一类食饵具常数存放率的Kolmogorov生态系统*

王　成　文

(泰安 山东矿业学院应用数学系，1991年3月2日收到)

摘　要

本文利用定性分析方法，研究了一类食饵具有常数存放率的Kolmogorov生态系统，讨论了系统平衡点的相对位置和性态，可行平衡点的全局稳定性，给出了一组解的有界性、系统无环性以及极限环的存在唯一性的条件，推广了文[1]和[2]的主要结果。

关键词　生态系统　微分方程　全局稳定性　极限环　存在性　唯一性

考虑如下具有常数存放率的Kolmogorov生态系统：

$$x'=xh(x)-x^2y-f_0\equiv P(x,y),\ y'=y(x^2-1)\equiv Q(x,y) \tag{*}$$

其中$f_0\leqslant 0$表示食饵种群的常数存放率，$h(x)$对于$x\geqslant 0$是连续函数，满足(*)解的唯一性条件。

关于系统(*)平衡点的性态、解的有界性、可行平衡点的全局稳定性以及极限环的存在唯一性问题，文[1]首先讨论了当$h(x)=A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3$，$f_0=0$的情形，得到了较好的结果。文[2]又将这些结果完整地推广到了$f_0<0$的情形。

本文进一步研究系统(*)当$f_0\leqslant 0$，$h(x)$对$x\geqslant 0$为任意的连续函数的情形（其生态学意义见[3]），所得结论包含了文[1]、[2]的大部分结果。

一、平衡点的相对位置与性态

对于系统：

$$x'=xh(x)-x^2y-f_0\equiv P(x,y),\ y'=y(x^2-1)\equiv Q(x,y) \tag{1.1}$$

其中$f_0<0$，$h(x)\in C[0,+\infty)$保证满足解的唯一性条件。

令　$H(x)=xh(x)-f_0$，则(1.1)有平衡点$R(1,\bar{y}_0)$及$R_i(x_i,0)$，其中$\bar{y}_0=H(1)=h(1)-f_0$，x_i是$H(x)=0$的有限个实根。

考虑到系统(1.1)的生态学意义，若平衡点$(\bar{x},\bar{y})\in D=\{(x,y)\,|\,x\geqslant 0,\ y\geqslant 0\}$，则称之为

* 杨绪灿推荐。
国家青年自然科学基金资助课题。
本文为第二届全国生物数学学术会议交流论文（1990年5月武汉）。

可行平衡点；D相应地称为可行区域。

引理1 设$H(x)=0$只有一个正实根x_1且为单根，并假设$H'(x_1)<0$。则有：

1) 若$h(1)>f_0$，则$R_1(x_1, 0)$是鞍点$(x_1>1)$且$R(1,\bar{y}_0)$是可行的焦点或结点。

2) 若 $h(1)<f_0$，则 $R_1(x_1, 0)$ 是稳定结点 $(0<x_1<1)$。且 $R(1, \bar{y}_0)$ 是非可行的鞍点。

证明 平衡点$R(1,\bar{y}_0)$与$R_1(x_1,0)$对应的特征方程分别为：

$$\lambda^2-[h'(1)-h(1)+2f_0]\lambda+2(h(1)-f_0)=0 \tag{1.2}$$

与

$$\lambda^2-[(x_1^2-1)+H'(x_1)]\lambda+(x_1^2-1)H'(x_1)=0 \tag{1.3}$$

在1)的条件下，系统(1.1)有两个可行平衡点 $R_1(x_1,0)$ 与 $R(1,\bar{y}_0)$。由(1.2)式易知，$R(1,\bar{y}_0)$ 的指数为$+1$。由[4]的引理 11.2及其注易知，$R_1(x_1,0)$ 的指数为-1，是鞍点，故$q_{R1}=(x_1^2-1)H'(x_1)<0$，再由$H'(x_1)<0$知$x_1>1$。

在2)的条件下，系统(1.1) 的平衡点$R(1,\bar{y}_0)$ 是非可行的且为鞍点，其指数为-1；而(1.1) 只有一个可行平衡点 $R_1(x_1, 0)$，其指数为$+1$，对应的两个特征根为 $\lambda_1=x_1^2-1$，$\lambda_2=H'(x_1)<0$，又$y=0$是(1.1)的一个解且在$y=0$上有：

$$\frac{dx}{dt}=\begin{cases}>0 & \text{当}x<x_1\text{时}\\ <0 & \text{当}x>x_1\text{时}\end{cases}$$

故$R_1(x_1,0)$只能是稳定的结点，且$0<x_1<1$。

类似于引理1，进一步可以得到：

引理2 设$x_1<x_2<\cdots<x_n$ 是$H(x)$ 依次相接的正实根，且都是单根，并假设$H(x)>0$（当$x\in(0,x_1)$时）及$H'(x_1)<0$，则有：

1) 若 $h(1)>f_0$，则 $R_1(x_1,0)$，$R_3(x_3,0)$，…，是鞍点；$R_2(x_2,0)$，$R_4(x_4, 0)$，…，是不稳定结点，且$x_1>1$。

2) 若$h(1)<f_0$，则$R_1(x_1,0)$，$R_3(x_3,0)$，…，是稳定结点；$R_2(x_2,0)$，$R_4(x_4,0)$，…，是鞍点，且$0<x_1<1$。

对于$H(x)=0$有重根的情形，有：

引理3 在引理1或引理2的条件下，设x_1是$H(x)$的m重根$(m\geqslant 2)$，则有：

1) 若m为偶数，则$R_1(x_1,0)$为鞍结点。当$h(1)<f_0$时，$0<x_1<1$且$N(R_1,\varepsilon)\cap D$ 为抛物区域；当$h(1)>f_0$时，$x_1>1$且$N(R_1,\varepsilon)\cap D$为双曲区域，其中$N(R_1,\varepsilon)$为R_1 的邻域。

2) 若m为奇数，则$R_1(x_1,0)$为鞍点或不稳定结点。

证明 将(1.1)改写为：

$$x'=(x-x_1)^m H_1(x)-x^2y,\ y'=(x^2-1)y \tag{1.4}$$

其中$H_1(x_1)=M\neq 0$，$m\geqslant 2, x\neq 1$。

现作变换$x=x^*+x_1$，$y=y^*$并仍记x^*，y^*为x,y，则 (1.4)化为：

$$x'=x^m H_1(x+x_1)-(x+x_1)^2y,\ y'=[(x+x_1)^2-1]y \tag{1.5}$$

即

$$\left.\begin{aligned}x'&=-x_1^2y+x^mH_1(x+x_1)-(x^2+2xx_1)y\\ y'&=(x_1^2-1)y+(x^2+2x_1x)y\end{aligned}\right\} \tag{1.6}$$

再作变换：$\xi=(x_1^2-1)x+x_1^2y$，$\eta=x_1^2y$，且变换后仍记为x,y，则(1.6)可以化为：

$$\left.\begin{aligned}x'&=\lambda_2^{-m}(x-y)^m H_1[\lambda^{-\frac{1}{2}}(x-y)+x_1]-\lambda^{-\frac{1}{1}}[\lambda^{-\frac{2}{2}}(x-y)^2+2x_1\lambda^{-\frac{1}{2}}(x-y)]y\\ y'&=\lambda_2 y+\lambda^{-\frac{1}{1}}[\lambda^{-\frac{2}{2}}(x-y)^2+2x_1\lambda^{-\frac{1}{2}}(x-y)]y\end{aligned}\right\}\tag{1.7}$$

其中$\lambda_1=x_1^2$，$\lambda_2=x_1^2-1$。

最后作变换$x=u$，$y=v^{\lambda_2}$并仍记u,v为x,y，则(1.7)化为

$$\left.\begin{aligned}x'&=\lambda_2^{-m}(x-y^{\lambda_2})^m H_1[\lambda^{-\frac{1}{2}}(x-y^{\lambda_2})+x_1]-\lambda^{-\frac{1}{1}}[\lambda^{-\frac{2}{2}}(x-y^{\lambda_2})^2\\ &\quad+2\lambda^{-\frac{1}{2}}x_1(x-y^{\lambda_2})]y^{\lambda_2}=P_2(x,y)\\ y'&=y+(\lambda_1\lambda_2)^{-1}[\lambda^{-\frac{2}{2}}(x-y^{\lambda_2})^2+2\lambda^{-\frac{1}{2}}x_1(x-y^{\lambda_2})]y=y+Q_2(x,y)\end{aligned}\right\}\tag{1.8}$$

其中$P_2(x,y)$，$Q_2(x,y)$是在$O(0,0)$附近次数不低于2的解析函数。

由隐函数存在定理，在O点充分小的邻域$N_\delta(0)$内可由$y+Q_2(x,y)=0$解出$y=\phi(x)\equiv 0$，且满足$\phi(0)=\phi'(0)=0$（注：由$y+Q_2(x,y)=0$还可解出

$$y=\sqrt[\lambda_2]{x+\frac{x_1}{\lambda_2^{-1}}}$$

但不符合$\phi'(0)=0$），$\phi(x)$也是$N_\delta(0)$内的解析函数。

令 $\psi(x)=P_2(x,\phi(x))=M\lambda^{-\frac{m}{2}}x^m+[x]_{m+1}$

其中$[x]_{m+1}$为$\psi(x)$中次数不低于$m+1$的所有项之和。

由文[5]第二章定理7.1知引理3的结论成立。

由引理3可得

引理4 若$h(1)=f_0$，则$R_1(x_1,0)$必为鞍结点，且$N(R_1,\varepsilon)\cap D$为抛物区域。

证明 当$h(1)=f_0$时，$R_1(x_1,0)$与$R(1,\bar{y}_0)$重合，记为$R(1,0)$。因此$P(x,y)=0$与$Q(x,y)=0$在该点的斜率相同。显然$Q(x,y)=0$在$R(1,0)$的斜率为0，故

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\substack{P(x,y)=0\\ x=1,y=0}}=\left.\frac{xH'(x)-2H(x)}{x^3}\right|_{x=1}=0$$

从而有$h'(1)+h(1)-2[h(1)-f_0]=0$。再由$h(1)=f_0$，得：$h'(1)+h(1)=0$.从而：

$$\begin{aligned}H(x)&=xh(x)-f_0=x[h(1)+\frac{h'(1)}{1!}(x-1)+\frac{h''(1)}{2!}(x-1)^2+\cdots]-f_0\\ &=h(1)(x-1)+\frac{h'(1)}{1!}(x-1)x+\frac{h''(1)}{2!}(x-1)^2x+\cdots\\ &=(x-1)[h(1)+xh'(1)+\frac{h''(1)}{2!}x(x-1)+\cdots]\\ &=(x-1)[h'(1)(x-1)+\frac{h''(1)}{2!}x(x-1)+\cdots]\\ &=(x-1)^2[h'(1)+\frac{h''(1)}{2!}x+\cdots]\end{aligned}$$

此式说明$x=1$是$H(x)=0$的重根。由引理3即知$R(1,0)$为鞍结点。由向量场分析可知$N(R_1,\varepsilon)\cap D$为抛物区域，即不存在从D内出发的轨线负向趋于$R(1,0)$，或$R(1,0)$在D内为局部稳定的。

二、可行平衡点的全局稳定性

在等倾线$P(x,y)=0$上，当$x\to 0^+$时，$y\to+\infty$，故系统(1.1)的等倾线$P(x,y)=0$与

$Q(x,y)=0$至多将D分为四个区域：

$\mathrm{I}=\{(x,y)|P>0,Q<0\}$，$\mathrm{II}=\{(x,y)|P<0,Q<0\}$

$\mathrm{III}=\{(x,y)|P<0,Q>0\}$，$\mathrm{IV}=\{(x,y)|P>0,Q>0\}$

定理1 在引理1或引理4(并设$x=1$是$H(x)=0$的唯一正根）的条件下，当$h(1)\leqslant f_0$时，可行平衡点$R_1(x_1,0)$在D内是全局稳定的．

证明 在定理的条件下，$R_1(x_1,0)$是D内唯一的可行平衡点．在区域Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ内，系统(1.1)的方向场如图1所示．易知(1.1)从区域Ⅰ、Ⅱ内出发的轨线必趋于$R_1(x_1,0)$（当$t\to+\infty$时）；在区域Ⅲ内，$dx/dt<0$，$dy/dt>0$，且当$y(>0)$充分大时，有：

$$\left|\frac{dy}{dx}\right|=\frac{1-x^{-2}}{1-(xh(x)-f_0)x^{-2}y^{-1}}<1$$

故从其内出发的轨线不可能永远停留在Ⅲ内，只能穿过$Q(x,y)=0$而进入区域Ⅱ内，然后再趋于$R_1(x_1,0)$（当$t\to+\infty$时）．从而$R_1(x_1,0)$是全局稳定的．证毕．

定理2 在引理1的条件下，当$h(1)>f_0$时，系统(1.1)从D内出发的一切解有界．

证明 在定理的条件下，系统存在两个可行平衡点：$R_1(x_1,0)$是鞍点且$x_1>1$，及$R(1,\bar{y}_0)$是焦点或结点．

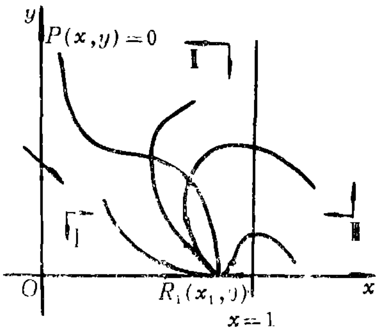

图1 $R_1(x_1,0)$的全局稳定性

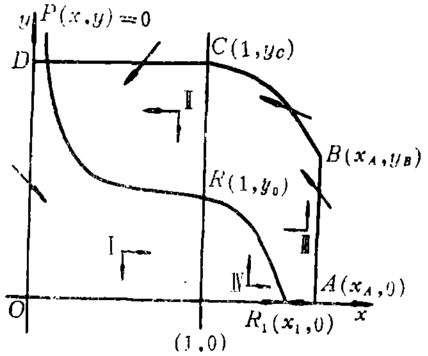

图2 环域$\widehat{OABCDO}$及向量场

任给$P_0(x_0,y_0)\in D$，设$(x(t),\ y(t))$是(1.1)从P_0出发的轨线．现构造一个包围初始点P_0及$R(1,\bar{y}_0)$的有界闭区域，$\widehat{OABCDO}$，如图2所示．其中AB,CD为直线段($x_A=\max\{x_1,x_0\}$)，$\widehat{BC}$是(1.1)的比较方程

$$x'=h_0x-x^2y-f_0,\ y'=y(x^2-1) \tag{2.1}$$

的过点$B(y_B=\max\{y_0,\bar{y}_0\})$的轨线弧的一段．其中$h_0=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant x_A}h(x)\geqslant h(1)>f_0$．现考察方程(2.1)的奇点$\bar{R}(1,h_0-f_0)$对应的特征方程：

$$\lambda^2+(h_0-2f_0)\lambda+4(h_0-f_0)^2=0$$

由$h_0-2f_0>0$知$\bar{R}$为稳定奇点，又$h_0-f_0\geqslant h(1)-f_0=\bar{y}_0>0$并考虑到(2.1)的方向场知过$B$点的轨线必与$x=1$相交于$C(0,y_C)$，其中$y_C>\bar{y}_0$．

因为$y'|_{(2.1)}=y'|_{(1.1)}>0$，$x'|_{(1.1)}<x'|_{(2.1)}<0$，故$\widehat{BC}$是(1.1)的无切曲线，且当(1.1)的轨线与$\widehat{BC}$相交时都是穿过而进入有界闭区域的．

显然$\overline{AB}$，$\overline{CD}$，$\overline{DO}$是无切直线，且(1.1)的轨线与它们相交时均是穿过而进入有界闭区域的．又$\overline{OA}$是(1.1)轨线的一段，由上所证知$(x(t),\ y(t))$将永远停留在所作闭区域内或其边界上．从而从D内出发的系统(1.1)的所有轨线均有界．

定理3 当$h(1)>f_0$时，只要$x[xh(1)-h(x)]/(x^2-1)\geqslant f_0$对一切$x>0$成立，则$R(1,\bar{y}_0)$在$D$内是全局稳定的。

证明 把(1.1)改写成：

$$x'=x\{[h(x)-xh(1)+xf_0]-x(y-\bar{y}_0)-f_0/x\},\ y'=y(x+1)(x-1) \tag{2.2}$$

作Liapunov函数

$$V(x,y)=[(x-1)+x^{-1}-1]+[(y-\bar{y}_0)-\bar{y}_0\ln(y/\bar{y}_0)]$$

易知$V(x,y)$是D上的无限大正定函数，且有

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(2\cdot 2)}=\frac{(x+1)(x-1)^2}{x^2}\left[\frac{x(h(x)-xh(1))}{x^2-1}+f_0\right]$$

在定理的条件下是常负的，而集合$S=\{(x,y)\mid dV/dt|_{(2\cdot 2)}=0\}=\{(x,y)\mid x=1,0\leqslant y<+\infty\}$，它不包含除$R(1,\bar{y}_0)$以外的任何非平凡正半轨. 由著名的巴尔巴辛-克拉索夫斯基定理[6]知，$R(1,\bar{y}_0)$在D内是全局稳定的.

定理4 当函数$H(x)/x^2$是整个x轴（或$x\geqslant 0$）上的非增或非减函数时，系统(1.1)在全平面(或D内)无环.

证明 取Dulac函数$B(x,y)=x^{-2}y^{-1}$，则$\partial(BP)/\partial x+\partial(BQ)/\partial y=y^{-1}(H(x)/x^2)'$. 又$y=0$是无切直线，故知定理的结论成立.

由定理2,4可得：

定理5 在引理1的条件下，当$h(1)>f_0$时，若在D内对一切$x>0$，函数$H(x)/x^2$都是非增（或非减）的，且$h'(1)-h(1)+2f_0<0$，则$R(1,\bar{y}_0)$在D内是全局稳定的.

三、极限环的存在性和唯一性

定理6 在引理1～3的条件下，若$h(1)>f_0$，则当$h'(1)-h(1)+2f_0>0$时，系统至少存在一个极限环.

证明 在定理的条件下，系统(1.1)在D内至少存在两个平衡点：$R(1,\bar{y}_0)$，它是不稳定的焦点或结点；$R_1(x_1,0)$，是鞍点、鞍结点或不稳定结点，且$x_1>1$是$H(x)=0$的最小正根. 类似于定理2，作环域的外境界线$\widehat{OR_1B'C'D'O}$，其中$B'(x_1,\ y_{B'})$ $(y_{B'}>\bar{y}_0)$，$\widehat{B'C'}$为比较方程(2.1)过B'的轨线弧的一段，与$x=1$交$C'(1,y_{C'})$. 可以证明，系统(1.1)的轨线或者穿过外境界线进入由其所围成的有界闭区域内($t\to+\infty$)，或者部分外境界线本身就是轨线. 因此只需考虑平衡点$R_1(x_1,0)$附近轨线的走向即可：当x_1为单根时，R_1是鞍点，没有轨线从D内出发而趋于R_1；当x_1为偶重根时，由引理3可知R_1为鞍结点且在D内R_1的附近为双曲区域，故除x轴外，系统的轨线只能离开R_1进入闭区域；当x_1为奇重根时，R_1为鞍点或不稳定奇点，也应有上述结论. 再由$h'(1)-h(1)+2f_0>0$时$R(1,\bar{y}_0)$的不稳定性，根据广义Poincaré-Bendixson环域定理[4]可知在$R(1,\bar{y}_0)$外围，从而在D内至少存在一个极限环.

定理7 若对一切$\alpha\geqslant 0$，都有：

$$\Delta(\alpha)=(\alpha^5-\alpha^3)h''(\alpha)-2\alpha^4h'(\alpha)+2\alpha^3h(\alpha)-2f_0(3\alpha^2-1)<0 \tag{3.1}$$

则系统(1.1)在D内至多存在一个极限环；若存在，则必为稳定环.

证明 作变换：$x=\tilde{x}+1$，$y=\tilde{y}+\bar{y}_0$，并仍记$\tilde{x},\tilde{y}$为x,y，则(1.1)化为：

$$x'=(x+1)h(x+1)-(x+1)^2(y+\bar{y}_0)-f_0,\ y'=x(x+2)(y+\bar{y}_0) \tag{3.2}$$

再作变换：$x=u/(1-u)$，$y=\bar{y}_0(e^v-1)$，则(3.2)可化为Lienard方程：

$$u'=-\varphi(v)-F(u),\quad v'=g(u) \tag{3.3}$$

其中，$\varphi(v)=\bar{y}_0(e^v-1)$，$F(u)=-(1-u)\ h\left(\frac{1}{1-u}\right)+\bar{y}_0+f_0(1-u)^2$，$g(u)=\frac{u(2-u)}{(1-u)^2}$

且 $u<1$，$-\infty<v<+\infty$。

$$f(u)=F'(u)=h\left(\frac{1}{1-u}\right)-\frac{1}{1-u}h'\left(\frac{1}{1-u}\right)+2f_0(u-1)$$

显然要验证张芷芬极限环唯一性的定理[5]的条件，只要验证在$u<1,-\infty<v<+\infty$时，$(f(u)/g(u))'>0$即可。事实上，由(3.1)式，

$$\left(\frac{f(u)}{g(u)}\right)'=\frac{1}{u^2(2-u)^2(1-u)}\left[-u(2-u)h''\left(\frac{1}{1-u}\right)+2(1-u)\ h'\left(\frac{1}{1-u}\right)\right.$$

$$\left.-2(1-u)^2h\left(\frac{1}{1-u}\right)-2f_0(1-u)^3(u^2-2u-2)\right]>0$$

必成立。从而系统(1.1)至多存在一个极限环；若存在则必为稳定环。

四、讨　　论

首先对本文所得结论作如下说明。由引理1～4及定理1～6的证明可知，结论对 $f_0=0$仍成立，只需注意到当$f_0=0$时，定理1,2,6中y轴也是 (1.1) 的轨线，也就是无切直线。而此时原点$O(0,0)$也变成一个可行平衡点，可以证明不存在从D内出发的轨线趋于原点O。

现对本文所得结果与文[1]、[2]的结果作一下比较。

若$h(x)=A_0+(A_1-f_2)x+A_2x^2+A_3x^3$，其中$A_0>0$，$A_1<0$，$A_2>0$，$A_3<0$ 且$A_0A_3=A_1A_2$。当 $f_2=f_0=0$时，即为文[1]所讨论的系统；当$f_2<0$，$f_0<0$时，即为文[2]所讨论的系统。

此时，$H(x)=xh(x)-f_0=A_3x^4+A_2x^3+(A_1-f_2)x^2+A_0x-f_0$ 只有一个正实根 $x_1=(-A_0-\sqrt{A_0^2+4A_1f_0})/2A_1$，特别当$f_0=f_2=0$时，$H(x)$只有一个正实根$x_1=-A_2/A_3$，引理1及4的条件满足。

由定理1直接可得：

推论1 当$A_3+A_2+A_1+A_0-f_2-f_0\leqslant0$时，$R_1(x_1,0)$在$D$内是全局稳定的。特别当$f_2=f_0=0$时，条件变为：$A_0+A_1+A_2+A_3\leqslant0$。

注1 推论1即文[2]的定理2。特别当$f_0=f_2=0$时，为文[1]的定理1。事实上，当$A_2+A_3\leqslant0$时，$A_0+A_1+A_2+A_3=(A_2/A_3+1)A_1+A_2+A_3\leqslant0$成立。

由定理2直接可得：

推论2 当$A_3+A_2+A_1+A_0-f_2-f_0>0$时，(1.1)从$D$内出发的一切解轨线有界。特别当$f_0=f_2=0$时，条件变为$A_2+A_3>0$，结论仍成立。

注2 推论2即为文[2]的定理3。特别当$f_0=f_2=0$时为文[1]的定理3。事实上，当$A_2+A_3>0$时，$A_0+A_1+A_2+A_3=(A_2/A_3+1)A_1+(A_2+A_3)>0$成立。顺便说一句，文[1]中条件$2A_3+A_2-A_0\leqslant0$是不必要的，只要$A_2+A_3>0$即可保证解的有界性。

由定理6,7可得：

推论3 当$A_3+A_2+A_1+A_0-f_0-f_2>0$且$2A_3+A_2-A_0+2f_0>0$时，(1.1) 在 $R(1,\bar{y}_0)$外围即在D内存在唯一的极限环，且为稳定环；特别当$f_0=f_2=0$时，只要 $2A_3+A_2-A_0>0$

成立，结论仍成立。

证明 1) $f_0<0$，$f_2<0$时存在性结论显然。

以下证明唯一性，此时

$$\Delta(\alpha)=(\alpha^5-\alpha^3)h''(\alpha)-2\alpha^4h'(\alpha)+2\alpha^3h(\alpha)-2f_0(3\alpha^2-1)$$
$$=2A_3\alpha^3(\alpha^3-3\alpha+(A_0-A_2-2f_0)/A_3)+4A_3f_0\alpha^3-6f_0\alpha^2+2f_0$$

对于$\alpha\geqslant0$，当$\alpha=1$时，由

$$2A_3+A_2-A_0+2f_0>0$$

及$A_3<0$知

$$\alpha^3-3\alpha+(A_0-A_2-2f_0)/A_3$$

取得极小值

$$(A_0-A_2-2f_0)/A_3-2=-(2A_3+A_2-A_0+2f_0)/A_3>0$$

且有$A_2-A_0+2f_0>0$，从而

$$(\alpha^3-3\alpha+(A_0-A_2-2f_0)/A_3)|_{\alpha=0}=(A_0-A_2-2f_0)/A_3>0$$

故 $$2A_3\alpha^3(\alpha^3-3\alpha+(A_0-A_2-2f_0)/A_3)<0$$

对所有$\alpha\geqslant0$成立。

又$4A_3f_0\alpha^3-6f_0\alpha^2+2f_0$当$\alpha>0$时无极值点，且

$$(4A_3f_0\alpha^3-6f_0\alpha^2+2f_0)=2f_0<0 \qquad (\alpha=0)$$

故对一切$\alpha\geqslant0$，都有

$$(4A_3f_0\alpha^3-6f_0\alpha^2+2f_0)<0$$

由上所证对一切 $\alpha\geqslant0$，都有 $\Delta(\alpha)<0$. 定理 7 的条件满足，从而得到极限环的唯一性.

2) 当$f_0=f_2=0$时，若$2A_3+A_2-A_0=A_3+A_2+(A_3-A_0)>0$，由$A_3-A_0<0$，必有：$A_2+A_3>0$，从而$A_0+A_1+A_2+A_3>0$满足定理6的条件，存在性得证.

下证唯一性. 事实上，当$2A_3+A_2-A_0>0$时，

$$\Delta(\alpha)=(\alpha^5-\alpha^3)h''(\alpha)-2\alpha^4h'(\alpha)+2\alpha^3h(\alpha)=2A_3\alpha^3\left(\alpha^3-3\alpha+\frac{A_2-A_0}{A_3}\right)$$

而$\alpha^3-3\alpha+(A_2-A_0)/A_3$在$\alpha=1$取得极小值$(A_0-A_2)/A_3-2>0$；又$A_3<0$ 知 $A_0-A_2<0$，从而

$$(\alpha^3-3\alpha+(A_0-A_2)/A_3)|_{\alpha=0}=(A_0-A_2)/A_3>0$$

故对一切$\alpha\geqslant0$，都有$\Delta(\alpha)<0$. 定理7的条件满足，从而得到极限环的唯一性.

注3 推论3即为文[2]的定理6. 当$f_0=f_2=0$时就是文[1]的定理6, 7.

注4 本文所得结论的生态学意义可参照[1]、[2]给出，在此不再赘述.

致谢 周毓荣教授在本文的完成过程中提出宝贵意见，谨致谢意.

参 考 文 献

[1] 陈均平、张洪德，具功能性反应的食饵-捕食者两种群模型的定性分析，应用数学和力学，7(1) (1986), 73—80.

[2] 王成文，一类食饵具有常数存放率的生态系统，山东矿业学院学报，10(1) (1991), 91—100.

[3] 陈兰荪，《数学生态学模型及研究方法》，科学出版社，北京 (1988), 130—156.

[4] 叶彦谦等，《极限环论》，第二版，上海科学技术出版社 (1984), 7—20, 247—249.

[5] 张芷芬等，《微分方程定性理论》，科学出版社，北京 (1985), 130—159, 266—277.

[6] 秦元勋等，《运动稳定性理论及应用》，科学出版社，北京 (1981), 23—27.

A Class of Kolmogorov's Ecological System with Prey Having Constant Adding Rate

Wang Cheng-wen

(Department of Applied Mathematics, Shandong Institute of Mining and Technology, Taian, Shangdong)

Abstract

In this paper, we study a class of Kolmogorov's ecological system with prey having constant adding rate, discuss the relative position and the character of the equalibriums, the global stability of the practical equalibriums and give a group of conditions for the boundedness of the solutions, the nonexistence, the existence and the uniqueness of the limit cycle of the system. Most results obtained in papers [1] and [2] are included or generalized.

Key words ecological system, differential equations, global stability, limit cycle, existence, uniqueness