x}-2(t-x)=0\\&x(0)=-2,\ x(1)=3,\ \varepsilon\sim 0,\ \varepsilon>0\end{aligned}\right\}\tag{3.1}$$

直接计算得：$t-2=u_1(t)<u(t)=t<t+2=u_2(t)$，$t\in[0,1]$，且方程（3.1）满足文献［1］中定理的条件，$F_1(t,u_2(t))\equiv 0$此时方程（3.1）的解是否产生跳跃层不得而知。现令 $x=v+t$，使方程(3.1)变为另一边值问题：

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon\ddot{v}-2v\dot{v}=0\\&v(0)=-2,\ v(1)=2,\ \varepsilon>0,\ \varepsilon\sim 0\end{aligned}\right\}\tag{3.2}$$

由文献[3]中第207页定理3知：方程（3.2）之解$v(t)$存在，其影$^\circ v(t)$有如下性质：

$$^\circ v(t)=\begin{cases}-2 & t\in[0,1/2)\\ 2 & t\in(1/2,1]\end{cases}$$

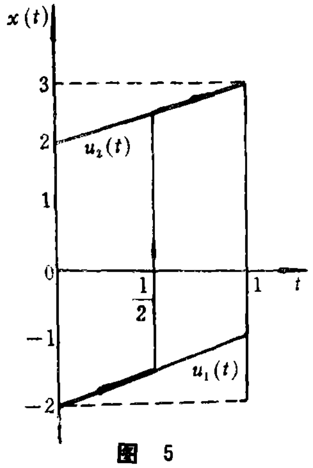

图　5

因而方程（3.1）之解 $x(t)$ 存在，且设其影为$^\circ x(t)$，该影有如下性质：

$$^\circ x(t)=\begin{cases}t-2 & t\in[0,1/2)\\ t+2 & t\in(1/2,1]\end{cases}$$

从此可看出方程(3.1)之解$x(t)$仅在 $t=1/2$ 处存在跳跃层，见图5.

例4　考虑下列方程

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon\ddot{x}+(t^2-2x)\dot{x}+2x(2x-t^2)=0\\&x(0)=-2,\ x(1)=3,\ \varepsilon\sim 0,\ \varepsilon>0\end{aligned}\right\}\tag{3.3}$$

直接计算得：$F_1(t,u_2(t))\equiv 0$，令$x(t)=t^2/2+v(t)$得另一边值问题：

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon\ddot{v}-2v\cdot\dot{v}+2tv+\varepsilon=0\\&v(0)=-2,\ v(1)=5/2,\ \varepsilon>0,\ \varepsilon\sim 0\end{aligned}\right\}\tag{3.4}$$

此时$v(t)=0$，$v_1(t)$与$v_2(t)$分别由下列两退化方程确定：

$$\begin{cases}2v\dot{v}=2tv\\ v(0)=-2\end{cases}\Longrightarrow v_1(t)=\frac{t^2}{2}-2$$

$$\begin{cases}2v\dot{v}=2tv\\ v(1)=5/2\end{cases}\Longrightarrow v_2(t)=\frac{t^2}{2}+2$$

显然有$v_1(t)<v(t)<v_2(t)$，$t\in[0,1]$，又

$$F_1(t,v_2(t))=\int_{v_1(t)}^{v_2(t)}2s\,ds=4t^2>0,\qquad t\in[0,1]$$

故方程（3.3）之解在$(0,1)$中不发生跳跃现象，它的解在任一闭区间$[s,1]$（$s\not\sim 0$）上一致近似于t^2+2，再由惯性原理知：$\exists\, s_0\sim 0$，使得方程(3.3)之解在$[s_0,1]$上近似于t^2+2。

本文初步探讨了一类拟线性方程的解发生跳跃现象，众所周知拟线性方程解的结构及其近似解的逼近问题是一个复杂而难以彻底解决的问题，这里所得结果是文献［1］的进一步推广和补充。

参 考 文 献

[1] Lutz, R. and T. Sari, Applications of NSA to boundary value problems in singular perturbation theory, *Lecture Notes in Math*.(942)(1983).

[2] 钱伟长主编, 《奇异摄动理论及其在力学中的应用》, 科学出版社 (1981).

[3] Lutz, R. and M. Goze, NSA——A practical guide with applications, *Lecture Notes in Math*.(881) (1981).

[4] 盛立人, 《非标准分析应用》(讲义), 安徽大学数学系 (1985).

The Numbers of Jump Layers of Boundary Value Problems in Quasilinear Differential Equations

Cheng Jian-hua   Zhu Qin

(Mathematics Department, Anhui University, Hefei)

Abstract

This paper discusses the numbers of jump layers of boundary value problems in quasilinear differential equations. In addition, the paper gives several examples to explain why the original equation must be rediscussed when the determinate function in reference [1] is always equal to zero.

Key words jump layer (free layer, transition layer), determinate function, zero point, shadow, approximation