

# 正交各向异性旋转扁壳的非线性振动

李 东

(上海市应用数学和力学研究所, 上海工业大学)

(刘人怀推荐, 1991年3月4日收到)

## 摘 要

本文提出一种时间模态假设, 由此导出描述圆柱正交各向异性薄扁球壳和锥壳非线性轴对称自由振动的非线性耦合的代数和微分特征值方程组. 我们求出了该方程组的近似解析解, 并获得壳体振动的幅频响应关系的渐近展开式. 文中还讨论了壳体的几何及材料参量对其振动性态的影响.

**关键词** 几何非线性 振动 正交各向异性 扁球壳 扁锥壳

## 一、引 言

在机械和宇航工程中广泛使用旋转扁壳这类构件. 由于扁壳常常处在动态激励的工作环境中, 因而对它的振动响应的研究十分重要, 也一直引人注目. 对于扁球壳的线性(即小振幅)振动分析, Reissner 曾给出完美的精确解<sup>[1,2]</sup>. 然而旋转扁壳的非线性(即大振幅)振动一直是个难度很大而又具有很大研究价值的问题. 许多学者曾使用各种方法研究过该问题. Evensen等<sup>[3]</sup>研究扁薄球壳的非线性振动, 他们将解作广义Fourier展开, 空间函数取Bessel正交函数族. 将该解代入 Галеркин 方程, 从而导出时间函数的控制方程, 然后求解此方程. Singh等<sup>[4]</sup>用 Галеркин 方法求解扁球壳的轴对称自由振动, 并计及剪切变形的影响. Ramachandran<sup>[5]</sup>首先用 Berger方法<sup>[6]</sup>讨论扁球壳的大振幅自由振动, 以后又用 Галеркин 方法研究具有集中质量的扁球壳的非线性振动<sup>[7]</sup>. Bucco等<sup>[8]</sup>发现, 应用 Berger方法研究扁球壳的线性振动时, 会导出错误结果, 所以该方法不宜用于壳体振动分析, 因而文[5]的结果不对. 另外, Yasuda等<sup>[9]</sup>将问题的解按扁球壳线性振动的本征函数族展开, 研究了扁球壳的非线性强迫振动. 他们还计及阻尼因素, 并进行了实验研究. 最近, Dumir<sup>[10]</sup>又应用传统的 Галеркин 方法研究了正交各向异性开顶扁薄球壳和锥壳的非线性轴对称自由振动.

我们注意到, 文[3~5, 7, 9, 10]所求出的解一层不变地基于空间模态的假设, 并利用 Галеркин 方法导出时间模态的控制方程, 再用摄动法、谐波平衡法(harmonic balance)或数值积分法求解此方程, 获得壳体振动的幅频特性关系. 长期以来, 这种求解格式似乎没

\* 国家自然科学基金资助的课题.

有新的发展。Sinharay等<sup>[11]</sup>改进了Berger方法,他们基于一些经验性的假设,导出了扁壳的能量的修正表达式,仍然使用空间模态的假设和Галеркин方法,推导出非耦合的非线性方程组,从而使得分析简化。由于该方法造成耦合的物理现象与非耦合的数学表达的非一致性,它不适用于非线性耦合较强的情形。

本文突破了以往的分析方法限制,提出一种求解扁壳非线性振动的 von Kármán-Donnell型方程组的新方法,为层合扁壳的非线性振动研究提供了新的解析分析工具。在本文中,我们具体研究了由纤维增强性(fibre-reinforced)复合材料制成的圆柱型正交各向异性薄扁球壳和薄扁锥壳的非线性轴对称自由振动,求出了该问题全新的解析解。本文提出的解析法基于时间模态的假设和变分方法:我们将壳体的挠度和应力函数设为时间和空间函数可分离的形式,时间函数取为谐函数,空间函数完全未知。所假定的振动模态包含两个未知的内禀量,即振频(描述时间禀性)和一个表征象壳这类具有不对称刚度特性的非线性振子的“漂移”(drift,描述空间禀性)<sup>[12]</sup>的小量。这两个量均与壳的几何参量、材料参量及几何形状、边界约束和振幅有关。将假定的模态函数代入本问题的变分方程,经积分导出空间模态的控制方程和求解“漂移”的代数方程。结合各种边界条件,应用修正迭代法<sup>[13~16]</sup>求出空间模态的渐近表达式,并导出壳体振动振幅与振频关系的解析表达式。

我们针对四种边界条件给出数值结果,并讨论了壳体的几何参量、材料参量以及边界约束对其非线性振动的影响。本文的解法可推广于开顶旋转扁壳的非线性振动研究之中。

## 二、非线性特征值问题的建立

本问题的 von Kármán-Donnell型控制方程已由文[10]给出。为建立本问题的相应的特征值方程,我们给出平衡方程的变分形式,它可由Hamilton原理导出为

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^a \left\{ D \mathcal{L}_1^*(w^*) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \psi^* \left( \frac{\partial w^*}{\partial r} + s \frac{H^*}{a^s} r^{s-1} \right) \right] + \gamma h \frac{\partial^2 w^*}{\partial t^2} \right\} \delta w^* r dr dt = 0 \quad (2.1)$$

本问题的协调方程是<sup>\*[10]</sup>

$$\mathcal{L}_2^*(\psi^*) + \frac{h}{2} E_\theta \frac{\partial w^*}{\partial r} \left( \frac{\partial w^*}{\partial r} + 2s \frac{H^*}{a^s} r^{s-1} \right) = 0 \quad (2.2)$$

其中 $\mathcal{L}_1^*$ 和 $\mathcal{L}_2^*$ 是关于径向坐标 $r$ 的偏微分算子,我们列举如下

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1^*(\dots) &= \frac{\partial^4(\dots)}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3(\dots)}{\partial r^3} - \frac{\beta}{r^2} \frac{\partial^2(\dots)}{\partial r^2} + \frac{\beta}{r^3} \frac{\partial(\dots)}{\partial r} \\ \mathcal{L}_2^*(\dots) &= r \frac{\partial^2(\dots)}{\partial r^2} + \frac{\partial(\dots)}{\partial r} - \frac{\beta}{r}(\dots) \end{aligned}$$

方程(2.1)及(2.2)中所有符号意义与文[10]一致; $t$ 是时间变量, $a$ 是扁壳底圆半径, $h$ 为壳厚, $H^*$ 为壳的矢高, $\gamma$ 是壳材料密度, $w^*$ 是壳的挠度, $\psi^*$ 是应力函数, $\beta$ 是各向异性参量, $D$ 为抗弯刚度。并有下述关系成立

$$N_r = \frac{\psi^*}{r}, \quad N_\theta = \frac{\partial \psi^*}{\partial r}, \quad \beta = \frac{E_\theta}{E_r} = \frac{\nu_\theta}{\nu_r}, \quad D = \frac{E_\theta h^3}{12(\beta - \nu_\theta^2)}$$

\*文[10]中的方程有印刷错误。

$E_r, E_\theta$ 是径向和环向弹性模量,  $\nu_r, \nu_\theta$ 是径向和环向泊松比,  $N_r, N_\theta$ 是径向和环向薄膜力. 指标 $s$ 取值为1或2, 前者对应扁锥壳方程, 后者对应于扁球壳方程.

壳体在外边界受到约束, 边界条件是

当 $r=0$ ,  $w^*$ 有限,  $\partial w^*/\partial r=0$ ,  $\psi^*=0$

$$\lim_{r \rightarrow 0} r \left( \frac{\partial^3 w^*}{\partial r^3} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w^*}{\partial r^2} - \frac{\beta}{r^2} \frac{\partial w^*}{\partial r} \right) = 0$$

当 $r=a$ ,  $w^*=0$ ,  $\frac{\partial^2 w^*}{\partial r^2} + \frac{\lambda}{r} \frac{\partial w^*}{\partial r} = 0$ ,  $\frac{\partial \psi^*}{\partial r} - \frac{\nu}{r} \psi^* = 0$

最后两个中心条件保证对 $\beta \geq 1$ 这种材料, 壳体中心不出现应力奇异. 对于 $\beta < 1$ 的材料, 壳体中心应力是奇异的. 对应于 $\lambda$ 和 $\nu$ 的不同取值的组合, 形成四种边界条件:

- (1)  $\lambda = \nu = \nu_\theta$ , 对应于铰支边界;
- (2)  $\lambda = \nu_\theta, \nu = \infty$ , 对应于简支边界;
- (3)  $\lambda = \nu = \infty$ , 可滑移夹紧固定边界;
- (4)  $\lambda = \infty, \nu = \nu_\theta$ , 不可滑移夹紧固定边界.

括号内序号对应不同的边界条件.

引入下列无量纲量

$$w = \frac{w^*}{h}, \quad \psi = \frac{a}{D} \psi^*, \quad x = \frac{r}{a}, \quad \tau = \left( \frac{D}{\gamma h a^4} \right)^{\frac{1}{2}} t, \quad H = \frac{H^*}{h}, \quad m = \beta^{\frac{1}{2}}$$

则方程(2.1)和(2.2)及相应边界条件化为

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_0^1 \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} + \mathcal{L}_1(w) - \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \psi \left( \frac{\partial w}{\partial x} + s H x^{s-1} \right) \right] \right\} \delta w x dx d\tau = 0 \quad (2.3a)$$

$$\mathcal{L}_2(\psi) + 6(\beta - \nu_\theta^2) \frac{\partial w}{\partial x} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + 2s H x^{s-1} \right) = 0 \quad (2.3b)$$

以及

$$\text{当 } x=0, w \text{ 有限, } \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \lim_{x \rightarrow 0} \left( x \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\beta}{x} \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0, \psi = 0$$

$$\text{当 } x=1, w=0, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \frac{\partial \psi}{\partial x} - \nu \psi = 0$$

这里 $\mathcal{L}_1$ 和 $\mathcal{L}_2$ 是与 $\mathcal{L}_1^*$ 及 $\mathcal{L}_2^*$ 相对应的无量纲偏微分算子,

$$\mathcal{L}_1(\dots) = \frac{\partial^4(\dots)}{\partial x^4} + \frac{2}{x} \frac{\partial^3(\dots)}{\partial x^3} - \frac{m^2}{r^2} \frac{\partial^2(\dots)}{\partial x^2} + \frac{m^2}{x^3} \frac{\partial(\dots)}{\partial x}$$

$$\mathcal{L}_2(\dots) = x \frac{\partial^2(\dots)}{\partial x^2} + \frac{\partial(\dots)}{\partial x} - \frac{m^2}{x} (\dots)$$

我们设(2.3a, b)的解是如下的时间与空间可分离的形式

$$w(x, \tau) = W(x)(\xi + \cos \omega \tau), \quad \psi(x, \tau) = N(x)(\xi + \cos \omega \tau) + T(x)(\xi + \cos \omega \tau)^2$$

这里的 $\xi$ 是一个未知量, 它表征象壳这类具有拉压刚度不对称的非线性振子的“漂移”(drift)的大小<sup>[12]</sup>.  $\omega$ 是壳的无量纲振频.  $\xi$ 和 $\omega$ 均是壳的内禀量, 与壳的几何参量( $s, H$ )、材料参

量 $(\beta, \nu_0)$ 及边界条件、振动幅度有关。 $W(x)$ 和 $N(x)$ ,  $T(x)$ 均是未知的空间函数。

将上述振动模式表达式代入(2.3a), 并在一个振动周期 $[0, 2\pi/\omega]$ 内积分可得

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left\{ \mathbf{L}_1(W) - \frac{\omega^2}{(2\xi^2+1)} W - \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left[ sHx^{s-1} N \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{\xi(2\xi^2+3)}{2\xi^2+1} \left( sHx^{s-1} T + N \frac{dW}{dx} \right) + \left( \frac{8\xi^4+24\xi^2+3}{8\xi^2+4} \right) T \frac{dW}{dx} \right] \right\} \delta W x dx \\ & + \left\{ - \int_0^1 \left[ \frac{d}{dx} \left( N \frac{dW}{dx} + sHx^{s-1} T \right) \right] W dx \right. \\ & \quad \left. + \xi \int_0^1 \left[ 2x \mathbf{L}_1(W) - \frac{d}{dx} \left( 3T \frac{dW}{dx} + 2sHx^{s-1} N \right) \right] W dx \right. \\ & \quad \left. - 2\xi^2 \int_0^1 \left[ \frac{d}{dx} \left( N \frac{dW}{dx} + sHx^{s-1} T \right) \right] W dx \right. \\ & \quad \left. - 2\xi^3 \int_0^1 \left[ \frac{d}{dx} \left( T \frac{dW}{dx} \right) \right] W dx \right\} \frac{\delta \xi}{(2\xi^2+1)} = 0 \end{aligned}$$

其中 $\mathbf{L}_1$ 是微分算子

$$\mathbf{L}_1(\dots) = \frac{1}{x} \frac{d}{dx} x^m \frac{d}{dx} x^{-(2m-1)} \frac{d}{dx} x^m \frac{d}{dx} (\dots)$$

由于 $\delta W$ 和 $\delta \xi$ 是任意的变量, 上面的方程可化为

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_1(W) - \frac{\omega^2}{2\xi^2+1} W = \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left[ sHx^{s-1} N + f(\xi) \left( sHx^{s-1} T \right. \right. \\ \left. \left. + N \frac{dW}{dx} \right) + g(\xi) T \frac{dW}{dx} \right] \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\alpha_0 + \alpha_1 \xi + \alpha_2 \xi^2 + \alpha_3 \xi^3 = 0 \quad (2.5)$$

其中 $f(\xi)$ 和 $g(\xi)$ 是函数

$$f(\xi) = \frac{\xi(2\xi^2+3)}{2\xi^2+1}, \quad g(\xi) = \frac{8\xi^4+24\xi^2+3}{8\xi^2+4}$$

以及

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 &= - \int_0^1 \left[ \frac{d}{dx} \left( N \frac{dW}{dx} + sHx^{s-1} T \right) \right] W dx \\ \alpha_1 &= \int_0^1 \left[ 2x \mathbf{L}_1(W) - \frac{d}{dx} \left( 3T \frac{dW}{dx} + 2sHx^{s-1} N \right) \right] W dx \\ \alpha_2 &= 2\alpha_0, \quad \alpha_3 = -2 \int_0^1 \left[ \frac{d}{dx} \left( T \frac{dW}{dx} \right) \right] W dx \end{aligned} \right\} \quad (2.6a \sim d)$$

再将振动模式表达式代入(2.3b)及相应边界条件可得到

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{L}_2(x^m N) &= 12sH(\nu_0^2 - \beta) x^{s-1} dW/dx \\ \mathbf{L}_2(x^m T) &= 6(\nu_0^2 - \beta) (dW/dx)^2 \end{aligned} \right\} \quad (2.7a, b)$$

这里  $L_2$  是另一个微分算子

$$L_2(\dots) = x^m \frac{d}{dx} x^{-(2m-1)} \frac{d}{dx} (\dots)$$

而边界条件化为

$$\text{当 } x=0, W=W_0, \frac{dW}{dx}=0, \lim_{x \rightarrow 0} \left( x \frac{d^3W}{dx^3} + \frac{d^2W}{dx^2} - \frac{\beta}{x} \frac{dW}{dx} \right) = 0, N=0, T=0 \quad (2.8a \sim e)$$

$$\text{当 } x=1, W=0, \frac{d^2W}{dx^2} + \lambda \frac{dW}{dx} = 0, \frac{dN}{dx} - \nu N = 0, \frac{dT}{dx} - \nu T = 0 \quad (2.9a \sim d)$$

其中

$$W_0 = W(x)|_{x=0}$$

与壳体的正振幅 (inward amplitude)  $W_m^+$  及负振幅 (outward amplitude)  $W_m^-$  的关系是

$$W_m^+ = W_0(\xi+1), W_m^- = W_0(\xi-1) \quad (2.10a, b)$$

利用 (2.8) 和 (2.9), 在 (2.6a~d) 中作分部积分, 最后导出

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 &= \int_0^1 \left( N \frac{dW}{dx} + sHx^{s-1}T \right) \frac{dW}{dx} dx \\ \alpha_1 &= \frac{3}{2}\alpha_3 + 2 \int_0^1 \left[ xL_1(W)W + sHx^{s-1}N \frac{dW}{dx} \right] dx \\ \alpha_2 &= 2\alpha_0, \alpha_3 = 2 \int_0^1 T \left( \frac{dW}{dx} \right)^2 dx \end{aligned} \right\} \quad (2.11a \sim d)$$

这样, 我们建立了描述圆柱正交各向异性旋转扁壳稳态轴对称大振幅振动的特征值方程组 (2.4)、(2.5) 和 (2.7a, b) 以及相应边界条件 (2.8)、(2.9)。

### 三、解析解

我们用修正迭代法求解上述方程组。对于几何参量较小的情形 ( $H < 3$ ), 我们在一阶迭代中略去方程 (2.4) 中含  $H$  的项及其它非线性项, 并置  $\xi = 0$ , 这样我们有

$$\left. \begin{aligned} L_1(W_1) - \omega_0^2 W_1 &= 0 \\ L_2(x^m N_1) &= 12(\nu_0^2 - \beta) sHx^{s-1} dW_1/dx \\ L_2(x^m T_1) &= 6(\nu_0^2 - \beta) (dW_1/dx)^2 \end{aligned} \right\} \quad (3.1a \sim c)$$

其中  $\omega_0$  是振频初值, 各量下标表示迭代阶数, 相应边界条件是

$$\left. \begin{aligned} \text{当 } x=0, W_1=W_0, \frac{dW_1}{dx}=0, \lim_{x \rightarrow 0} \left( x \frac{d^3W_1}{dx^3} + \frac{d^2W_1}{dx^2} - \frac{\beta}{x} \frac{dW_1}{dx} \right) &= 0 \\ N_1=0, T_1=0 \\ \text{当 } x=1, W_1=0, \frac{d^2W_1}{dx^2} + \lambda \frac{dW_1}{dx} &= 0, \frac{dN_1}{dx} - \nu N_1=0, \frac{dT_1}{dx} - \nu T_1=0 \end{aligned} \right\} \quad (3.2a \sim i)$$

方程 (3.1a) 显然是圆板的振动方程, 这意味我们迭代的初始解取平板解, 这对于几何参量  $H$

较小的情形是可行的,而且这样可以同时获得扁球壳和扁锥壳的解析的迭代解。对于大几何参量( $H \geq 3$ )的情形,则第一阶迭代时方程(2.4)中含 $H$ 的线性项要保留,即我们的初始解应取壳线振动的精确解而非平板解。这种迭代法我们称为改进的修正迭代法。应用这种方法时只能分别求解扁球壳和扁锥壳的振动方程,因为初始解不能用统一的形式写出。由改进的修正迭代法,我们应有

$$L_1(W_1) - \omega_L^2 W_1 = \frac{1}{x} sH \frac{d}{dx} (x^{s-1} N_1)$$

另外两个方程与(3.1b,c)一致。其中 $\omega_L$ 是壳体的线振频( $\omega_L \neq \omega_0$ )。在本文中我们具体给出求解(3.1a~c)及以后的二阶迭代解的过程。改进的修正迭代解仅给出数值结果。

方程(3.1a)的精确解是

$$W_1 = W_0 \left( \sum_{j=0}^{\infty} A_j^{(1)} x^{4j} + \mu_1 \sum_{j=0}^{\infty} B_j^{(1)} x^{4j+1+m} \right) \quad (3.3a)$$

其中 $\mu_1$ 是待定系数, $A_j^{(1)}$ 和 $B_j^{(1)}$ 由下述递公式求出

$$\left. \begin{aligned} A_0^{(1)} &= B_0^{(1)} = 1 \\ A_{j+1}^{(1)} &= \frac{\omega_0^2}{(4j+4)(4j+2)(4j+3+m)(4j+3-m)} A_j^{(1)} \\ B_{j+1}^{(1)} &= \frac{\omega_0^2}{(4j+5+m)(4j+3+m)(4j+4+2m)(4j+4)} B_j^{(1)} \end{aligned} \right\} \quad (3.3b \sim d)$$

解(3.3a)自动满足(3.2a~c),将它代入另两个边界条件(3.2f,g)可得

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} A_j^{(1)} + \mu_1 \sum_{j=0}^{\infty} B_j^{(1)} &= 0 \\ \sum_{j=0}^{\infty} 4j(4j-1+\lambda) A_j^{(1)} + \mu_1 \sum_{j=0}^{\infty} (4j+1+m)(4j+m+\lambda) B_j^{(1)} &= 0 \end{aligned}$$

这两个方程可化为

$$\sum_{j=0}^{\infty} \delta_j^{(1)} \omega_0^{2j} = 0, \quad \mu_1 = \left( \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j^{(1)} \omega_0^{2j} \right) \left( \sum_{j=0}^{\infty} \eta_j^{(1)} \omega_0^{2j} \right)^{-1} \quad (3.4a, b)$$

在导出(3.4a,b)中应用了式(3.3b~d)。我们在这里不给出 $\delta_j^{(1)}$ 、 $\lambda_j^{(1)}$ 及 $\eta_j^{(1)}$ 的表达式,它们是与 $m$ 、 $\lambda$ 有关的系数。由(3.4a)先求出 $\omega_0$ ,代入(3.4b)求出 $\mu_1$ ,再将 $\omega_0$ 的值代入(3.3b~d)定出 $A_j^{(1)}$ 及 $B_j^{(1)}$ 的值,从而完全定出 $W_1$ 。

设

$$C_j^{(1)} = 4(j+1)A_{j+1}^{(1)}, \quad D_j^{(1)} = (4j+1+m)\mu_1 B_j^{(1)}$$

$$E_j^{(1)} = \sum_{i=0}^j C_i^{(1)} C_{j-i}^{(1)}, \quad F_j^{(1)} = 2 \sum_{i=0}^j C_i^{(1)} D_{j-i}^{(1)}$$

$$G_j^{(1)} = \sum_{i=0}^j D_i^{(1)} D_{j-i}^{(1)}, \quad H_j^{(1)} = \sum_{i=0}^j A_i^{(1)} A_{j-i}^{(1)}$$

$$I_j^{(1)} = 2\mu_1 \sum_{i=0}^j A_i^{(1)} B_{j-i}^{(1)}, \quad J_j^{(1)} = \mu_1^2 \sum_{i=0}^j B_i^{(1)} B_{j-i}^{(1)}$$

这些表达式将用于以下的推导中。

将解 (3.3a) 代入方程 (3.1b, c), 积分该方程组可求出

$$N_1 = \mathbf{W}_0 \left( Ax^m + \sum_{j=0}^{\infty} K_j^{(1)} x^{4j+3+s} + \sum_{j=0}^{\infty} L_j^{(1)} x^{4j+m+s} \right) \quad (3.5a)$$

$$T_1 = \mathbf{W}_0^2 \left( Bx^m + \sum_{j=0}^{\infty} M_j^{(1)} x^{4j+7} + \sum_{j=0}^{\infty} N_j^{(1)} x^{4j+4+m} + \sum_{j=0}^{\infty} P_j^{(1)} x^{4j+2m+1} \right) \quad (3.5b)$$

其中各系数是

$$K_j^{(1)} = \frac{12(\nu_0^2 - \beta) s H C_j^{(1)}}{(4j+3+s)^2 - \beta}, \quad L_j^{(1)} = \frac{12(\nu_0^2 - \beta) s H D_j^{(1)}}{(4j+m+s)^2 - \beta}$$

$$M_j^{(1)} = \frac{6(\nu_0^2 - \beta) E_j^{(1)}}{(4j+7)^2 - \beta}, \quad N_j^{(1)} = \frac{6(\nu_0^2 - \beta) F_j^{(1)}}{(4j+4+m)^2 - \beta^2}$$

$$P_j^{(1)} = \frac{6(\nu_0^2 - \beta) G_j^{(1)}}{(4j+2m+1)^2 - \beta}$$

$A$ 和 $B$ 由边界条件定出为

$$A = (\nu - m)^{-1} \left[ \sum_{j=0}^{\infty} (4j+3+s-\nu) K_j^{(1)} + \sum_{j=0}^{\infty} (4j+m+s-\nu) L_j^{(1)} \right]$$

$$B = (\nu - m)^{-1} \left[ \sum_{j=0}^{\infty} (4j+7-\nu) M_j^{(1)} + \sum_{j=0}^{\infty} (4j+4+m-\nu) N_j^{(1)} \right]$$

$$+ \sum_{j=0}^{\infty} (4j+2m+1-\nu) P_j^{(1)} \Big]$$

现在, 将解 (3.3a) 和 (3.5a, b) 代入 (2.11a~d) 可求出  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  和  $\alpha_3$  的近似表达式是

$$\alpha_0 = \mathbf{W}_0^3 \bar{\alpha}_0, \quad \alpha_1 = 3\mathbf{W}_0^4 \bar{\alpha}_3 + 2\mathbf{W}_0^2 \bar{\alpha}_1$$

$$\alpha_2 = 2\mathbf{W}_0^3 \bar{\alpha}_0, \quad \alpha_3 = 2\mathbf{W}_0^4 \bar{\alpha}_3$$

其中

$$\begin{aligned}
\bar{\alpha}_0 = & \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \frac{AE_j^{(1)}}{4j+m+7} + \frac{AF_j^{(1)}}{4j+2m+4} + \frac{AG_j^{(1)}}{4j+3m+1} + \frac{sHBC_j^{(1)}}{4j+m+s+3} \right. \\
& + \frac{sHBD_j^{(1)}}{4j+2m+s} + \frac{\sum_{i=0}^j (K_i^{(1)}E_{j-i}^{(1)} + sHM_i^{(1)}C_{j-i}^{(1)})}{4j+10+s} \\
& + \frac{\sum_{i=0}^j [K_i^{(1)}F_{j-i}^{(1)} + L_i^{(1)}E_{j-i}^{(1)} + sH(N_i^{(1)}C_{j-i}^{(1)} + M_i^{(1)}D_{j-i}^{(1)})]}{4j+m+s+7} \\
& + \frac{\sum_{i=0}^j [K_i^{(1)}G_{j-i}^{(1)} + L_i^{(1)}F_{j-i}^{(1)} + sH(P_i^{(1)}C_{j-i}^{(1)} + N_i^{(1)}D_{j-i}^{(1)})]}{4j+2m+s+4} \\
& \left. + \frac{\sum_{i=0}^j (L_i^{(1)}G_{j-i}^{(1)} + sHP_i^{(1)}D_{j-i}^{(1)})}{4j+3m+s+1} \right\} \\
\bar{\alpha}_1 = & \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \frac{\omega_0^2 H_j^{(1)}}{4j+2} + \frac{\omega_0^2 I_j^{(1)}}{4j+3+m} + \frac{\omega_0^2 J_j^{(1)}}{4j+4+2m} + \frac{sHAC_j^{(1)}}{4j+s+m+3} \right. \\
& + \frac{sHAD_j^{(1)}}{4j+2m+s} + \frac{sH \sum_{i=0}^j K_i^{(1)}C_{j-i}^{(1)}}{4j+2s+6} \\
& \left. + \frac{sH \sum_{i=0}^j L_i^{(1)}D_{j-i}^{(1)}}{4j+2m+2s} + \frac{sH \sum_{i=0}^j (L_i^{(1)}C_{j-i}^{(1)} + K_i^{(1)}D_{j-i}^{(1)})}{4j+m+2s+3} \right\} \\
\bar{\alpha}_3 = & \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \frac{BE_j^{(1)}}{4j+m+7} + \frac{BF_j^{(1)}}{4j+2m+4} + \frac{BG_j^{(1)}}{4j+3m+1} + \frac{\sum_{i=0}^j M_i^{(1)}E_{j-i}^{(1)}}{4j+14} \right. \\
& + \frac{\sum_{i=0}^j P_i^{(1)}G_{j-i}^{(1)}}{4j+4m+2} + \frac{\sum_{i=0}^j (P_i^{(1)}E_{j-i}^{(1)} + N_i^{(1)}F_{j-i}^{(1)} + M_i^{(1)}G_{j-i}^{(1)})}{4j+2m+8} \\
& \left. + \frac{\sum_{i=0}^j (N_i^{(1)}E_{j-i}^{(1)} + M_i^{(1)}F_{j-i}^{(1)})}{4j+m+11} + \frac{\sum_{i=0}^j (P_i^{(1)}F_{j-i}^{(1)} + N_i^{(1)}G_{j-i}^{(1)})}{4j+3m+5} \right\}
\end{aligned}$$

于是, 方程(2.5)就化为

$$\mathbf{W}_0 + \left( 3\mathbf{W}_0^2 \frac{\bar{\alpha}_3}{\bar{\alpha}_0} + 2\frac{\bar{\alpha}_1}{\bar{\alpha}_0} \right) \xi + 2\mathbf{W}_0 \xi^2 + 2\mathbf{W}_0^2 \frac{\bar{\alpha}_3}{\bar{\alpha}_0} \xi^3 = 0 \quad (3.6)$$



对于给定的  $\mathbf{W}_0$  由此方程解出  $\xi$  的值, 它将在下面分析中用到.

为了求出线振频  $\omega_L$  和非线性振频  $\omega_{NL}$  的近似值, 我们进一步求解下述修正迭代方程

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_1(W_2) - \frac{\omega_{NL}^2}{2\xi^2 + 1} W_2 = \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left[ sHx^{\sigma-1} N_1 + f(\xi_1) (sHx^{\sigma-1} T_1 \right. \\ \left. + N_1 \frac{dW_1}{dx} \right) + g(\xi) T_1 \frac{dW_1}{dx} \end{aligned} \quad (3.7)$$

相应边界条件是

$$\text{当 } x=0, W_2 = \mathbf{W}_0, \frac{dW_2}{dx} = 0, \lim_{x \rightarrow 0} \left( x \frac{d^3 W_2}{dx^3} + \frac{d^2 W_2}{dx^2} - \frac{\beta}{x} \frac{dW_2}{dx} \right) = 0 \quad (3.8a \sim c)$$

$$\text{当 } x=1, W_2 = 0, \frac{d^2 W_2}{dx^2} + \lambda \frac{dW_2}{dx} = 0 \quad (3.8d \sim e)$$

将解(3.3a)及(3.5a, b)代入(3.7)右端, 考虑到边界条件(3.8a~c)后, 可求出(3.7)的解是

$$\begin{aligned} W_2 = \mathbf{W}_0 \left( \sum_{j=0}^{\infty} A_j^{(2)} x^{4j} + \mu_2 \sum_{j=0}^{\infty} B_j^{(2)} x^{4j+1+m} \right) \\ + \mathbf{W}_0 \left( \sum_{j=0}^{\infty} C_j^{(2)} x^{4j+m+s+1} + \sum_{j=0}^{\infty} D_j^{(2)} x^{4j+2s+4} + \sum_{j=0}^{\infty} E_j^{(2)} x^{4j+2s+m+1} \right) \\ + \mathbf{W}_0 \left( \sum_{j=0}^{\infty} F_j^{(2)} x^{4j+m+s+1} + \sum_{j=0}^{\infty} G_j^{(2)} x^{4j+8+s} + \sum_{j=0}^{\infty} H_j^{(2)} x^{4j+2m+s+2} \right) \\ + \sum_{j=0}^{\infty} I_j^{(2)} x^{4j+m+5} + \sum_{j=0}^{\infty} J_j^{(2)} x^{4j+2m+2} \\ + \mathbf{W}_0 \left( \sum_{j=0}^{\infty} K_j^{(2)} x^{4j+m+5} + \sum_{j=0}^{\infty} L_j^{(2)} x^{4j+2m+2} + \sum_{j=0}^{\infty} M_j^{(2)} x^{4j+12} \right) \\ + \sum_{j=0}^{\infty} N_j^{(2)} x^{4j+2m+6} + \sum_{j=0}^{\infty} P_j^{(2)} x^{4j+3m+3} \end{aligned} \quad (3.9)$$

其中  $\mu_2$  是待定系数, 系数  $A_j^{(2)}, B_j^{(2)}, \dots, P_j^{(2)}$  均与式(3.3b~d)中所表达相似, 已表示为  $\omega_{NL}$  的有限幂级数, 这里不给出其具体表达式.

将解(3.9)代入边界条件(3.8d, e), 再经过适当的变换后就得到一个渐近关系式

$$\begin{aligned} \left( \sum_{j=0}^{\infty} \delta_j^{(2)} \omega_{NL}^{2j} + H^2 \sum_{j=0}^{\infty} \sigma_j^{(2)} \omega_{NL}^{2j} \right) + \mathbf{W}_0 \left( H \sum_{j=0}^{\infty} \zeta_j^{(2)} \omega_{NL}^{2j} \right) \\ + \mathbf{W}_0 \left( \sum_{j=0}^{\infty} \eta_j^{(2)} \omega_{NL}^{2j} \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

以及

$$\mu_2 = \frac{\left( \sum_{j=0}^{\infty} \bar{\lambda}_j \omega_{NL}^{2j} + H^2 \sum_{j=0}^{\infty} \bar{\sigma}_j \omega_{NL}^{2j} \right) + \mathbf{W}_0 \left( H \sum_{j=0}^{\infty} \bar{\eta}_j \omega_{NL}^{2j} \right) + \mathbf{W}_0^2 \left( \sum_{j=0}^{\infty} \bar{\xi}_j \omega_{NL}^{2j} \right)}{\sum_{j=0}^{\infty} \bar{\delta}_j \omega_{NL}^{2j}} \quad (3.11)$$

这里, 诸系数  $\delta_j^{(2)}$ ,  $\sigma_j^{(2)}$ ,  $\xi_j^{(2)}$ ,  $\eta_j^{(2)}$ ,  $\bar{\lambda}_j$ ,  $\bar{\sigma}_j$ ,  $\bar{\eta}_j$ ,  $\bar{\xi}_j$  及  $\bar{\delta}_j$  极易由计算机定出, 它们与  $\xi$  值及壳的材料参量,  $\beta$ ,  $\nu_0$  和壳的形状参量  $s$ , 以及边界条件相关。

方程(3.10)即是我们求出的壳的振动频幅特性关系式。计算表明, 这些无穷级数收敛迅速, 一般十项就已收敛。计算的流程是: 给定  $\mathbf{W}_0$  的值, 由(3.6)求出  $\xi$ , 由(2.10a)定出  $W_m^+$ , 再由(3.10)求出  $\omega_{NL}$ , 由(3.11)定出  $\mu_2$ , 最后定出  $A_j^{(2)}$ ,  $B_j^{(2)}$ ,  $\dots P_j^{(2)}$  的值。

在方程(3.10)中置  $\xi=0$  和  $\mathbf{W}_0=0$ , 由此可求出线振频  $\omega_L$  的近似值。如果用改进的修正迭代法, 则在第一步迭代中就求出  $\omega_L$  的精确值。计算表明, 当  $H < 3$  时, 两种算法求出的  $\omega_L$  值非常接近。当  $H \geq 3$  时, 建议使用改进迭代法, 这样可求出精度更高的解。在以下的讨论中, 结果以比值  $\omega_{NL}/\omega_L$  与  $W_m^+$  的关系形式给出。

## 四、结果与讨论

我们先以文[11]中所考虑过的情形为例, 研究各向同性扁球壳的幅频响应特性。对于几何参量较小的壳体 ( $H=0.5$ ), 其幅频特性曲线与平板的幅频特性曲线相似。随着振幅的增大, 振频有所增加, 幅频响应呈现出硬化型的非线性 (hardening nonlinearity type)。对于几何参量较大的壳体 ( $H=1.0$ ), 则幅频响应既可能呈现出硬化型非线性, 也可能呈现出软化型的非线性 (softening nonlinearity type), 即振频随振幅增大而减少, 这要取决于壳体的边界支承情况, 如图1所示, 我们的结果与文[11]的结果基本一致, 只是几何参量 ( $H$ ) 以及振幅变大后, 二者差异显著。这是由于文[11]的方法的局限性, 以及该文用摄动法导出的幅频响应关系式仅保留振幅二阶效应所造成的。我们在图1中针对  $H=1$  的固定夹紧扁球壳, 给出用前面提及的改进修正迭代法计算出的结果, 它与用修正迭代法计算出的结果相当吻合。

接下来, 我们讨论壳体的几何参量及材料参量 (即各向异性参量  $\beta$ ) 对其振动性态的影响。我们以夹紧边界支承和铰支边界支承两种情形为例, 结果绘于图2~5中。我们看到, 壳体的几何参量 ( $H$ ) 对其幅频响应特性影响很大, 它可以改变振动性态, 使非线性由硬化型变

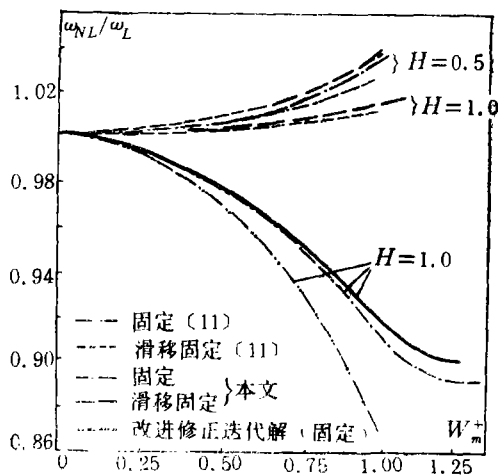


图1 理论结果的比较 ( $\beta=1$ ,  $\nu_0=0.3$ )

为软化型。随着振幅加大，非线性又由软化型过渡到硬化型，而初始阶段的软化程度随着几何参量的增大而变大。材料参量 $\beta$ 对振动的影响与边界支承情况有关。对于固定夹紧情形， $\beta$ 的影响较小。而对铰支边界情形，则 $\beta$ 的影响较大。总的看来，随着 $\beta$ 的增大，非线性效应及初始软化程度有所减弱。

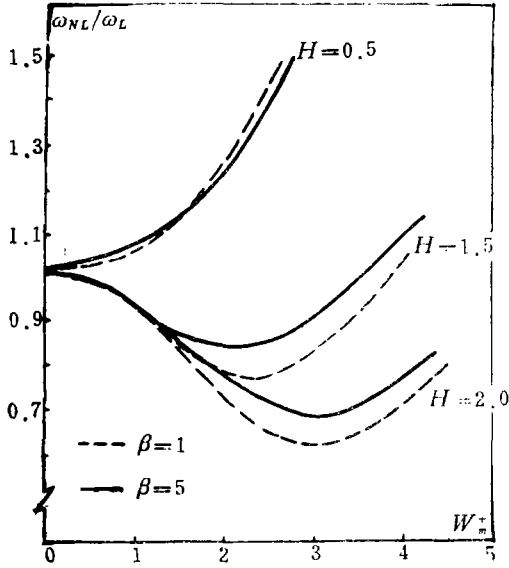


图2 几何参量及材料参量对夹紧固定各向异性扁球壳的振动性态的影响( $\nu_0=0.3$ )

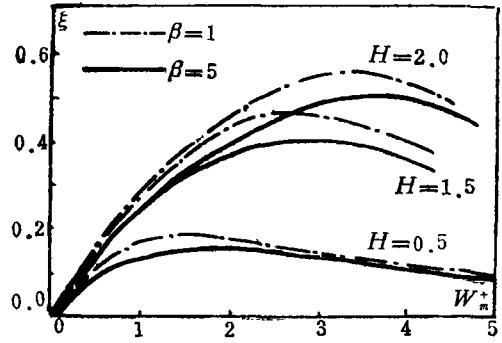


图3 几何参量及材料参量对夹紧固定各向异性扁球壳振动的漂移的影响( $\nu_0=0.3$ )

我们还看到，表征“漂移”的内禀量 $\xi$ 是随着壳体的几何参量增大而增大的，而随 $\beta$ 的增大反而有微弱减小。随着振幅的增大， $\xi$ 开始变大，达到某个极大值后就开始衰减。因而我们不难得到扁球壳振动的大致图象：具有较小几何参量的壳振动时呈现出平板特性，振频随振幅增大，振幅的非对称性也不明显。当几何参量变大后，随着振幅增大，壳的振频开始下降，振幅非对称性愈来愈明显。当振幅继续增大后，振频回升，振幅的非对称性减弱，此时呈现出平板特性。同时，我们从图2~5还看出，振动非线性性态的改变与振幅由非对称性向对称性的过渡有着某种联系，值得进一步的研究。

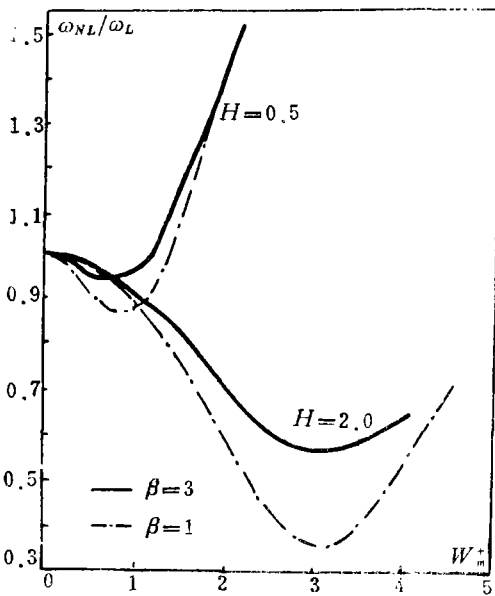


图4 几何参量和材料参量对铰支各向异性扁球壳振动的影响( $\nu_0=0.3$ )

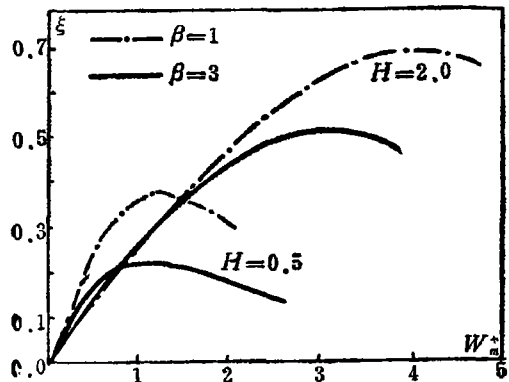


图5 几何参量和材料参量对铰支各向异性扁球壳振动漂移的影响( $\nu_0=0.3$ )

最后，我们研究扁球壳和扁锥壳在四种常见边界支承情况下的幅频特性。计算结果绘于图6~9中。由此看出，扁锥壳与扁球壳的振动特性大致相同。在相同的边界条件和几何参量及

材料参量的情况下,扁球壳振动的非线性及其软化程度稍大些(针对 $H=2$ 的情形)。另外,铰支边界支承的壳体振动非线性及其软化程度最为强烈,其次是固定夹紧边界支承的壳体,这与壳体开顶后的性态是一致的<sup>[10]</sup>。而可滑移固定边界支承的壳体振动的非线性及软化程度最弱。

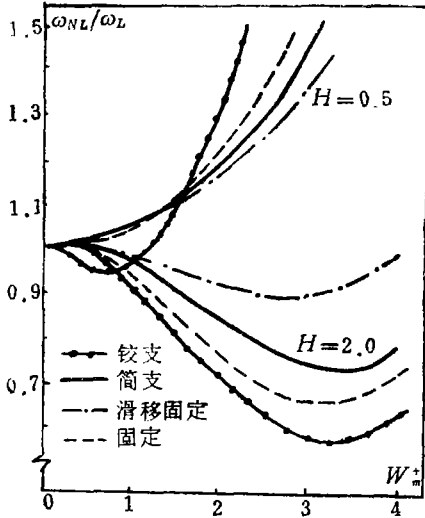


图6 不同的边界支承对各向异性扁球壳振动的影响( $\beta=3, \nu_\theta=0.3$ )

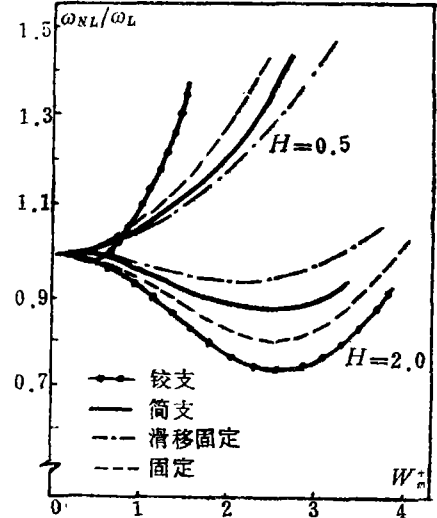


图7 不同的边界支承对各向异性扁锥壳振动的影响( $\beta=3, \nu_\theta=0.3$ )

本文得到的幅频响应结果范围较以往的更为宽广,并得到了振幅变化与非线性性态发展的最新结果。对于开顶旋转壳的研究正在进行中。

作者感谢导师刘人怀教授的对本文的细心审阅。

### 参 考 文 献

- [1] Reissner, E., On the vibrations of shallow spherical shells, *J. Appl. Phys.*, 17 (1946), 1038.
- [2] Reissner, E., On axisymmetrical vibrations of shallow spherical shells, *Q. Appl. Math.*, 13 (1955), 279.
- [3] Evensen, H.A., et al., Dynamic response and stability of shallow spherical shells subject to time-dependent loading, *AIAA J.*, 5 (1967), 969.
- [4] Singh, P.N., et al., Large amplitude axisymmetric vibrations of moderately thick spherical caps, *J. Sound Vib.*, 20(3) (1972), 269.
- [5] Ramachandran, J., Vibration of shallow spherical shells at large amplitudes, *J. Appl. Mech.*, 41 (1974), 811.
- [6] Berger, H.M., A new approach to the analysis of large deflection of plates, *J. Appl. Mech.*, 22 (1955), 465.
- [7] Ramachandran, J., Large amplitude vibrations of shallow spherical shell with concentrated mass, *J. Appl. Mech.*, 43 (1976), 363.
- [8] Bucco, D., et al., The dynamic analysis of shallow spherical shells, *J. Appl. Mech.*, 45 (1978), 690.

- [9] Yasuda, K., et al., Nonlinear forced oscillations of a shallow spherical shell, *Bull. JSME*, 27 (1984), 2233.
- [10] Dumir, P.C., Nonlinear axisymmetric response of orthotropic thin truncated conical and spherical caps, *Acta Mechanica*, 60 (1986), 121.
- [11] Sinharay, G.C., et al., Large amplitude free vibrations of shallow spherical shell and cylindrical shell—A new approach, *Int. J. Non-Linear Mech.*, 20 (1985), 69.
- [12] Nayfeh, A.H. and D.T. Mook, *Nonlinear Oscillations*, John Wiley & Sons Inc., New York (1979), 3.
- [13] Li Dong (李东) and Liu Ren-huai(刘人怀), Nonlinear vibration of thin circular plates, *Adv. Appl. Math. Mech. China*, 3, International Academic Publishers (1990).
- [14] 李东, 刘人怀, 修正迭代法在波纹圆板非线性振动问题中的应用, *应用数学和力学*, 11(1) (1990), 13.
- [15] 李东, 环形薄板的大幅度振动, *应用数学和力学*, 12(6) (1991), 547—556.
- [16] 李东, 波纹环形板的非线性振动, *上海工业大学学报*, 12 (1991); On the nonlinear vibration of corrugated annular plates, *Int. J. Non-Linear Mech.*, 26 (1991).

## Nonlinear Vibrations of Orthotropic Shallow Shells of Revolution

Li Dong

(Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics;  
Shanghai University of Technology, Shanghai)

### Abstract

A set of nonlinearly coupled algebraic and differential eigenvalue equations of nonlinear axisymmetric free vibration of orthotropic shallow thin spherical and conical shells are formulated following an assumed time-mode approach suggested in this paper. Analytic solutions are presented and an asymptotic relation for the amplitude-frequency response of the shells is derived. The effects of geometrical and material parameters on vibrations of the shells are investigated.

**Key words** geometrical nonlinearity, vibration, orthotropy, shallow conical shell, shallow spherical shell