应用数学和力学，第13卷第6期（1992年6月）
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

拟线性抛物型方程奇异摄动问题的数值解法

苏煜城　　沈　全

（南京大学数学系，1991年7月25日收到）

摘　要

本文讨论拟线性抛物型方程奇异摄动问题的差分解法，在非均匀网格上建立了线性三层差分格式，并证明了在离散的L^2范数意义下格式的一致收敛性，最后给出了一些数值例子。

关键词　拟线性抛物型方程　奇异摄动　线性三层差分格式　一致收敛性

一、问题的提出

本文讨论下面的拟线性奇异摄动抛物型方程第一边值问题

$$L_\varepsilon u\equiv\frac{\partial u}{\partial t}-\varepsilon a(x,t,u)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+c(x,t,u)=0 \tag{1.1}$$

$$(x,t)\in Q\equiv\{0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant t\leqslant T\}$$

$$u(x,0)=\varphi(x)\qquad 0\leqslant x\leqslant 1 \tag{1.2}$$

$$u(0,t)=u(1,t)=0\qquad 0\leqslant t\leqslant T \tag{1.3}$$

我们作如下假定

(H1)　$0<\varepsilon\leqslant 1$，$a(x,t,u)\geqslant\eta=\text{const}>0$

$(x,t,u)\in Q^*\equiv\{0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant t\leqslant T,\ -\infty<u<+\infty\}$

(H2)　$c_u(x,t,u)\geqslant\nu=\text{const}>0$，　$(x,t,u)\in Q^*$

(H3)　相容性条件成立：$\varphi(0)=\varphi(1)=0$

(H4)　函数$a(x,t,u)$，$c(x,t,u)$，$\varphi(x)$充分光滑，其自身及其直到四阶为止的各阶偏导数都在Q^*中有界。

在这些假定之下，我们可知对于固定的ε，问题(1.1)～(1.3)的解存在且唯一（参见[1]）。

我们将用差分方法来解这个问题。在非均匀网格上构造三层线性差分格式，借助于原问题的渐近解，证明了差分格式关于小参数ε的一致收敛性。

首先我们讨论一下原问题(1.1)～(1.3)解的一些性质。在下面各部分中我们用M表示和h，τ，ε无关的正常数。

二、解的性质

2.1 解的一致有界性

设 $u=u(x,t)$ 是问题(1.1)～(1.3)的解，区域的边界

$$\Gamma\equiv\{0\leqslant x\leqslant 1,\ t=0\}\cup\{x=0,\ 0\leqslant t\leqslant T\}\cup\{x=1,\ 0\leqslant t\leqslant T\}$$

定义线性算子：

$$L_\varepsilon^1 y\equiv\frac{\partial y}{\partial t}-\varepsilon a(x,t,u)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+\int_0^1 c_u(x,t,su)ds\cdot y$$

引理1 算子L_ε^1满足极值原理，即对于定义在 Q 上的任意两函数 $y_1(x,t)$，$y_2(x,t)$，如果$L_\varepsilon^1 y_1\geqslant L_\varepsilon^1 y_2$，$(x,t)\in Q$，且$y_1\geqslant y_2$，$(x,t)\in\Gamma$，则$y_1\geqslant y_2$，$(x,t)\in Q$。

证明 利用反证法易得该引理的结论。

定理1 问题(1.1)～(1.3)的解u在Q上是一致有界的，即$|u|\leqslant M$，$(x,t)\in Q$，M是不依赖于 ε 的常数。

证明 因为$L_\varepsilon^1 u=-c(x,t,0)$，取

$$M=\max\left\{\frac{1}{\nu}\max_{(x,t)\in Q}|c(x,t,0)|,\ \max_{0\leqslant x\leqslant 1}|\varphi(x)|\right\}$$

则有

$$L_\varepsilon^1(\pm u)\leqslant L_\varepsilon^1 M,\qquad (x,t)\in Q$$
$$\pm u\leqslant M,\qquad (x,t)\in\Gamma$$

根据引理1得$|u|\leqslant M$，$(x,t)\in Q$。

2.2 渐近解

当$\varepsilon=0$时，摄动问题(1.1)～(1.3)退化为下面的初值问题：

$$L_0 W\equiv\frac{\partial W}{\partial t}+c(x,t,W)=0,\quad W|_{t=0}=\varphi(x)\tag{2.1}$$

因此，在$x=0$和 $x=1$ 附近都将出现边界层。现在用 Vishik-Lyusternik 方法构造问题(1.1)～(1.3)的零次近似渐近解([2]～[4])：

$$\tilde{u}_0(x,t)=W_0(x,t)+v_0^{(0)}(\xi,t)+v_0^{(1)}(\zeta,t)\tag{2.2}$$
$$R_0(x,t)=u(x,t)-\tilde{u}_0(x,t)$$

其中$W_0(x,t)$是退化问题(2.1)的解，$v_0^{(0)}(\xi,t)$和$v_0^{(1)}(\zeta,t)$分别是在$x=0$和 $x=1$ 附近构造的边界层函数，$\xi=x/\sqrt{\varepsilon}$，$\zeta=(1-x)/\sqrt{\varepsilon}$，$v_0^{(0)}$是半有界区域上拟线性抛物型方程初边值问题(2.3)的解。

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}(W_0(0,t)+v_0^{(0)}(\xi,t))-a(0,t,W_0(0,t)+v_0^{(0)}(\xi,t))\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}(W_0(0,t)\\&\quad+v_0^{(0)}(\xi,t))+c(0,t,W_0(0,t)+v_0^{(0)}(\xi,t))=0\\&\qquad\qquad(\xi,t)\in[0,+\infty)\times[0,T]\\&v_0^{(0)}(\xi,0)=0,\ \ v_0^{(0)}(0,t)=-W_0(0,t)\end{aligned}\right\}\tag{2.3}$$

$v_0^{(1)}(\zeta,t)$是类似问题的解，$R_0(x,t)$是渐近解的余项。可以证明，$W_0(x,t)$，$v_0^{(0)}(\xi,t)$，$v_0^{(1)}(\zeta,t)$

有如下的估计：

$$\left.\begin{aligned}&\left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial t^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial x^{k_2}}W_0(x,t)\right|\leqslant M,\quad\left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial t^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial \xi^{k_2}}v_0^{(0)}(\xi,t)\right|\leqslant Me^{-m\xi}\\&\left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial t^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial \zeta^{k_2}}v_0^{(1)}(\zeta,t)\right|\leqslant Me^{-m\zeta}\qquad k_1\geqslant0,\ k_2\geqslant0,\ k_1+k_2\leqslant4\end{aligned}\right\}\tag{2.4}$$

其中正常数m只与$a(x,t,u)$的界和常数ν有关。利用极值原理可证得

$$|R_0(x,t)|=|u(x,t)-\tilde{u}_0(x,t)|\leqslant M\sqrt{\varepsilon}\tag{2.5}$$

2.3 摄动问题解的导数估计

问题(1.1)～(1.3)的解$u(x,t)$的导数有如下估计：

$$\left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial t^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial x^{k_2}}u(x,t)\right|\leqslant M\varepsilon^{-k_2/2}\qquad k_1\geqslant0,\ k_2\geqslant0,\ k_1+k_2\leqslant4\tag{2.6}$$

利用方程(1.1)和[5]的引理1即可证上面的结果。

三、差 分 格 式

3.1 非均匀网格

由于问题(1.1)～(1.3)的解在$x=0$和$x=1$附近出现抛物边界层，因此我们在x方向采用非均匀网格，利用 Bakhvalov 网格公式使网格点在$x=0$和$x=1$附近自动加密。沿t方向采用均匀网格。

我们所用的非均匀网格为

$$Q_h^\tau=\{(x_k,t_j),\ 0=x_0<x_1<\cdots<x_k<\cdots<x_{2N}=1,\ 0\leqslant k\leqslant 2N;$$
$$t_j=j\tau,\ \tau=T/J,\ 0\leqslant j\leqslant J\},\qquad \tau=O(1/N)$$

令

$$h_k=x_k-x_{k-1},\quad h=\max_k h_k$$

$$\eta_k=\exp(-m_0\varepsilon^{-1/2}x_{k-1})+\exp(-m_0\varepsilon^{-1/2}(1-x_k)),\qquad m_0\text{是某个常数}$$

$$\sigma_k=\min[h_k\varepsilon^{-1/2}\eta_k+h_{k+1}\varepsilon^{-1/2}\eta_{k+1},\ \eta_k+\eta_{k+1}],\qquad k=1,\ 2,\ \cdots,\ 2N-1$$

为了得到关于ε一致收敛的差分格式，要求这里构造的非均匀网格应满足条件

$$\max_{1\leqslant k\leqslant 2N-1}\sigma_k\leqslant Mh\tag{3.1}$$

其中$h=O(1/N)$，M是不依赖于h，ε的正常数。

有许多网格满足(3.1)，参见[5]～[7]。Bakhvalov[5] 公式是其中之一，其具体形式是：

$$x_k=\lambda(s_k),\ s_k=k/(2N),\qquad 0\leqslant k\leqslant 2N\tag{3.2}$$

而对于$s\in[0,\ 1]$，$\lambda(s)$的定义如下：

$$\lambda(s)=\begin{cases}\psi(s) & s\in[0,\bar{\alpha}]\\ \psi(\bar{\alpha})+\psi'(\bar{\alpha})(s-\bar{\alpha}) & s\in[\bar{\alpha},0.5]\\ 1-\lambda(1-s) & s\in[0.5,1]\end{cases}\tag{3.3}$$

其中函数$\psi(s)=a\varepsilon^{1/2}\ln(1-s/q)^{-1}$，$q\in(0,0.5)$是某个常数，$a$是满足一定条件的常数，$\bar{\alpha}$由

下列方程确定

$$\psi(\bar{\alpha})+\psi'(\bar{\alpha})(0.5-\bar{\alpha})=0.5 \tag{3.4}$$

可以证明这样给出的非均匀网格确实满足(3.1)。

3.2 差分格式

对于问题(1.1)～(1.3)，如果用普通的两层隐式格式来逼近，则在求解相应的非线性方程组时会遇到困难，因此我们用下面的三层线性差分格式来逼近：

$$\left.\begin{aligned}&u_k^0=\varphi(x_k)\\&u_k^1=\varphi(x_k)+\tau[\varepsilon a(x_k,0,\varphi(x_k))\varphi''(x_k)-c(x_k,0,\varphi(x_k))]\\&u_k^{j+1}=u_k^{j-1}+2\tau[\varepsilon a(x_k,t_j,u_k^j)\delta_{\bar{x}\hat{x}}\hat{u}_k^j-c(x_k,t_j,u_k^j)]\\&\qquad\qquad 1\leqslant k\leqslant 2N-1,\ \ j\geqslant 1\\&u_0^j=0,\ \ u_{2N}^j=0\end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$

其中

$$\hat{u}_k^j=(u_k^{j+1}+u_k^j+u_k^{j-1})/3$$

$$\delta_{\bar{x}\hat{x}}u_k^j=\frac{1}{\bar{h}_k}\left[\frac{u_{k+1}^j-u_k^j}{h_{k+1}}-\frac{u_k^j-u_{k-1}^j}{h_k}\right]$$

$$\bar{h}_k=(h_k+h_{k+1})/2$$

由(3.5)得到的差分方程组是线性方程组，系数矩阵是三对角、严格对角占优的，知道了u^{j-1}，u^j之后很容易求出u^{j+1}。

对于不含小参数ε（即$\varepsilon=1$的情形）的拟线性抛物型方程第一边值问题，Lees等人([8]，[9])在均匀网格上讨论过格式(3.5)的收敛性。这种差分格式也称为平均Crank-Nicolson格式([10])。我们将证明对于含小参数ε的拟线性抛物型方程第一边值问题(1.1)～(1.3)，格式(3.5)的解u_k^j在离散的L^2范数意义下关于小参数ε一致收敛于原问题的解$u(x_k, t_j)$。

四、误差分析

4.1 古典估计

引入记号和一些定义。令

$$w\equiv\{x_k\,|\,k=1,2,\cdots,2N-1\},\ \ \bar{w}\equiv\{x_k\,|\,k=0,1,\cdots,2N\},\ \ w^+\equiv\{x_k\,|\,k=1,2,\cdots,2N\}$$

对于网格函数v和W，定义

$$(v,\ W)_{w^+}=\sum_{k=0}^{2N}v(x_k)W(x_k)h_k,\ \ (v,W)_w=\sum_{k=1}^{2N-1}v(x_k)W(x_k)\bar{h}_k$$

$$v_{\bar{x}}(x_k)=(v(x_k)-v(x_{k-1}))/h_k,\ \ (v,W)_D=(v_{\bar{x}},W_{\bar{x}})_{w^+}$$

设Ω_k是由网格函数$v(x)$组成的实线性空间，$v(x)$定义在$\bar{w}$上，且$v(0)=v(1)=0$。在Ω_k上定义范数

$$\|v\|=(v,v)_w^{1/2},\ \ \|v\|_\infty=\max_{1\leqslant k\leqslant 2N-1}|v(x_k)|,\ \|v\|_D=(v_{\bar{x}},\ v_{\bar{x}})_{w^+}^{1/2}$$

再引入网格函数记号

$$u(x,t_j)=\{u(x_k,t_j),\ \ k=0,1,\cdots,2N\},\ \ u^j=\{u_k^j,k=0,1,\cdots,2N\}$$

$$\tilde{u}_0(x,t_j)=\{\tilde{u}_0(x_k,t_j),\ \ k=0,1,\cdots,2N\}$$

对于定义在ϖ上的两个网格函数v，W有下面的第一差分格林公式（[11]第5章§1）

$$(v_{\bar{x}\hat{x}},W)_w=-(v_{\bar{x}},W_{\bar{x}})_{w^+}+v_{\bar{x},2N}W_{2N}-v_{x,0}W_0 \tag{4.1}$$

若$W\in\Omega_k$，则(4.1)化为

$$(v_{\bar{x}\hat{x}},W)_w=-(v_{\bar{x}},W_{\bar{x}})_{w^+} \tag{4.2}$$

显然$\|v\|\leqslant\|v\|_\infty$，而由嵌入定理（[11]第5章§4）得$\|v\|_\infty\leqslant\|v\|_D/2$，所以

$$\|v\|\leqslant\|v\|_\infty\leqslant\|v\|_D \tag{4.3}$$

我们有下面的古典估计。

定理2 设$u(x,t)$是问题(1.1)～(1.3)的解，$\{u_k^j\}$是差分问题(3.5)的解，则

$$\|u(x,t_j)-u^j\|\leqslant M(\tau^2+h^2/\varepsilon),\qquad 0\leqslant j\leqslant J$$

证明 令$z_k^j=u(x_k,t_j)-u_k^j$，$z^j=\{z_k^j,\ k=0,1,\cdots,2N\}$，则$z^j\in\Omega_k$。

因为 $u(x_k,0)=\varphi(x_k)=u_k^0$

所以

$$z_k^0=0\qquad(k=1,\cdots,2N-1) \tag{4.4}$$

在下面的证明中我们用$\theta_i(i=1,2,\cdots)$表示某些中值，它们的有界性容易得到。

因为

$$\begin{aligned}u(x_k,t_1)&=u(x_k,0)+\frac{\partial}{\partial t}u(x_k,0)\tau+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x_k,\theta_1)\tau^2\\&=\varphi(x_k)+\tau\left[\varepsilon a(x_k,t,u(x_kt))\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x_k,t)-c(x_k,t,u(x_k,t))\right]\Bigg|_{t=0}\\&\quad+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x_k,\theta_1)\tau^2\\&=\varphi(x_k)+\tau\left[\varepsilon a(x_k,0,\varphi(x_k))\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(x_k)-c(x_k,0,\varphi(x_k))\right]\\&\quad+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x_k,\theta_1)\tau^2\\&=u_k^1+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x_k,\theta_1)\tau^2\end{aligned}$$

由(2.6)得

$$z_k^1=O(\tau^2)\qquad(k=1,2,\cdots,2N-1) \tag{4.5}$$

定义r_k^{j+1}满足

$$\begin{aligned}u(x_k,t_{j+1})-u(x_k,t_{j-1})=2\tau[&\varepsilon a(x_k,t_j,u(x_k,t_j))\delta_{\bar{x}\hat{x}}\hat{u}(x_k,t_j)\\&-c(x_k,t_j,u(x_k,t_j))+r_k^{j+1}],\qquad j\geqslant1,\ 1\leqslant k\leqslant 2N-1\end{aligned} \tag{4.6}$$

其中

$$\hat{u}(x_k,t_j)=[u(x_k,t_{j+1})+u(x_k,t_j)+u(x_k,t_{j-1})]/3$$

根据 Taylor 公式和(2.6)知

$$(4.6)\text{的左边}=2\frac{\partial}{\partial t}u(x_k,t_j)\tau+O(\tau^3) \tag{4.7}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\hat{u}(x_k,t_j)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x_k,t_j)+\frac{1}{3}\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial t^2}u(x_k,\theta_2)\tau^2$$

$$(4.6)\text{的右边}=2\tau[\varepsilon a(x_k,t_j,\ u(x_k,t_j))\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x_k,\ t_j)$$

$$-c(x_k,t_j,u(x_k,\ t_j))+O\left(\tau^2+\frac{h_{k+1}-h_k}{\varepsilon^{1/2}}+\frac{h^2}{\varepsilon}\right)+r_k^{j+1}] \qquad (4.8)$$

不难证明，对于非均匀网格(3.2)～(3.4)有

$$(h_{k+1}-h_k)/\sqrt{\varepsilon}=O(h^2/\varepsilon) \qquad (4.9)$$

将(4.7)，(4.8)代入(4.6)，利用(1.1)得

$$r_k^{j+1}=O(\tau^2+h^2/\varepsilon),\ \|r^{j+1}\|_\infty\leqslant M(\tau^2+h^2/\varepsilon),\qquad j\geqslant 1 \qquad (4.10)$$

由(4.4)，(4.5)得$\|z^0\|\leqslant\|z^0\|_\infty=0$，$\|z^1\|\leqslant\|z^1\|_\infty\leqslant M\tau^2$。假设对$0\leqslant i\leqslant j$ 有

$$\|z^j\|\leqslant M(\tau^2+h^2/\varepsilon) \qquad (4.11)$$

我们将证明$\|z^{j+1}\|\leqslant M(\tau^2+h^2/\varepsilon)$。

令 $\bar a(x,t,u)=1/a(x,t,u)$，$b(x,t,u)=c(x,t,u)/a(x,t,u)$

$$\bar r_k^{j+1}=\bar a(x_k,t_j,u(x_k,t_j))r_k^{j+1}$$

则由(3.5)和(4.6)得

$$\begin{aligned}\bar a(x_k,t_j,u_k^j)(z_k^{j+1}-z_k^{j-1})&=2\tau\varepsilon\delta_{\bar x\hat x}\hat z_k^j+2\tau\bar r_k^{j+1}\\&+[\bar a(x_k,t_j,u_k^j)-\bar a(x_k,t_j,u(x_k,t_j))](u(x_k,t_{j+1})-u(x_k,t_{j-1}))\\&+2\tau(b(x_k,t_j,u_k^j)-b(x_k,t_j,u(x_k,t_j)))\end{aligned} \qquad (4.12)$$

而

$$[\bar a(x_k,t_j,u_k^j)-\bar a(x_k,t_j,u(x_k,t_j))](u(x_k,t_{j+1})-u(x_k,t_{j-1}))$$

$$=\bar a_u(x_k,t_j,\ \theta_3)(-z_k^j)\frac{\partial}{\partial t}u(x_k,\theta_4)\cdot 2\tau,$$

$$b(x_k,t_j,u_k^j)-b(x_k,t_j,u(x_k,t_j))=b_u(x_k,t_j,\theta_5)(-z_k^j)$$

令 $z^*_{j,k}=z_k^{j+1}-z_k^{j-1}$，$z_j^*=z^{j+1}-z^{j-1}$

在(4.12)两端同乘以$3z^*_{j,k}$，作内积$(\cdot,\cdot)_w$，得

$$I_1+I_2=I_3+I_4+I_5 \qquad (4.13)$$

其中

$$I_1=3(z_j^*,\bar a(x,t_j,u^j)z_j^*)_w,\ I_2=-6\tau\varepsilon(z_j^*,\delta_{\bar x\hat x}\hat z^j)_w,\ I_3=6\tau(z_j^*,\bar r^{j+1})_w$$

$$I_4=-3\left(z_j^*,\bar a_u(x,\ t_j,\ \theta_3)z^j\frac{\partial}{\partial t}u(x,\theta_4)\cdot 2\tau\right)_w$$

$$I_5=-6\tau(z_j^*,b_u(x,t_j,\theta_5)z^j)_w$$

根据(H4)知$\bar a(x_k,t_j,u_k^j)\geqslant m_1>0$，所以

$$I_1\geqslant 3m_1\|z_j^*\|^2 \qquad (4.14)$$

因为$z_j^*\in\Omega_k$，由(4.2)得

$$\begin{aligned}I_2&=6\tau\varepsilon(z^*_{j,\bar x},\hat z^j_{\bar x})_{w^+}=6\tau\varepsilon(z_j^*,\hat z^j)_D\\&=2\tau\varepsilon[\|z^{j+1}\|_D^2+(z^j,z^{j+1})_D-(z^j,z^{j-1})_D-\|z^{j-1}\|_D^2]\end{aligned}$$

令 $L_j=2[\|z^{j+1}\|_D^2+(z^j,z^{j+1})_D+\|z^j\|_D^2]$

则

$$I_2=\tau\varepsilon(L_j-L_{j-1}) \qquad (4.15)$$

显然

$$|I_3|\leqslant m_1\|z_j^*\|^2+m_1^{-1}\cdot 9\tau^2\|\bar r^{j+1}\|^2 \qquad (4.16)$$

由(H4)和(2.6)得

$$|3\bar{a}_u(x_k,t_j,\theta_3)\frac{\partial}{\partial t}u(x_k,\theta_4)|\leqslant M_1,\quad |3b_u(x_k,t_j,\theta_5)|\leqslant M_2$$

所以

$$|I_4|\leqslant 2M_1\tau\|z_j^*\|\|z^j\|\leqslant m_1\|z_j^*\|^2+m_1^{-1}M_1^2\tau^2\|z^j\|^2 \tag{4.17}$$

$$|I_5|\leqslant m_1\|z_j^*\|^2+m_1^{-1}M_2^2\tau^2\|z^j\|^2 \tag{4.18}$$

由(4.13)～(4.18)得

$$\varepsilon L_j\leqslant \varepsilon L_{j-1}+9\tau m_1^{-1}\|\bar{r}^{j+1}\|^2+(M_1^2+M_2^2)m_1^{-1}\tau\|z^j\|^2 \tag{4.19}$$

同样对εL_{j-1}，εL_{j-2}等等也有类似的不等式，因而有

$$\varepsilon L_j\leqslant \varepsilon L_0+9\tau m_1^{-1}\sum_{i=1}^{j}\|\bar{r}^{i+1}\|^2+(M_1^2+M_2^2)m_1^{-1}\tau\left(\sum_{i=1}^{j}\|z^i\|^2\right)\qquad j\geqslant 1 \tag{4.20}$$

因为

$$z_k^1=u(x_k,\tau)-u_k^1=\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x_k,0)\tau^2+\frac{1}{3!}\frac{\partial^3}{\partial t^3}u(x_k,\theta_6)\tau^3$$

$$z_{k,\bar{x}}^1=\frac{(z_k^1-z_{k-1}^1)}{h_k}=\frac{1}{2}\frac{\partial^3}{\partial x\partial t^2}u(\theta_7,0)\tau^2+O\left(\frac{\tau^3}{h_k}\right)=O\left(\frac{\tau^2}{\sqrt{\varepsilon}}+\frac{\tau^3}{h_k}\right)$$

不难证明非均匀网格(3.2)～(3.4)满足

$$\sqrt{\varepsilon}/h_k=O(h^{-1})=O(\tau^{-1}) \tag{4.21}$$

所以

$$\sqrt{\varepsilon}\,|z_{k,\bar{x}}^1|=O(\tau^2+\sqrt{\varepsilon}\,\tau^3/h_k)=O(\tau^2)$$

$$\varepsilon\|z^1\|_D^2=\varepsilon(z_{\bar{x}}^1,z_{\bar{x}}^1)_{w^+}\leqslant\varepsilon\|z_{\bar{x}}^1\|_\infty^2\leqslant M\tau^4 \tag{4.22}$$

而 $\qquad z^0=0,\quad z_{\bar{x}}^0=0$

故由(4.22)得

$$\varepsilon L_0=\varepsilon\cdot 2[\|z^1\|_D^2+(z^1,z^0)_D+\|z^0\|_D^2]\leqslant M\tau^4 \tag{4.23}$$

由(4.10)和$\bar{r}^{j+1}$的定义知

$$\|\bar{r}^{j+1}\|^2\leqslant M\|r^{j+1}\|^2\leqslant M\|r^{j+1}\|_\infty^2\leqslant M(\tau^2+h^2/\varepsilon)^2\qquad j\geqslant 1 \tag{4.24}$$

由归纳假设(4.11)及(4.20)，(4.23)～(4.24)得

$$\varepsilon L_j\leqslant M(\tau^2+h^2/\varepsilon)^2\qquad j\geqslant 1 \tag{4.25}$$

类似地在(4.12)两端同乘$3z_k^{j+1}$，作内积$(\cdot,\cdot)_w$，得

$$I_6=I_7+I_8+I_9+I_{10} \tag{4.26}$$

其中

$$I_6=3(z^{j+1},\bar{a}(x,t_j,u^j)z^{j+1})_w,\quad I_7=3(z^{j+1},\bar{a}(x,t_j,u^j)z^{j-1})_w$$

$$I_8=6\tau\varepsilon(z^{j+1},\delta_{\bar{x}\hat{x}}\hat{z}^j)_w,\quad I_9=6\tau(z^{j+1},\bar{r}^{j+1})_w$$

$$I_{10}=-6\tau(z^{j+1},[\bar{a}_u(x,t_j,\theta_3)\frac{\partial}{\partial t}u(x,\theta_4)+b_u(x,t_j,\theta_5)]z^j)_w$$

同前可证

$$I_6\geqslant 3m_1\|z^{j+1}\|^2 \tag{4.27}$$

$$|I_7|\leqslant 3M_2(\mu_1\|z^{j+1}\|^2+\mu_1^{-1}\|z^{j-1}\|^2)/2 \tag{4.28}$$

$$|I_8|=|2\tau\varepsilon[\|z^{j+1}\|_D^2+(z^{j+1},z^j)_D+(z^{j+1},z^{j-1})_D]|$$

$$\leqslant 2\tau\varepsilon L_j+\tau\varepsilon L_{j-1} \tag{4.29}$$

$$|I_9|\leqslant 3\tau(\mu_2\|z^{j+1}\|^2+\mu_2^{-1}\|\bar{r}^{j+1}\|^2) \tag{4.30}$$

$$|I_{10}|\leqslant(M_1+M_2)\tau(\mu_3\|z^{j+1}\|^2+\mu_3^{-1}\|z^j\|^2) \tag{4.31}$$

取 $\mu_1=\dfrac{4m_1}{9M_2}$，$\mu_2=\dfrac{2m_1}{9T}$，$\mu_3=\dfrac{2m_1}{3(M_1+M_2)T}$

将(4.27)～(4.31)代入(4.26)得

$$m_1\|z^{j+1}\|^2\leqslant\frac{3}{2}M_1\mu_1^{-1}\|z^{j-1}\|^2+2\tau\varepsilon L_j+\tau\varepsilon L_{j-1}+3\tau\mu_2^{-1}\|r^{j+1}\|^2+M_2\tau\mu_3^{-1}\|z^j\|^2$$

由归纳假设(4.10)和(4.24)～(4.25)得

$$\|z^{j+1}\|^2\leqslant M(\tau^2+h^2/\varepsilon)^2 \tag{4.32}$$

根据归纳法，对于一切$0\leqslant j\leqslant J$有

$$\|u(x,t_j)-u^j\|\leqslant M(\tau^2+h^2/\varepsilon)$$

定理2证毕。

4.2 非古典估计

定理3 设$\tilde{u}_0(x,t)$是(2.2)定义的渐近展开式，$\{u_k^j\}$是差分问题(3.5)的解，则

$$\|\tilde{u}_0(x,t_j)-u^j\|\leqslant M(\sqrt{\varepsilon}+\tau^2+h^2)\qquad 0\leqslant j\leqslant J$$

注 这一定理的证明需利用渐近解的估计(2.4)和非均匀网格的特性(3.1)，但由于证明的基本过程大致同**定理**2的证明，故从略。

4.3 一致收敛性定理

根据定理2，3和渐近解余项估计(2.5)，我们有

定理4 设$u(x,t)$是问题(1.1)～(1.3)的解，$\{u_k^j\}$是差分问题(3.5)的解，则$\{u_k^j\}$在离散L^2范数意义下关于小参数ε一致逼近于$u(x,t)$，且有估计

$$\|u(x,t_j)-u^j\|\leqslant M(\tau^2+h^{2/3})$$

五、数值例子

用本文讨论的差分格式，我们计算了很多数值例子，结果表明格式不仅关于小参数ε是一致收敛的，而且实际的收敛阶数比理论上得到的还要高。我们用 Turbo C 编写程序，在 Super 386 计算机上运行。

例 1

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-\varepsilon(2+\sin u)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+u+1=0, & 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant t\leqslant 1\\ u(x,0)=0, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ u(0,t)=u(1,t)=0, & 0\leqslant t\leqslant 1\end{cases}$$

我们取$J=10$而对ε取不同的值。令$u_n(x,t_j)$，$u_{2n}(x,t_j)$，$u_{4n}(x,t_j)$分别表示取$2N=10$，20，40时得到的解，并在公共结点上计算收敛率

$$\text{rate}_2=\ln(\|u_{2n}(x,t_j)-u_n(x,t_j)\|/\|u_{4n}(x,t_j)-u_{2n}(x,t_j)\|)/\ln 2$$

$$\text{rate}_\infty=\ln(\|u_{2n}(x,t_j)-u_n(x,t_j)\|_\infty/\|u_{4n}(x,t_j)-u_{2n}(x,t_j)\|_\infty)/\ln 2$$

表1为ε取不同值时的收敛率。

表 1

ε	rate$_2$	rate$_\infty$
0.01	1.77	1.62
10^{-5}	2.15	2.62
10^{-10}	2.13	2.62

表 2

ε	rate$_2$	rate$_\infty$
0.01	1.89	1.93
10^{-5}	1.97	1.87
10^{-10}	1.97	1.87

例 2

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}-\varepsilon(u^2+1)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+u-e^{-u}=0, & 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant t\leqslant 1 \\ u(x,0)=0, & 0\leqslant x\leqslant 1 \\ u(0,t)=u(1,t)=0, & 0\leqslant t\leqslant T \end{cases}$$

计算结果见表2。

参 考 文 献

[1] Oleinik, O. A. and T. D. Ventcel, The first boundary problem and the Cauchy problem for quasi-linear equations of parabolic type, *Mat. Sb. N. S.*, 41 (83) (1957), 105—128.

[2] Vishik, M. I. and L. A. Lyusternik, Regular degeneration and boundary layer for linear differential equations with small parameter, *Usp. Mat. Nauk*, 12 (1957), 3—122.

[3] 苏煜城，《奇异摄动中的边界层校正法》，上海科技出版社（1983）。

[4] Trenogin, V. A., On the asymptotic character of solutions of near-linear parabolic equations with a parabolic boundary layer, *Usp. Mat. Nauk*, 16(1) (1961), 163—169.

[5] Bakhvalov, N. S., On the optimization of the methods for solving boundary value problems in the presence of a boundary layer, *Zh. Vychisl. Mat. i Mat. Fiz.*, 9 (1969), 841—859.

[6] Shishkin, G. I., Solution of a boundary value problem for an elliptic equation with small parameter multiplying the highest derivatives, ibid, 26(7) (1986), 1019—1031.

[7] Vulanovic, R., On a numerical solution of a type of singularly perturbed boundary value problem by using a special discretization mesh, *Zb. rad. Prir-mat. Fak. Univ. u. Novom Sadu, Ser. Mat.*, 13 (1983), 187—201.

[8] Lees, M., A linear three-level difference scheme for quasilinear parabolic equation, *Math. Comp.*, 20 (1966), 516—522.

[9] 戴伟忠、陈传淡，二维非线性抛物型微分方程的一个三层差分格式，计算数学，11(1) (1989), 1—9.

[10] Meck, P. C. and J. Norbury, Two-stage, two-level finite difference schemes for non-linear parabolic equations, *IMA J. Numer. Anal.*, 2 (1982), 335—370.

[11] 萨马尔斯基、安德烈耶夫，《椭圆型方程差分方法》（中译本），科学出版社（1984）。

The Numerical Solution of a Singularly Perturbed Problem for Quasilinear Parabolic Differential Equation

Su Yu-cheng Shen Quan
(Department of Mathematics, Nanjing University, Nanjing)

Abstract

We consider the numerical solution of a singularly perturbed problem for the quasilinear parabolic differential equation. We construct a linear three-level finite difference scheme on a nonuniform grid. The uniform convergence in the sense of discrete L^2 norm is proved and numerical examples are presented.

Key words quasilinear parabolic differential equation, singular perturbation, linear three-level difference scheme, uniform convergence