

非线性动力学大范围分析的一种 数值方法——单元映射法*

刘铁牛 徐道临

(大连理工大学, 1990年12月27日收到)

摘 要

本文将非线性动力学问题转化为点映射形式, 并以映射的单值连续为条件, 将状态空间分割成有限小的单元, 用定义在单元上的线性映射逼近原来的非线性映射. 映射不动点的大范围分布问题化为线性方程组的求解, 继而用迭代法求出不动点的准确位置. 用线性映射的变形矩阵可方便地判断不动点的吸引核, 从而为描绘其吸引域带来了很大便利. 本文提出的方法比胞映射法更为简便有效, 文后举了例题.

关键词 单元 映射 不动点 吸引域

一、前 言

包含振动、控制、系统工程等广义的动力学中, 非线性问题变得愈来愈重要. 由于这种问题不能指望求精确解, 所以不得不依赖于数值分析. 数值方法包括直接数值法^[5]以及点映射、胞映射法^{[1][2][3]}. 直接数值法适用于求解系统的周期解; 胞映射法对系统的大范围分析也是有意义的^[4].

本文以映射的单值性与连续性为基础, 把有限状态空间分割为若干有限小的单元, 并可进行如下分析:

1. 判断系统的平衡态、周期点(与周期解相对应)所在的单元, 继而求出它们的准确位置;
2. 分析平衡态和周期点的稳定性;
3. 给出稳定的平衡态、周期点(即吸引子)吸引核及吸引域.

因此, 本文所提出的方法, 不仅能完成有关周期解的局部分析, 也能完成有限状态空间内大范围问题的分析.

二、单元映射及其构成

自治或非自治的非线性微分方程的解, 可用某一映射来描述^[6]. 即在给定的 m 维状态空间 Ω 中, 像点 $X^{(k+1)}$ 与原像点 $X^{(k)}$ 相关联, 表示为:

* 李骊推荐.

$$X^{(k+1)} = \varphi(X^{(k)}), \quad \varphi: R^m \rightarrow R^m, \quad \forall X^{(k)} \in \Omega \subset R^m$$

我们可以假定 φ 唯一存在而且具有连续性。本文利用下述两个思想：

1. 把状态空间分割为有限小的单元，从而把大范围分析问题化为局部分析问题；
2. 在每个单元内用线性逼近非线性，从而使非线性问题归结为线性问题。

原像点 $X^{(k)}$ ，像点 $X^{(k+1)}$ 分别记以 x, y 。以二维问题为例，状态空间的有限域 $\Omega \subset R^2$ 。将 Ω 分割为有限多且相同的三角形单元，三角形顶点称为节点。设全部有 N 个节点， L 个单元。记第 l 个单元所规定的区域为 $\Omega_l \subset \Omega$ ，它的三个节点设为 X_i, X_j, X_k ，由于映射在 Ω 上单值连续，所以在 Ω_l 上可以将 φ 表示成如下形式：

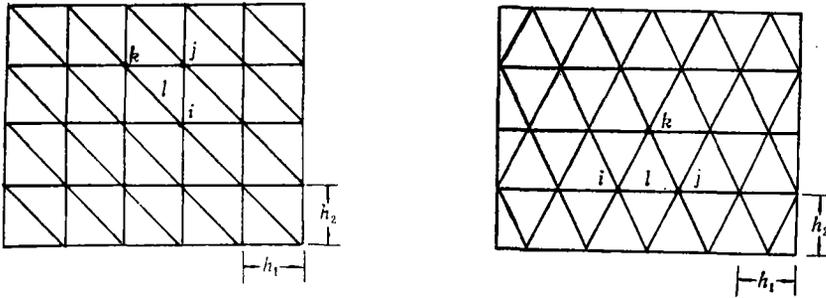
$$y = \varphi(x) = \varphi_l(x) + o(h)$$

其中
$$\varphi_l(x) = \Phi_l x + C_l \quad \forall x \in \Omega_l \tag{2.1}$$

变形矩阵：
$$\Phi_l = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \end{bmatrix}_l, \quad \text{移动矢量： } C_l = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}_l$$

$o(h)$ 是坐标步长 h_1, h_2 的二次以上的小量，可忽略。映射近似表示为线性形式：

$$y = \Phi_l x + C_l \quad \forall x \in \Omega_l \tag{2.2}$$



(a) 直角三角形元

(b) 等腰三角形元

图 1

首先用数值积分算出节点的映射值

$$y_p = \varphi(x_p) \quad (p = i, j, k)$$

再用线性插值可以容易地求出 Φ_l, C_l 。即：

$$[\Phi_l, C_l] = [\varphi(x_i), \varphi(x_j), \varphi(x_k)] \begin{bmatrix} x_i & x_j & x_k \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \tag{2.3}$$

若采用下列形式
$$y = \Phi_l(x - x_i) + C'_l \quad \forall x \in \Omega_l \tag{2.4}$$

这里
$$C'_l = C_l + \Phi_l x_i$$

若令
$$\Delta^{jt} = \begin{pmatrix} \Delta_1^{jt} \\ \Delta_2^{jt} \end{pmatrix} = y_j - y_i = \varphi(x_j) - \varphi(x_i)$$

则，按图1(a)直角三角形分割时：

$$\left. \begin{aligned} C'_l &= y_i = \varphi(x_i) \\ \Phi_{11} &= \frac{\Delta_1^{jt}}{h_1}, \quad \Phi_{12} = \frac{\Delta_1^{kt}}{h_2} \\ \Phi_{21} &= \frac{\Delta_2^{jt}}{h_1}, \quad \Phi_{22} = \frac{\Delta_2^{kt}}{h_2} \end{aligned} \right\} \tag{2.5}$$

若按图1(b)等腰三角形分割时;

$$\left. \begin{aligned} C_i^i &= y_i = \varphi(x_i) \\ \Phi_{11} &= \Delta_1^{i1}/h_1, \quad \Phi_{12} = (\Delta_1^{i1} - \Delta_1^{i2})/2h_2 \\ \Phi_{21} &= \Delta_2^{i1}/h_1, \quad \Phi_{22} = (\Delta_2^{i1} - \Delta_2^{i2})/2h_2 \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

三、不动点的求法

1. 不动点位置的初判断

如果预先不知道不动点的大概位置, 计算是很难收敛的。本文的方法, 能方便地识别含有不动点的单元。这一步骤称为初判断。

$$\delta(x) = y - x, \quad \delta: R^2 \rightarrow R^2 \quad \forall x \in \Omega_i \quad (3.1)$$

称为 x 点的像偏量。显然, 不动点 x^* 的像偏量是零。即

$$\delta(x^*) = 0 \quad (3.2)$$

所以单元 Ω_i 中存在不动点的充要条件是, 像偏量 δ 的零点是 Ω_i 的内点。

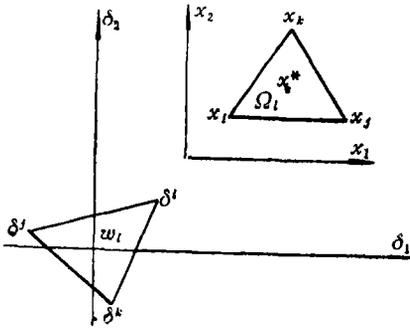


图2 像偏量平面

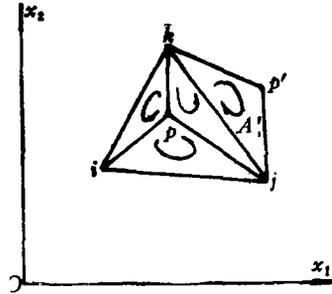


图3 面积坐标

单元 Ω_i 的节点以逆时针排序 x_i, x_j, x_k 。像偏量分别为 $\delta^i, \delta^j, \delta^k$ 。由于 δ 是 x 的线性函数, 所以在像偏量平面上必有三角形 ω_i 与 Ω_i 相对应, 上述充要条件等价于零点是 ω_i 的内点(图2)。

点在三角形内的位置用面积坐标来表示。如图3, 点 p 的面积坐标 $(\lambda_i, \lambda_j, \lambda_k)$ 为:

$$\lambda_i = A_i/A, \quad \lambda_j = A_j/A, \quad \lambda_k = A_k/A \quad (3.3)$$

其中:

$$A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1^i & x_1^j & x_1^k \\ x_2^i & x_2^j & x_2^k \end{bmatrix}, \quad A_i = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1^i & x_1^j & x_1^k \\ x_2^i & x_2^j & x_2^k \end{bmatrix}$$

$$A_j = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1^i & x_1^k & x_1^j \\ x_2^i & x_2^k & x_2^j \end{bmatrix}, \quad A_k = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1^i & x_1^j & x_1^k \\ x_2^i & x_2^k & x_2^j \end{bmatrix}$$

A, A_i, A_j, A_k 分别对应 $\Delta_{ijk}, \Delta_{pjk}, \Delta_{pki}, \Delta_{pij}$ 的面积。按式中规定的顺序 $p \rightarrow i \rightarrow k$ 来计算, 当 p 是 Δ_{ijk} 内点时, 它们具有非负值, 当 p 是 Δ_{ijk} 外点时(例如图3中的 p'), j 对应的面积坐标 (λ'_j) 变成负值, 显然有

$$\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k = 1 \quad (3.4)$$

可容易得到,

$$x_p = \lambda_i x_i + \lambda_j x_j + \lambda_k x_k \tag{3.5}$$

如果考虑(3.4), 可取 λ_j, λ_k 作为独立坐标值. 将上述讨论引入像偏量平面, 对应像偏量 $\delta^i, \delta^j, \delta^k$ 有:

$$A = (\delta_1^i \delta_2^j + \delta_1^j \delta_2^i + \delta_1^k \delta_2^i - \delta_2^i \delta_1^j - \delta_2^j \delta_1^i - \delta_2^k \delta_1^i) / 2$$

将像偏量的0点代替上述的 x_p 点, 则0点对应的是:

$$A_j = (\delta_1^i \delta_2^j - \delta_2^i \delta_1^j) / 2, \quad A_k = (\delta_1^i \delta_2^k - \delta_2^i \delta_1^k) / 2$$

可得到,

$$\begin{bmatrix} \lambda_j \\ \lambda_k \end{bmatrix} = [\delta^j - \delta^i, \delta^k - \delta^i]^{-1} [\delta^i] \tag{3.6}$$

于是0点是 ω_l 内点的充要条件便化为由(3.6)式得到的 λ_j, λ_k 应满足:

$$\lambda_j \geq 0, \lambda_k \geq 0, \lambda_j + \lambda_k \leq 1 \tag{3.7}$$

对全区域 Ω 的各个 $\Omega_l (l=1, \dots, L)$, 按(3.7)式做判断, 不动点大范围的分布状况便显示出来了.

2. 不动点位置的精确计算

若 Ω_l 中存在不动点, 可用 λ_j, λ_k 计算不动点的近似位置 x^0 . 由于:

$$\lambda_i \delta^i + \lambda_j \delta^j + \lambda_k \delta^k = \delta(x^0)$$

引入(3.1)、(2.2)可得:

$$x^0 = (1 - \lambda_j - \lambda_k) x_i + \lambda_j x_j + \lambda_k x_k \tag{3.8}$$

以 x^0 为初值做迭代计算, 这里提出一种迭代方式. x^i 是第 i 次迭代结果, 在 x^i 周围构造新三角形 $\triangle fgh$ (图4)

$$\left. \begin{aligned} x_f &= x^i - \frac{h_1^{i+1}}{2} i - \frac{h_2^{i+1}}{2} j \\ x_g &= x^i + \frac{h_1^{i+1}}{2} i - \frac{h_2^{i+1}}{2} j \\ x_h &= x^i + \frac{2}{3} h_2^{i+1} j \\ h_1^{i+1} &= \alpha h_1^i, \quad h_2^{i+1} = \alpha h_2^i \\ h_1^0 &= h_1, \quad h_2^0 = h_2; \quad \alpha \in (0, 1) \\ &(i=0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \right\} \tag{3.9}$$

再按下列各式计算:

$$y_p = \varphi(x_p), \quad p=f, g, h$$

$$\begin{aligned} [\Phi^{i+1}, C^{i+1}] &= [y_f, y_g, y_h] \begin{bmatrix} x_f & x_g & x_h \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\ x^{i+1} &= [I - \Phi^{i+1}]^{-1} C^{i+1} \end{aligned} \tag{3.10}$$

若满足精度要求:

$$\|x^{i+1} - x^i\| \leq \varepsilon \tag{3.11}$$

则停止计算, x^{i+1} 即认为不动点 x^* 的足够精确的近

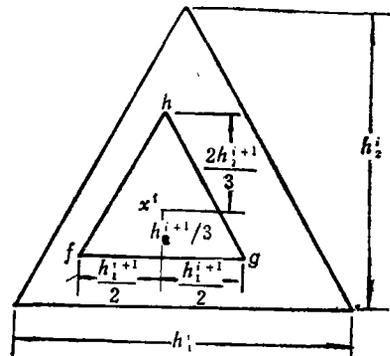


图4 构造一个新三角形

似解。这种似迭代形式的好处是，由于保证了 Δfgh 的正则形状(f, g, h 不共线)，

$\begin{bmatrix} x_f, x_g, x_h \\ 1, 1, 1 \end{bmatrix}$ 非奇异，所以 Φ^{t+1}, C^{t+1} 总有唯一解。当用三角形收缩率 μ 表示收敛速度时 $\mu=\alpha^2$ 。为使 x^{t+1} 不会变成 Δfgh 的外点， α 不能选得过小。

四、不动点的稳定性分析

若单元 Ω_i 内存在一不动点 x^* ，它的稳定性与 Ω_i 映射的收缩性是一致的。单元 Ω_i 的内点 x 有小扰动 Δx 时，其映像近似表示为：

$$y + \Delta y = \Phi_i(x + \Delta x) + C_i \quad \forall x + \Delta x \in \Omega_i$$

由(2.2)可知

$$\Delta y = \Omega_i \Delta x \quad (4.1)$$

当 Φ_i 的特征值 $|\lambda_1| < 1, |\lambda_2| < 1$ 时， Ω_i 的面积经映射各向缩小。如以 A'_i 表示 Ω_i 的映射面积，其收缩率 μ

$$\mu = |\lambda_1| \cdot |\lambda_2| = A'_i / A_i < 1 \quad (4.2)$$

此时 Ω_i 内的各点在映射下相互吸引，因此 Ω_i 不动点 x^* 是稳定的。

事实上我们可以利用(3.10)式迭代终了得到的不动点邻域的 Φ^k 。由 Φ^k 的特征值(λ_1^k, λ_2^k)，以及特征向量(α_1^k, α_2^k)，说明不动点的稳定性，且能区分不动点的类型(鞍点，结点，焦点，中心等)。

五、映射吸引区的大范围分析

1. 缩小区 Ω_s

缩小区 Ω_s 以下式定义：

$$\Omega_s = \{\Omega_i | \Omega_i \subset \Omega, |\lambda_{i1}| < 1, |\lambda_{i2}| < 1\} \quad (5.1)$$

如果 Ω_s 是凸集，则：

$$\forall x_1, x_2 \in \Omega_s, \quad \exists h \in (0, 1)$$

使得 $d(\varphi(x_1), \varphi(x_2)) < hd(x_1, x_2)$

$d(\cdot, \cdot)$ 代表两点间距离。

但是，缩小区 Ω_s 不一定就是系统的某一个吸引区。因为，在 Ω_s 中可能存在这样的点，它的映像落在 Ω_s 之外，即：

$$\exists x \in \Omega_i \subset \Omega_s, \quad \text{但} \quad \Phi_i x + C_i \notin \Omega_s$$

缩小区的定义只依赖于 Φ_i 的特征值，而 Ω_i 映射后的位置，还与 C_i 相关，所以上述的情况是可能的。反之， Ω_s 之外的点经过映射后落入 Ω_s 也是可能的。

2. 吸引核 Ω_k

吸引核按下式定义

$$\Omega_k = \{\Omega_i | \varphi^N(\Omega_i) \subset \Omega_s, \quad \forall N \geq 0\} \quad (5.2)$$

式中 N 是整数。显然， $\Omega_k \subset \Omega_s$ ，且对于所有属于 Ω_k 的单元 Ω_i ，其映像仍属于 Ω_k 。即：

$$\forall \Omega_l \subset \Omega_k, \varphi(\Omega_l) \subset \Omega_k \quad (5.3)$$

这可由反证法说明: 若 $\exists \Omega_l \subset \Omega_k$ 但 $\varphi(\Omega_l) \not\subset \Omega_k$, 则必 $\exists n \geq 0$ 使得 $\varphi^{n+1}(\Omega_l) \not\subset \Omega_s$, 但这与定义(5.2)矛盾, 故(5.3)成立。

由(5.3)可知 $\varphi(\Omega_k) \subset \Omega_k$, 又 $\Omega_k \subset \Omega_s$, 所以 Ω_k 的映象总是缩小的, 即:

$$\varphi(\Omega_k) \subset \Omega_k, \varphi^{n+1}(\Omega_k) \subset \varphi^n(\Omega_k), \quad n \geq 0 \quad (5.4)$$

这是一个重要性质, 即对吸引核 Ω_k 来说, 映象总是映入 Ω_k 自身的。所以, 如果 Ω_k 是一凸集, 根据压缩映象原理可知 Ω_k 内必有一稳定的不动点^[8]。而一般说来 (Ω_k 不一定是凸集), 可以猜想, Ω_k 内必有一个映射的不变集。即 $A \subset \Omega_k, \varphi(A) = A$ 。而不动点 x^* 是不变集合 A 的最简单情况。

吸引核的概念很重要, 一旦获得吸引核 Ω_k , 便可断定其内部一定包含一个渐近稳定的不变集合 A , 即, $\forall x \in \Omega_k$ 的点, 它的映象以 A 为极限不断地收敛到 A 上去。因此 A 又被称为吸引子。此外, 有了吸引核 Ω_k , 求出 A 的吸引区 Ω_l 就容易了。

3. 吸引区 Ω_l

设某吸引子 A , 它的吸引核为 Ω_k , 则其吸引区 Ω_l 的定义是:

$$\Omega_l = \{x | x \in \Omega, \exists n \geq 0, \varphi^n(x) \in \Omega_k\} \quad (5.5)$$

由(5.5)可知 $\Omega_k \subset \Omega_l$ 。实际上用(5.5)求 Ω_l 时, 计算量要求很大。不妨以单元中心为代表点, 按下式近似地确定 Ω_l 。

$$\Omega_l = \{\Omega_i | \Omega_i \subset \Omega, \exists n \geq 0, \varphi^n(x_i) \in \Omega_k\} \quad (5.6)$$

式中 $x_i = (x_i + x_j + x_k)/3$ 即三个节点的平均值。某单元 Ω_i 满足(5.6)的 n 的最小值, 表示 Ω_i 映入 Ω_k 所需的映像次数。把 Ω_l 中各个 n 值相同的单元合成的子区域, 称为吸引阶梯, 吸引阶梯表达了吸引区内各点的映射发展状况。

4. 发散区 Ω_H

若某单元 Ω_l , 经若干次映像后, 跑出给定的区域 Ω 之外, 称为发散。根据下式, 可以求出发散区 Ω_H 以及发散阶梯。

$$\Omega_H = \{\Omega_l | \Omega_l \subset \Omega, \exists n \geq 1, \varphi^n(x_l) \notin \Omega, x_l = (x^i, x^j, x^k)/3\} \quad (5.7)$$

六、关于高阶映射

高阶映射或 N 阶映射:

$$\varphi^N(x) = \underbrace{\varphi(\varphi(\cdots(\varphi(x))\cdots))}_{N \text{ 个}} \quad (6.1)$$

的不动点是映射 φ 的不动点和周期点。周期点对应系统的倍周期运动。关于 φ^N 的不动点及其稳定性, 吸引域等问题的分析方法, 与前述对 φ 的分析方法完全相同。

七、算法的步骤与例题

1. 将给定的 Ω 分割为若干单元, 对各单元及节点分别编号;
2. 按编号计算各节点的映像值并存入相应数组;
3. 按编号计算单元的下述各项;

- 1) 单元 Ω_i 的线性映像函数 $\Phi_i, C_i, (2.5), (2.6)$; 2) 计算 Φ_i 的特征值并判断是否 $\Omega_i \subset \Omega_s (5.1)$; 3) 计算 $\delta^p (p=i, j, k), \lambda_j, \lambda_k$, 判断是否存在不动点 ((3.1), (3.6), (3.7)); 4) 如果存在不动点, 用迭代求出其精确位置 ((3.8), (3.9), (3.10), (3.11)).

4. 在 Ω_s 中划分出吸引核 $\Omega_k (5.2)$;

5. 对 Ω_k 外的各单元 Ω_i , 计算其中心 x_i 的映像, 判断 $\Omega_i \subset \Omega_I$ 或 $\Omega_i \subset \Omega_H$, 逐步形成吸引域 Ω_I 及吸引阶梯、发散区 Ω_H 及发散阶梯 ((5.6), (5.7));

本文以二维映射

$$x_1^{i+1} = \sigma x_1^i$$

$$x_2^{i+1} = [\sigma^2 - (x_1^i)^2 - (x_2^i)^2] \cdot x_2^i - \sigma x_1^i$$

$$\sigma = 0.5, x_1^i \in [-2.0, 2.0], x_2^i \in [-1.5, 1.5]$$

为例介绍单元映射法的各种结果。这些结果由图5~图12表示。

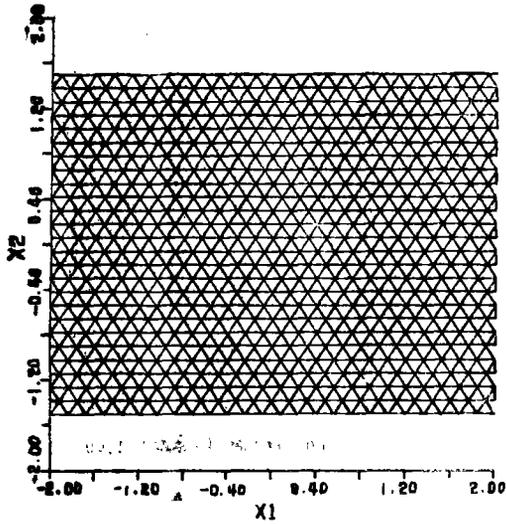


图5 给定区域 Ω 的剖分图 ($h_1=0.16, h_2=0.12$)

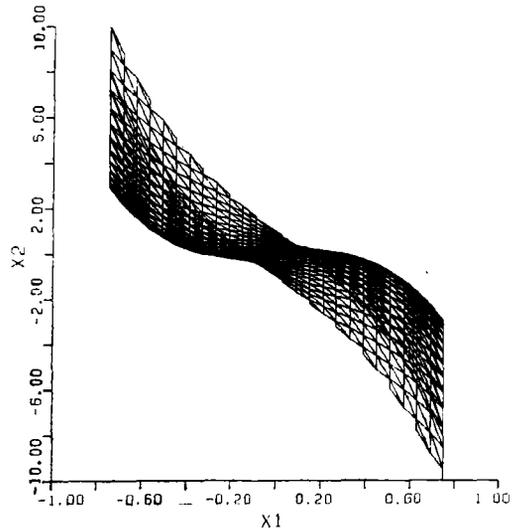
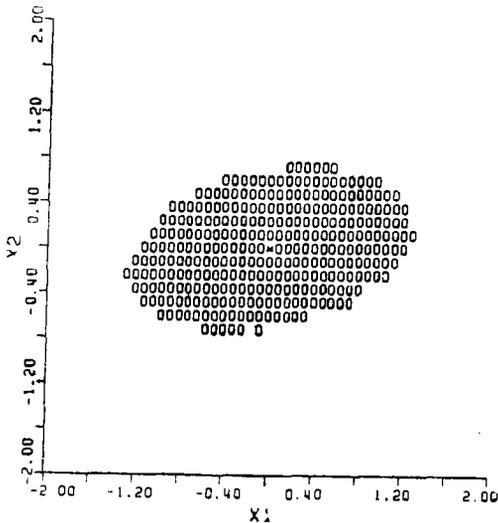


图6 Ω 及其各个单元 Ω_i 的映像



*——不动点(0, 0); 0——缩小区

图7 映像的缩小区 Ω 和映像的不动点

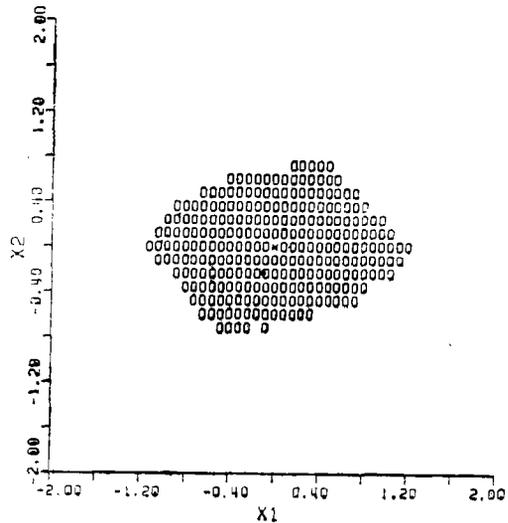
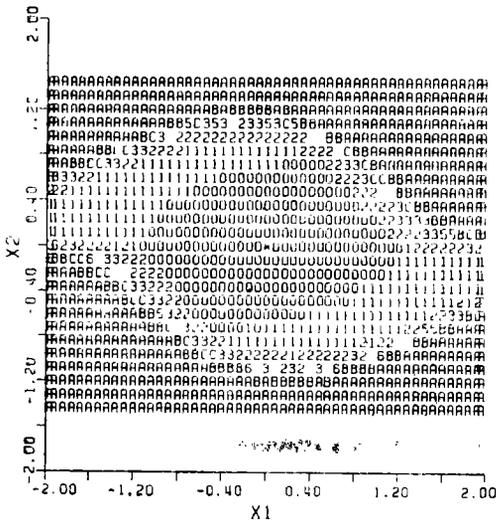


图8 映像的吸引核 Ω_k



数字区——吸引区 Ω_I , 0, 1, 2, ...是 Ω_I
映射到达 Ω_h 的映射次数
文字区——发散区 Ω_H , A, B, C, ...的
序数是 Ω_I 逸出 Ω 的映射次数

图9 映像的吸引区 Ω_I 和发散区 Ω_H

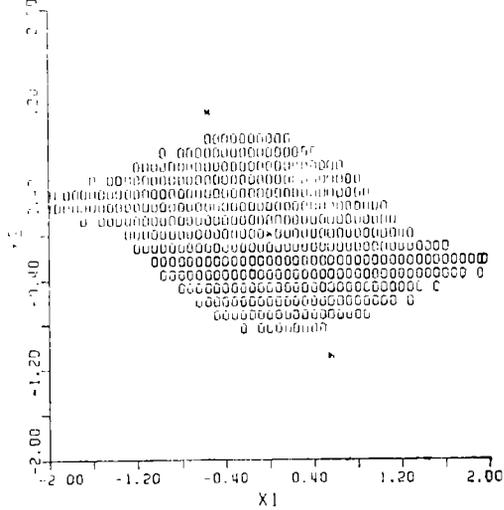


图10 二阶映像的映小区 Ω 和它的三个不动点

不动点编号		1	2	3
所在单元号		282	947	1549
坐标	x_1	0.54	00	-0.54
	x_2	-1.09	00	1.09
稳定性		不稳定	稳定	不稳定

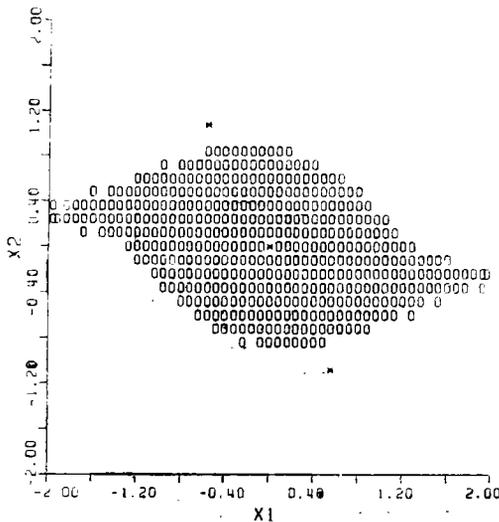


图11 二阶映像的吸引核 Ω_h 及不动点

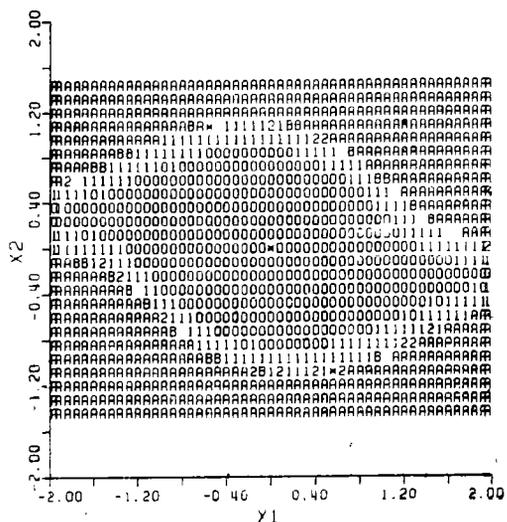


图12 二阶映像的吸引区 Ω_I 及发散区 Ω_H

八、后 记

本文以映像的单值连续为基础,围绕非线性系统大范围动态分析提出了若干概念和方法:

1. 把有限状态空间剖分为有限小单元,在小区域 Ω_i 内用线性映像代替非线性映像,从而使一个大范围非线性问题归结为线性问题。

2. 提出了像偏量概念,不动点存在条件及其搜索方法。因而能完成大范围内所有不动点的求解,并使计算是易于收敛的。

3. 缩小区、吸引核、吸引阶梯等概念的引入,不仅使吸引区的计算变得大为容易了,而且使系统解的大范围结构表达得更清楚了。

参 考 文 献

- [1] Hsu, C. S., A theory of cell-to-cell mapping dynamical systems, *J. Appl. Mech.*, 47 (1980), 931—939.
- [2] Hsu, C.S., A generalized theory of cell-to-cell mapping for nonlinear dynamical systems. *J. Appl. Mech.*, 48 (1981), 634—642.
- [3] Hsu, C.S., R.S., Guttalu and W.H.Zhu, A method of analyzing generalized cell mappings, *J. Appl. Mech.*, 49 (1982), 885—894.
- [4] Edwin, J. Kreuzer, *Statistical Properties of Dissipative Nonlinear Dynamical Systems* (1985).
- [5] 凌复华, 离散系统非线性振动理论的一些新发展, 上海交通大学学报, (4) (1982), 155—170.
- [6] 刘铁牛、王伟, 非线性系统周期解不动点迭代法, 应用数学和力学, 8(3) (1987), 259—265.
- [7] 罗棱, M., 《常微分方程》, 第四章, 叶彦谦译, 上海科学技术出版社 (1985).
- [8] 张石生, 《不动点理论及应用》, 第一章, 重庆出版社 (1984).

Large Range Analysis for Nonlinear Dynamic Systems—— Element Mapping Method

Liu Tie-niu Xu Dao-lin

(Dept. of Engineering Mechanics, Dalian University
of Technology, Dalian)

Abstract

This paper presents a new method for global analysis of nonlinear system. By means of transforming the nonlinear dynamic problems into point mapping forms which are single-valued and continuous, the state space can be regularly divided into a certain number of finitely small triangle elements on which the nonlinear mapping can be approximately substituted by the linear mapping given by definition. Hence, the large range distributed problem of the mapping fixed points will be simplified as a process for solving a set of linear equations. Still further, the exact position of the fixed points can be found by the iterative technique. It is convenient to judge the stability of fixed points and the shrinkage zone in the state space by using the deformation matrix of linear mapping. In this paper, the attractive kernel for the stationary fixed points is defined, which makes great advantage for describing the attractive domains of the fixed points. The new method is more convenient and effective than the cell mapping method^[1]. And an example for two-dimensional mapping is given.

Key words element, mapping, fixed points, attractive kernel