

# 确定薄板在二重特征值处屈曲 状态的一种方法\*

何录武 程昌钧

(兰州大学力学系, 1991年6月17日收到)

## 摘 要

本文结合有限元法和摄动法给出了一个确定薄板在二重特征值处分支方向的方法。用此方法, 我们对双向受压矩形板在二重特征值处的屈曲状态进行了数值计算, 结果表明此方法是可行的。

**关键词** 二重特征值 分支方向的确定 有限元方法 摄动法 矩形板的屈曲

## 一、引 言

板壳的屈曲和过屈状态在工程技术上是一个非常重要的问题, 因此, 有必要对它们进行深入的研究。目前, 对于这方面的问题的主要方法是近似法和数值法。例如: 摄动法<sup>[1]</sup>, 差分法<sup>[2]</sup>和有限元法<sup>[3~5]</sup>等。对于结构的屈曲问题, 求解在单特征值处分叉出去的屈曲状态, 在数值计算上已有一些有效的方法<sup>[6]</sup>。但对多重特征值的屈曲状态的计算, 目前仅有少量的方法, 主要的困难是分支方向的确定。对于薄板的屈曲问题, 由于它的算子方程的非线性项是齐三次的<sup>[8,9]</sup>, 因此, 通常所用的代数分支方程<sup>[6,7]</sup>是失效的, 而[10]所给出的方法, 在数值实现方面也是比较困难的。本文根据以挠度和应力函数为变量而建立的薄板屈曲问题的广义变分原理<sup>[4,5,9]</sup>, 通过有限元离散得到了薄板屈曲问题的离散方程组, 结合摄动法给出了一个确定在二重特征值处分支方向的方法。作为应用, 我们对四边固支和四边简支双向受压矩形板在二重特征值处的屈曲状态进行了分析, 并用延续计算方法获得了它们的8个屈曲状态(分支解)。

## 二、薄板屈曲问题的离散方程组

根据[4,5], 使用有限元法, 薄板屈曲问题的无量纲形式的离散方程组可以写成:

$$F(x, \lambda) = (A - \lambda C)x + F_1(x) = 0 \quad (2.1)$$

其中,  $x$  是一个表示广义节点参数的向量,  $\lambda$  是一个无量纲的载荷参数,  $A, C$  和  $F_1(x)$  是  $n \times n$

\* 叶开沅推荐。

国家和甘肃省自然科学基金资助项目。

的实数矩阵。这里,  $n$ 表示广义节点参数的个数,  $F_1(x)$ 具有下面性质:

$$F_1(\alpha x^{(1)} + \beta x^{(2)}) = \alpha F_1(x^{(1)}) + \beta F_1(x^{(2)}) \quad (2.2)$$

显然, 对任何的  $\lambda \in R^1$ ,  $x \equiv 0$  总是(2.1)的一个解, 它对应着未屈曲状态。那么, (2.1)在未屈曲状态上的奇点等价于求下面广义特征值问题

$$(A - \lambda C)x = 0 \quad (2.3)$$

的特征值。我们可以采用子空间迭代法求(2.3)的特征值和对应的特征向量<sup>[4]</sup>。

### 三、分支方向的确定

设  $\lambda^*$  是(2.3)的一个特征值以及  $\dim \text{Null}(F_x(0, \lambda^*)) = 2$ , 即  $\lambda^*$  是(2.3)的一个二重特征值。令  $\text{Null}(F_x(0, \lambda^*)) = \text{span}\{e_1, e_2\}$ 。其中,  $\langle Ce_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ),  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  表示  $R^n$  中的内积。假定(2.1)在  $\lambda = \lambda^*$  处的分支解可展成如下形式:

$$\left. \begin{aligned} x &= \varepsilon(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2) + \varepsilon^2 x^{(2)} + \varepsilon^3 x^{(3)} + \dots \\ \lambda &= \lambda^* + \varepsilon \lambda^{(1)} + \varepsilon^2 \lambda^{(2)} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (3.1a, b)$$

小参数  $\varepsilon$  被定义为:

$$\langle x, (\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2) \rangle = \varepsilon \quad (3.2)$$

其中  $\alpha_1$  和  $\alpha_2$  为待定常数。

将(3.1)代入(2.1)比较  $\varepsilon$  的同次幂项, 我们有:

$$(A - \lambda^* C)(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2) = 0 \quad (3.3a)$$

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1 \quad (3.3b)$$

$$(A - \lambda^* C)x^{(2)} - \lambda^{(1)} C(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2) + F_1(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2)(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2) = 0 \quad (3.4)$$

不难看出(3.3a)是自动满足的。(3.4)的可解性条件为:

$$\left. \begin{aligned} \lambda^{(1)} \langle e_1, C(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2) \rangle &= \langle e_1, F_1(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2)(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2) \rangle \\ \lambda^{(1)} \langle e_2, C(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2) \rangle &= \langle e_2, F_1(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2)(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2) \rangle \end{aligned} \right\} \quad (3.5a, b)$$

注意到  $\langle Ce_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ , 从(3.5), 我们可以求出  $\lambda^{(1)}$ , 并且从本文后面的两个实例, 都有  $\langle e_i, F_1(e_j) e_k \rangle = 0$  ( $i, j, k = 1, 2$ ), 对更一般的情况,  $\langle e_i, F_1(e_j) e_k \rangle = 0$  也是成立的, 见[4]。

若(3.5a, b)的右端都不为零, 则从(3.3b)和(3.5), 我们可得到一组确定  $\alpha_1, \alpha_2, \lambda^{(1)}$  的方程。因此, 在  $\langle x^{(2)}, e_i \rangle = 0$  ( $i = 1, 2$ ) 的条件下, 可从(3.4)解出  $x^{(2)}$ 。

若  $\langle e_i, F_1(e_j) e_k \rangle = 0$  ( $i, j, k = 1, 2$ ), 则有  $\lambda^{(1)} = 0$ 。这时, 我们需要分析  $\varepsilon^3$  的项, 得到

$$(A - \lambda^* C)x^{(3)} - \lambda^{(2)} C(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2) + F_1(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2)x^{(2)} + F_1(x^{(2)})(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2) = 0 \quad (3.6)$$

设  $x_{ij}^{(2)}$  为下面方程

$$(A - \lambda^* C)x_{ij}^{(2)} = -F_1(e_i) e_j \quad (3.7)$$

的解(要求  $\langle x_{ij}^{(2)}, e_k \rangle = 0$  ( $i, j, k = 1, 2$ )), 则有  $x^{(2)} = \sum_{i,j=1}^2 \alpha_i \alpha_j x_{ij}^{(2)}$ 。由(3.6)的可解性条件

有:

$$\lambda^{(2)} \langle e_1, C(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2) \rangle = \langle e_1, F_1(x^{(2)})(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2) + F_1(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2)x^{(2)} \rangle \quad (3.8a)$$

$$\lambda^{(2)} \langle e_2, C(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2) \rangle = \langle e_2, (F_1(x^{(2)})(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2) + F_1(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2) x^{(2)}) \rangle \quad (3.8b)$$

对于(3.8)可利用(2.2)求 $\lambda^{(2)}$ 。若 $\lambda^{(2)}=0$ ，上述过程可继续作下去。

若从(3.8)和(3.3b)得到一组解 $(\alpha_1, \alpha_2, \lambda^{(2)})$ ，则可认为它是 $\lambda=\lambda^*$ 处的一个分支方向。对于适当小的 $\varepsilon$ ，那么

$$x = \varepsilon(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2) + \varepsilon^2 x^{(2)} \quad (3.9a)$$

$$\lambda = \lambda^* + \varepsilon^2 \lambda^{(2)} \quad (3.9b)$$

将是在 $\lambda=\lambda^*$ 处附近的屈曲状态的一个很好的近似解，一个一般的迭代法就可求得满足一定精度的屈曲状态。

一旦获得了在 $\lambda=\lambda^*$ 处附近的屈曲状态，就可用延续算法<sup>[4~6]</sup>获得大范围的屈曲状态。

### 四、数值结果

按照前面的讨论，现在我们来分析双向受压矩形板的屈曲状态，如图1所示我们考虑下面两种边界条件（对挠度 $W$ ）：

1> KF：四边固支

2> KS：四边简支

应力函数 $\Psi$ 的边界条件可写成 $\Psi = \partial\Psi/\partial n = 0$ 。

引入下面无量纲变量和参数：

$$x = X_1/b, \quad y = Y_1/b, \quad l = a/b, \quad \lambda = Phb^2/D$$

其中， $D = Eh^3/12(1-\mu^2)$ ， $E$ 和 $\mu$ 为薄板的弹性常数， $h$ 为板的厚度。

对于矩形板，在有限元分析中，我们采用矩形单元，并且取挠度 $W$ 和应力函数 $\Psi$ 以及

它们的一阶偏导数在矩形单元角点上的值为节点参数。令 $l=1$ 和 $\mu=0.3$ ，将板分成 $10 \times 10$ 网格。用子空间迭代法，我们得到了KF的前两个特征值， $\lambda_1=51.313$ ， $\lambda_2=89.840$ ， $\lambda_2$ 是一个二重特征值。对于 $16 \times 16$ 网格，我们得到， $\lambda_1=51.91745$ ， $\lambda_2=91.17143$ ， $\lambda_3=91.174102$ 。 $\lambda_2$ 和 $\lambda_3$ 可认为是一个二重特征值。

在 $\lambda=\lambda_2$ 处KF的分支方向为：

$$(1) \quad \alpha_1=1.0, \quad \alpha_2=0.0, \quad \lambda^{(2)}=0.10218597.$$

$$(2) \quad \alpha_1=0.25425071, \quad \alpha_2=-0.96713835, \quad \lambda^{(2)}=0.9557009 \times 10^{-1}.$$

$$(3) \quad \alpha_1=0.45560873, \quad \alpha_2=0.89018017, \quad \lambda^{(2)}=0.12322825.$$

$$(4) \quad \alpha_1=0.47594768, \quad \alpha_2=-0.87947363, \quad \lambda^{(2)}=0.12689453.$$

$(-\alpha_1, -\alpha_2, \lambda^{(2)})$ 也是一个分支方向，图2~4分别给出了(1)，(2)和(3)在不同的 $\lambda$ 值时的挠度 $(W/h)$ 的变化情况。对于(3)和(4)这两种情况，可以看到这屈曲状态是关于矩形板的对角线对称的（反对称的）。

对于KS( $10 \times 10$ 网格)， $\lambda_1=19.522$ ， $\lambda_2=48.544$ ， $\lambda_2$ 是一个二重特征值。 $\lambda_1$ 和 $\lambda_2$ 的精确值分别为 $\lambda_1=19.739$ ， $\lambda_2=49.348$ 。在 $\lambda=\lambda_2$ 处的分支方向为：

$$(1) \quad \alpha_1=1.0, \quad \alpha_2=0.0, \quad \lambda^{(2)}=0.26964929 \times 10^{-1}.$$

$$(2) \quad \alpha_1=0.18960059, \quad \alpha_2=0.98186135, \quad \lambda^{(2)}=0.2230299 \times 10^{-1}.$$

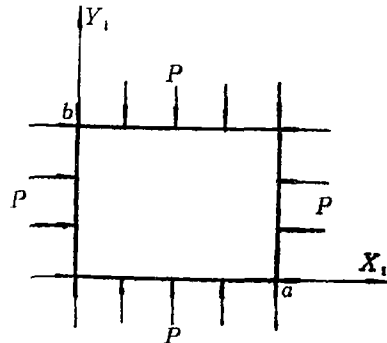


图 1

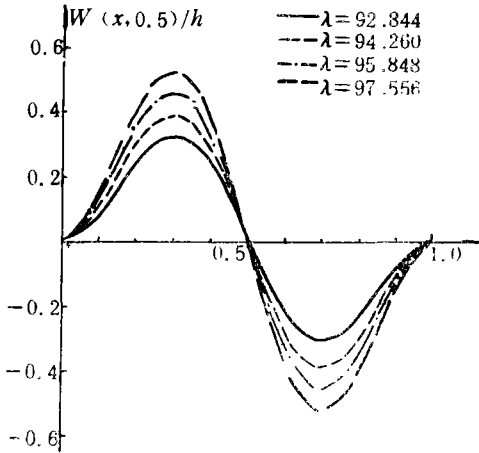


图2 KF ( $l=1, \mu=0.3$ ),  $(a_1, a_2)=(1, 0)$

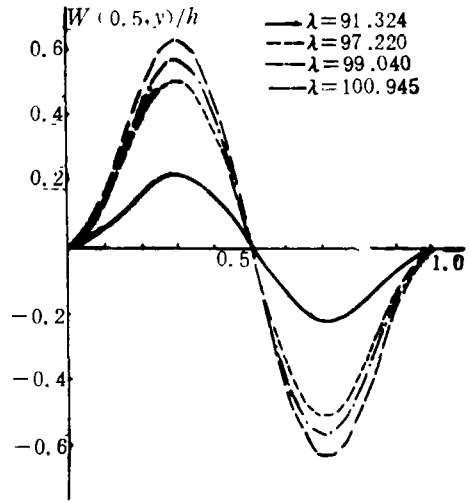


图3 KF ( $l=1, \mu=0.3$ ),  $y:1.0 \rightarrow 0.0$   
 $(a_1, a_2)=(0.25425071, -0.96713835)$

(3)  $\alpha_1=0.9171875, \alpha_2=0.39845592,$   
 $\lambda^{(2)}=0.3753408 \times 10^{-1}.$

(4)  $\alpha_1=-0.66819477, \alpha_2=0.74398643,$   
 $\lambda^{(2)}=0.3006784 \times 10^{-1}.$

同时,  $(-\alpha_1, -\alpha_2, \lambda^{(2)})$  也是一个分支方向, 这里的情况与KF是相似的. 因此, 我们仅给出 (3) 在不同的  $\lambda$  值时的挠度 ( $W/h$ ) 曲线, 图5.

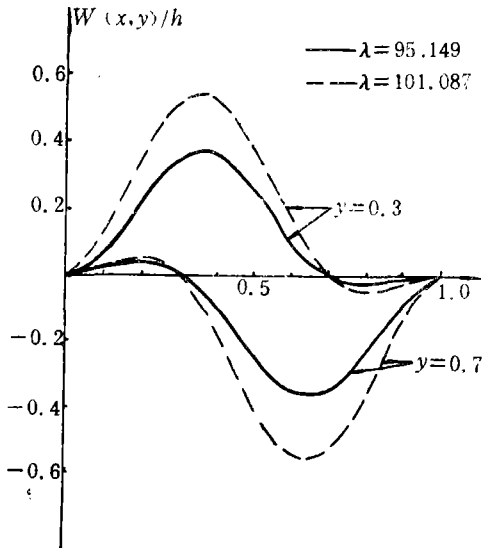


图4 KF ( $l=1, \mu=0.3$ )  
 $(a_1, a_2)=(0.45560873, 0.89018017)$

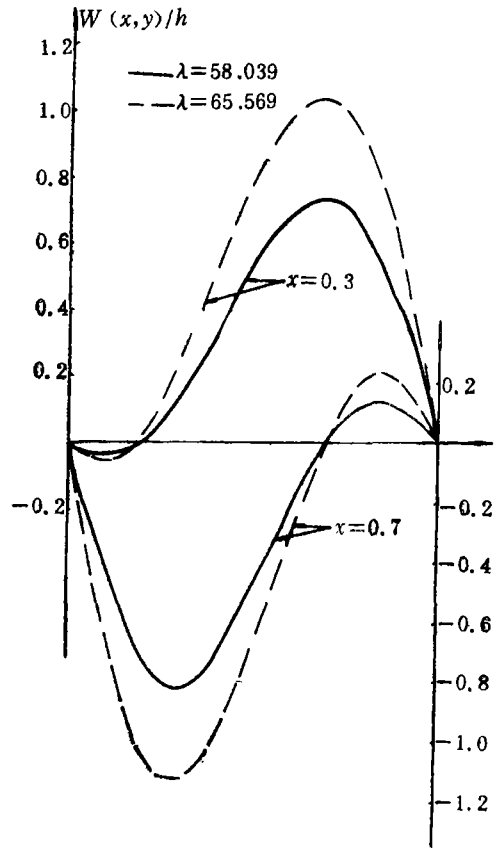


图5 KS ( $l=1, \mu=0.3$ ),  $y:1.0 \rightarrow 0.0$   
 $(a_1, a_2)=(0.9178751, 0.39845592)$

## 参 考 文 献

- [ 1 ] 张建武、范祖尧, 简支矩形板后屈曲平衡路径的一个摄动解, 上海交通大学学报, 18(5) (1984), 101—111.
- [ 2 ] Bauer, L. and E. L. Reiss, Non-linear buckling of rectangular plates, *SIAM J. Appl. Math.*, 13(3) (1965), 603—626.
- [ 3 ] 吕小安, 开孔柱壳的非线性理论与稳定性问题, 兰州大学博士学位论文 (1990).
- [ 4 ] 何录武, 夹层板的屈曲和分支, 兰州大学博士学位论文 (1990).
- [ 5 ] 何录武、程昌钧, 矩形薄板的屈曲状态, 应用数学和力学, 13(5) (1992).
- [ 6 ] 朱正佑、程昌钧, 《分支问题的数值计算方法》, 兰州大学出版社 (1989).
- [ 7 ] Keller, H. B., Numerical solution of bifurcation and nonlinear eigenvalue problems, *Application of Bifurcation Theory*, Ed. P. H. Rabinowitz, Academic Press, Inc. (1977).
- [ 8 ] 程昌钧、朱正佑, 《结构的屈曲和分叉》, 兰州大学出版社 (1991).
- [ 9 ] Yang Xiao and Cheng Chang-jun, Variational principles on perforated thin plates and finite element method on buckling and post-buckling, *Acta Mechanica Sinica*, 7(2) (1991), 1—10.
- [ 10 ] Kearfott, R. B., On a general technique for finding directions proceeding from bifurcation points, *Numerical Methods for Bifurcation Problems*, Ed. T. Kupper, H. D. Mittelman and H. Weber, ISNM 70, Birkhauser, Verlag (1984).

## A Method of Determining Buckled States of Thin Plates at a Double Eigenvalue

He Lu-wu      Cheng Chang-jun

(Department of Mechanics, Lanzhou University, Lanzhou)

### Abstract

A method of determining bifurcation directions at a double eigenvalue is presented by combining the finite element method with the perturbation method. By using the present method, the buckled states of rectangular plates at a double eigenvalue are numerically analyzed. The results show that this method is effective.

**Key words** double eigenvalue, bifurcation directions, FEM, perturbation method, buckling of rectangular plates