应用数学和力学，第13卷第7期(1992年7月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

广义双拟变分不等式的推广*

张石生　　饶　玲

(四川大学数学系，1991年7月1日收到)

摘　要

本文引出和研究了一类新型双拟变分不等式解的存在性问题．本文的结果统一、改进和发展了有关变分不等式问题许多最新的结果．

关键词　广义双拟变分不等式

一、引　言

设Ω表实数域或复数域，E，F，Z为Ω上的线性空间，$\langle\cdot,\cdot\rangle$：$F\times E\to\Omega$是双线性泛函，$X$为$E$中的非空集，$S$：$X\to 2^X$，$M$，$T$：$X\to 2^F$为三个多值映象．关于$(S, M, T)$的广义双拟变分不等式问题，是求一点$\hat{y}\in X$，满足：

(i)　$\hat{y}\in S(\hat{y})$且

(ii)　$\inf\limits_{w\in T(\hat{y})}\mathrm{Re}\langle f-w,\hat{y}-x\rangle\leqslant 0$，$\forall x\in S(\hat{y})$，$\forall f\in M(\hat{y})$．

关于广义双拟变分不等式解的存在性问题文献[3]得出了如下的结果．

定理A　设E是Ω上的局部凸的Hausdorff拓扑线性空间，$X\subset E$为非空紧凸集，F为Ω上的拓扑线性空间，设$\langle\cdot,\cdot\rangle$：$F\times E\to\Omega$为双线性泛函且在$F\times X$的紧子集上是连续的．再设

(a)　S：$X\to 2^X$是具闭凸值上半连续映象；

(b)　M：$X\to 2^F$关于$\langle\cdot,\cdot\rangle$是单调的；

(c)　T：$X\to 2^F$是具紧值的上半连续映象；

(d)　下面的集合Σ是X中的开集，其中

$$\Sigma=\{y\in X:\ \sup_{x\in S(y)}\ \sup_{f\in M(x)}\ \inf_{w\in T(y)}\ \mathrm{Re}\langle f-w,y-x\rangle>0\}.$$

则存在一点，$\hat{y}\in X$，使得

(i)　$\hat{y}\in S(\hat{y})$且

(ii)　$\inf\limits_{w\in T(\hat{y})}\mathrm{Re}\langle f-w,\hat{y}-x\rangle\leqslant 0$，$\forall x\in S(\hat{y})$，$\forall f\in M(x)$．

* 国家自然科学基金资助课题．

另外，如果M沿X中的线段到F的$\sigma(F,E)$拓扑是下半连续的，则有

(iii) $\inf\limits_{w\in T(\hat{y})} \mathrm{Re}\langle f-w, \hat{y}-x\rangle\leqslant 0$，$\forall x\in S(\hat{y})$，$\forall f\in M(\hat{y})$.

定理B 设E是Ω上的局部凸的Hausdorff拓扑线性空间，$X\subset E$为非空紧凸集，F为Ω上的拓朴线性空间．设$\langle\cdot,\cdot\rangle$：$F\times E\to\Omega$为双线性泛函且对每一$f\in F$，$x\mapsto\langle f,x\rangle$在$X$上连续．如果在$F$上赋以$\delta(F,E)$拓扑，并设：

(a) S：$X\to 2^X$是具闭凸值的连续映象；

(b) M：$X\to 2^F$关于$\langle\cdot,\cdot\rangle$是单调的且是下半连续的；

(c) T：$X\to 2^F$是具紧值的上半连续映象．

则存在一点$\hat{y}\in X$，使得定理A中的结论成立．

本文的目的是引入和研究了一类新型的双拟变分不等式解的存在性问题．本文结果不仅推广了上述结果，而且还统一、改进和发展了许多最新的结果．

二、主要结果

现在我们给出本文的主要结果．

定理1 设E为Ω上的局部凸的Hausdorff拓扑线性空间，X是E中的非空紧凸子集，F，Z是Ω上的拓扑线性空间．设φ：$E\times E\times F\times Z\to\Omega$满足条件：

(a_1) 对任给的$(x,f)\in E\times F$，函数$(y,w)\mapsto\mathrm{Re}\varphi(x,y,f,w)$在$X\times Z$的任一紧子集上是下半连续的；

(a_2) 对任给的$(f,w)\in F\times Z$，函数$(x,y)\mapsto\mathrm{Re}\varphi(x,y,f,w)$关于$x$是 0-对角凹的 (即对任一有限集$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}\subset E$及任一$y_0=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i x_i$，其中$\alpha_i\geqslant 0$，$i=1,\cdots,n$，且$\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i=1$ 有 $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\mathrm{Re}\varphi(x_i,y_0,f,w)\leqslant 0$).

(b) 设S：$X\to 2^X$是具闭凸值的上半连续映象；

(c) 设M：$X\to 2^F$满足条件：对任意的x，$y\in X$，$w\in Z$

$$\mathrm{Re}\varphi(x,y,f_1,w)\leqslant\mathrm{Re}\varphi(x,y,f_2,w),\quad\forall f_1\in M(x),\quad\forall f_2\in M(y);$$

(d) T：$X\to 2^Z$是具紧值的上半连续映象；

(e) 集Σ是X中的开集，其中

$$\Sigma=\{y\in X:\ \sup_{x\in S(y)}\ \sup_{f\in M(x)}\ \inf_{w\in T(y)}\ \mathrm{Re}\varphi(x,y,f,w)>0\}.$$

则存在一点$\hat{y}\in X$，使得

(i) $\hat{y}\in S(\hat{y})$，且

(ii) $\inf\limits_{w\in T(\hat{y})}\mathrm{Re}\varphi(x,\hat{y},f,w)\leqslant 0$，$\forall x\in S(\hat{y})$，$\forall f\in M(x)$.

如果再设下列条件成立：

(f) $\mathrm{Re}\varphi(x,y,f,w)+\mathrm{Re}\varphi(y,x,f,w)\geqslant 0$，$\forall(x,y,f,w)\in X\times X\times F\times Z$；而且对$X$中的任意线段$L$及任意给定的$x\in X$，$\mathrm{Re}\varphi(x,y,f,w)$关于$(y,f,w)$在$L\times F\times Z$上下半连续；

且M沿L到F的拓扑下半连续。

则有

(iii) $\inf_{w\in T(\hat{y})} \mathrm{Re}\varphi(x,\hat{y},f,w)\leqslant 0$, $\forall x\in S(\hat{y})$, $\forall f\in M(\hat{y})$.

定理2 设E, X, F, Z同定理1，设φ: $E\times E\times F\times Z\to\Omega$满足条件：

(a_1) 对任一$f\in F$, $\mathrm{Re}\varphi(x,y,f,w)$关于$(y,w)$在$X\times Z$的任一紧子集上对$x\in X$是一致下半连续的；

(a_2) 对任给的$(f,w)\in F\times Z$, $\mathrm{Re}\varphi(x,y,f,w)$关于$x$是0-对角凹的；

(a_3) 对任一$y\in X$, $\mathrm{Re}\varphi(x,y,f,w)$关于$(x,f,w)$在$X\times F\times Z$上是下半连续的。

(b) 设S: $X\to 2^X$是具非空闭凸值的连续映象；

(c) 设M: $X\to 2^F$是下半连续的而且对任意的$x,y\in X$及任一$w\in Z$

$$\mathrm{Re}\varphi(x,y,f_1,w)\leqslant\mathrm{Re}\varphi(x,y,f_2,w),\quad \forall f_1\in M(x),\ f_2\in M(y).$$

(d) 设T: $X\to 2^Z$是具紧值的上半续映象；

则存在$\hat{y}\in X$，使得

(i) $\hat{y}\in S(\hat{y})$且

(ii) $\inf_{w\in T(\hat{y})} \mathrm{Re}\varphi(x,\hat{y},f,w)\leqslant 0$, $\forall x\in S(\hat{y})$, $\forall f\in M(x)$.

如果再设下列条件(e)成立：

(e) 对任给的$(x,y,f,w)\in X\times X\times F\times Z$，有

$$\mathrm{Re}\varphi(x,y,f,w)+\mathrm{Re}\varphi(y,x,f,w)\geqslant 0.$$

而且对任给的$x\in X$, $\mathrm{Re}\varphi(x,y,f,w)$关于$(y,f,w)$在$X\times F\times Z$上下半连续。

则有

$$\inf_{w\in T(\hat{y})} \mathrm{Re}\varphi(x,\hat{y},f,w)\leqslant 0,\quad \forall x\in S(\hat{y}),\ \forall f\in M(\hat{y}).$$

三、引　　理

引理1[1] 设X是Hausdorff拓扑线性空间E的非空紧凸子集，S: $X\to 2^E$是上半连续映象且对每一$x\in X$, $S(x)$是有界的，则对任一$p\in E'$ (E的共轭空间)，函数f_p: $X\to R$，其中

$$f_p(y)=\sup_{x\in S(y)} \mathrm{Re}\langle p,x\rangle$$

是y的上半连续函数。

引理2[2] 设X,Y为两个拓扑空间，W: $X\times Y\to R$, G: $Y\to 2^X$. 记$V(y)=\sup_{x\in G(y)} W(x,y)$.

(i) 如果W在$X\times Y$下半连续，G在$y_0\in Y$处下半连续，则V在y_0处下半连续；

(ii) 如果W在$X\times Y$上半连续，$G(y_0)$紧且G在$y_0\in Y$处上半连续，则V在y_0处上半连续

(iii) 如果X是紧集，W: $X\times Y\to R$下半连续，则$M(y)=\inf_{x\in X} W(x,y)$在$Y$上下半连续。

引理3[3] 设X, Y为拓扑空间，f: $X\to R$为非负连续函数，g: $Y\to R$下半连续，则F: $X\times Y\to R$, $F(x,y)=f(x)g(y)$是$X\times Y$上的下半连续函数。

引理4 设X，Y为拓扑空间．设W：$X\times Y\to R$满足条件：对每一$x\in X$，$y\mapsto W(x,y)$是y的下半连续（或连续）函数；函数$x\mapsto W(x,y)$是x的关于y的一致下半连续（或一致连续）函数．则W关于(x,y)在$X\times Y$上下半连续（或连续）．

证 对任给的$(x_0,y_0)\in X\times Y$，因

$$\varliminf_{\substack{x\to x_0\\ y\to Y_0}}[W(x,y)-W(x_0,y_0)]\geqslant\varliminf_{x\to x_0}[W(x,y)-W(x_0,y)]$$

$$+\varliminf_{y\to y_0}[W(x_0,y)-W(x_0,y_0)]=0,$$

故W在$X\times Y$上下半连续．

同理可证W在$X\times Y$连续．

引理5 设E为Ω上的拓扑线性空间，F，Z为任意的拓扑空间，$X\subset E$为非空凸集．对X中的线段L，$\mathrm{Re}\varphi(x,y,f,w)$关于$(y,f,w)$在$L\times F\times Z$下半连续，$M$沿$L$到$F$的拓扑下半连续．设$S$：$X\to 2^X$，$T$：$X\to 2^F$；设对任意给定的$(f,w)\in F\times Z$，$\mathrm{Re}\varphi(x,y,f,w)$关于$x$是0-对角凹的．再设

$$\mathrm{Re}\varphi(x,y,f,w)+\mathrm{Re}\varphi(y,x,f,w)\geqslant 0,\quad\forall(x,y,f,w)\in X\times X\times F\times Z \tag{3.1}$$

如果存在$\hat{y}\in X$，使得$\hat{y}\in S(\hat{y})$，$S(\hat{y})$为凸集，$T(\hat{y})$为紧集，而且满足

$$\inf_{w\in T(\hat{y})}\mathrm{Re}\varphi(x,\hat{y},f,w)\leqslant 0,\quad\forall x\in S(\hat{y}),\ \forall f\in M(x). \tag{3.2}$$

则有

$$\inf_{w\in T(\hat{y})}\mathrm{Re}\varphi(x,\hat{y},f,w)\leqslant 0,\quad\forall x\in S(\hat{y}),\forall f\in M(\hat{y}).$$

证 任给$x\in S(\hat{y})$，令$x_t=tx+(1-t)\hat{y}$，$t\in[0,1]$．由假定知$x_t\in S(\hat{y})$．又因$\mathrm{Re}\varphi(x,y,f,w)$对给定的$f,w$,关于$x$是0-对角凹的，故有

$$t\cdot\mathrm{Re}\varphi(x,x_t,f,w)+(1-t)\mathrm{Re}\varphi\hat{y}(,x_t,f,w)\leqslant 0.$$

于是有

$$t\cdot\inf_{w\in T(\hat{y})}\mathrm{Re}\varphi(x,x_t,f,w)+(1-t)\sup_{w\in T(\hat{y})}\varphi(\hat{y},x_t,f,w)\leqslant 0 \tag{3.3}$$

由(3.1)和(3.2)即得

$$\sup_{w\in T(\hat{y})}\mathrm{Re}\varphi(\hat{y},x_t,f,w)\geqslant\sup_{w\in T(\hat{y})}[-\mathrm{Re}\varphi(x_t,\hat{y},f,w)]$$

$$=-\inf_{w\in T(\hat{y})}\mathrm{Re}\varphi(x_t,\hat{y},f,w)\geqslant 0 \tag{3.4}$$

由(3.3)和(3.4)即得

$$0\leqslant(1-t)\cdot\sup_{w\in T(\hat{y})}\mathrm{Re}\varphi(\hat{y},x_t,f,w)\leqslant -t\cdot\inf_{w\in T(\hat{y})}\mathrm{Re}\varphi(x,x_t,f,w).$$

因而对一切$t\in(0,1]$有

$$\inf_{w\in T(\hat{y})}\mathrm{Re}\varphi(x,x_t,f,w)\leqslant 0 \tag{3.5}$$

于是有

$$\sup_{f\in M(x_t)}\inf_{w\in T(\hat{y})}\mathrm{Re}\varphi(x,x_t,f,w)\leqslant 0 \tag{3.6}$$

下证 $\xi(t)=\sup\limits_{f\in M(x_t)}\inf\limits_{w\in T(\hat{y})}\mathrm{Re}\varphi(x,x_t,f,w)$关于$t\in[0,1]$下半连续．事实上，由引理的条件知$\mathrm{Re}\varphi(x,x_t,f,w)$关于$(t,f,w)$在$[0,1]\times F\times Z$下半连续，又因$T(\hat{y})$紧，故由引理2(iii)

知 $\inf\limits_{w\in T(\hat{y})} \mathrm{Re}\varphi(x,x_t,f,w)$关于$(t,f)$下半连续．另因$M(x_t)$关于$t$在$[0,1]$上，下半连续，于是由引理2(i)知$\zeta(t)$关于$t\in[0,1]$下半连续．于是在(3.6)中让$t\to 0$，即得

$$\sup_{f\in M(\hat{y})} \inf_{w\in T(\hat{y})} \mathrm{Re}\varphi(x,\hat{y},f,w)\leqslant 0$$

引理5证毕．

引理6[4] 设E，F是二 Hausdorff 拓扑线性空间，设$X\subset E$，$Y\subset F$是两个闭凸集．设φ，ψ：$X\times Y\to R$满足条件：

(a) 对任一$y\in Y$，$\varphi(x,y)$关于x下半连续；

(b) $\psi(x,y)$关于y是γ-广义拟凹的，其中$\gamma\in(-\infty,+\infty)$；

(c) $\varphi(x,y)\leqslant\psi(x,y)$；$\forall(x,y)\in X\times Y$；

(d) 存在某一$y_0\in Y$，使得集合$\{x\in X:\ \varphi(x,y_0)\leqslant\gamma\}$是$X$中的紧集合；

则存在$\bar{x}\in X$，使得$\sup\limits_{y\in Y}\varphi(\bar{x},y)\leqslant\gamma$．

四、定理的证明

定理1的证明

设定理1的结论(i)，(ii)不成立．则对任一$y\in X$，或者$y\notin S(y)$，或者存在$x\in S(y)$，$f\in M(x)$，使得

$$\inf_{w\in T(y)} \mathrm{Re}\varphi(x,y,f,w)>0,$$

即或者$y\notin S(y)$，或者$y\in\Sigma$．如果$y\notin S(y)$，则由局部凸Hausdorff拓扑线性空间中关于凸集的分离定理，存在$p\in E'$(E的共轭空间)，使得

$$\mathrm{Re}\langle p,y\rangle-\sup_{x\in S(y)}\mathrm{Re}\langle p,x\rangle>0.$$

对任一$p\in E'$，令

$$V(p)=\{y\in X:\ \mathrm{Re}\langle p,y\rangle-\sup_{x\in S(y)}\mathrm{Re}\langle p,x\rangle>0\}.$$

则$X=\Sigma\cup\bigcup\limits_{p\in E'}V(p)$．由引理1知每一$V(p)$是开的，又由假设，$\Sigma$在$X$中是开的．由于$X$紧，故存在$p_1$，$p_2$，…，$p_n\in E'$，使得

$$X=\Sigma\cup\bigcup_{i=1}^{n}V(p_i).\tag{4.1}$$

令$V_0=\Sigma$，$V_i=V(p_i)$，$i=1,2,\cdots,n$．设$\{\beta_0,\beta_1,\cdots,\beta_n\}$为与开覆盖$\{V_0,V_1,\cdots,V_n\}$相对应的连续单位分解，即$\beta_i$：$X\to[0,1]$连续($i=0,1,\cdots,n$)，$\sum\limits_{i=0}^{n}\beta_i(x)=1$，$\forall x\in X$，而且$\beta_i(x)=0$，$\forall x\in X\backslash V_i(i=0,1,\cdots,n)$．定义函数$h_1$，$h_2$：$X\times X\to R$如下：

$$h_1(x,y)=\beta_0(y)\sup_{f\in M(x)}\inf_{w\in T(y)}\mathrm{Re}\varphi(x,y,f,w)+\sum_{i=1}^{n}\beta_i(y)\mathrm{Re}\langle p_i,y-x\rangle$$

$$h_1(x,y)=\beta_0(y)\inf_{g\in M(y)}\inf_{w\in T(y)}\mathrm{Re}\varphi(x,y,g,w)+\sum_{i=1}^{n}\beta_i(y)\mathrm{Re}\langle p_i,y-x\rangle$$

于是

（1） 由假设(c)知，对任意的 $f\in M(x)$，$g\in M(y)$ 有 $\sup\limits_{f\in M(x)}\inf\limits_{w\in T(y)}\mathrm{Re}\varphi(x,y,f,w)\leqslant\inf\limits_{g\in M(y)}\inf\limits_{w\in T(y)}\mathrm{Re}\varphi(x,y,g,w)$。故有 $h_1(x,y)\leqslant h_2(x,y)$，$\forall(x,y)\in X\times X$。

（2） 对任给的 $x\in X$ 及任给的 $f\in M(x)$，因

$$\inf_{w\in T(y)}\mathrm{Re}\varphi(x,y,f,w)=-\sup_{w\in T(y)}-\mathrm{Re}\varphi(x,y,f,w),$$

且 T：$X\to 2^Z$ 是紧值上半连续的，且 $\mathrm{Re}\varphi(x,y,f,w)$ 关于 (y,w) 在紧子集 $X\times\bigcup\limits_{x\in X}T(x)$ 下半连续，故由引理2(ii)，$\sup\limits_{w\in T(y)}-\mathrm{Re}\varphi(x,y,f,w)$ 关于 y 上半连续，从而 $\inf\limits_{w\in T(y)}\mathrm{Re}\varphi(x,y,f,w)$ 关于 y 下半连续。再由引理3得知：$y\mapsto\beta_0(y)\sup\limits_{f\in M(x)}\inf\limits_{w\in T(y)}\mathrm{Re}\varphi(x,y,f,w)$ 关于 y 在 X 下半连续，从而 $h_1(x,y)$ 关于 y 下半连续；

（3） 不难验证：$h_2(x,y)$ 关于 x 是0-对角凹的，从而 $h_2(x,y)$ 关于 x 是0-广义拟凹的；

（4） 由(2)知 $h_1(x,y)$ 关于 y 下半连续，因而对任一 $x\in X$，$\{y\in X:\ h_1(x,y)\leqslant 0\}$ 是 X 中的闭集。又因 X 是紧的，故 $\{y\in X:\ h_1(x,y)\leqslant 0\}$ 是紧集。

取 $\gamma=0$，则知引理6中的条件全部满足。于是存在 $\hat{y}\in X$，使得 $h_1(x,\hat{y})\leqslant 0$，$\forall x\in X$，即有

$$\beta_0(\hat{y})\sup_{f\in M(x)}\inf_{w\in T(\hat{y})}\mathrm{Re}\varphi(x,\hat{y},f,w)+\sum_{i=1}^{n}\beta_i(\hat{y})\mathrm{Re}\langle p_i,\hat{y}-x\rangle\leqslant 0$$

$$(\forall x\in X)\tag{4.2}$$

(i)′由(4.1)，当 $\hat{y}\in\Sigma$ 时，即有 $\beta_0(\hat{y})>0$，取 $\hat{x}\in S(\hat{y})$ 使

$$\sup_{f\in M(\hat{x})}\inf_{w\in T(\hat{y})}\mathrm{Re}\varphi(\hat{x},\hat{y},f,w)>0,$$

故有

$$\beta_0(\hat{y})\sup_{f\in M(\hat{x})}\inf_{w\in T(\hat{y})}\mathrm{Re}\varphi(\hat{x},\hat{y},f,w)>0.$$

(ii)′由(4.1)，当 $\hat{y}\in V(p_i)$ 时，$i\in\{1,2,\cdots,n\}$，则有 $\beta_i(\hat{y})>0$，因而有

$$\mathrm{Re}\langle p_i,\hat{y}\rangle>\sup_{x\in S(\hat{y})}\mathrm{Re}\langle p_i,x\rangle\geqslant\mathrm{Re}\langle p_i,\hat{y}\rangle.$$

即 $$\beta_i(\hat{y})\cdot\mathrm{Re}\langle p_i,\hat{y}-\hat{x}\rangle>0.$$

结合(i)′，(ii)′中所述，即得

$$\beta_0(\hat{y})\sup_{f\in M(\hat{x})}\inf_{w\in T(\hat{y})}\mathrm{Re}\varphi(\hat{x},\hat{y},f,w)+\sum_{i=1}^{n}\beta_i(\hat{y})\mathrm{Re}\langle p_i,\hat{y}-\hat{x}\rangle>0.$$

这与(4.2)式相矛盾。由此矛盾定理1的结论(i)，(ii)得证。再应用条件(f)及引理5得证定理1中的结论(iii)。证毕。

定理2的证明 应用定理1，只需证明集合

$$\Sigma=\{y\in X:\ \sup_{x\in S(y)}\sup_{f\in M(x)}\inf_{w\in T(y)}\mathrm{Re}\varphi(x,y,f,w)>0\}$$

为 X 中的开集，因而只要证明

$$g(y)=\sup_{x\in S(y)}\sup_{f\in M(x)}\inf_{w\in T(y)}\mathrm{Re}\varphi(x,y,f,w)$$

是 y 的下半连续函数。

事实上，由条件(a_1)，$-\mathrm{Re}\varphi(x,y,f,w)$关于$(y,w)$在紧子集$X\times\bigcup\limits_{y\in X}T(y)$上对$x\in X$是一致上半连续的。因$T$是紧值上半连续映象，由引理2(ii)，函数$\sup\limits_{w\in T(y)}-\mathrm{Re}\varphi(x,y,f,w)$关于$y$对$x\in X$一致上半连续，故

$$h(x,y,f)=\inf_{w\in T(y)}\mathrm{Re}\varphi(x,y,f,w) \tag{4.3}$$

关于y对$x\in X$一致下半连续。

现证$\xi(x,y)=\sup\limits_{f\in M(x)}h(x,y,f)$关于$x$下半连续。事实上，因$T$是紧值的，故由条件($a_3$)知，$\mathrm{Re}\varphi(x,y,f,w)$关于$(x,f,w)$在$X\times F\times Z$是下半连续的，于是由引理2(iii)，$h(x,y,f)$关于$(x,f)$是下半连续的。又因$M$是下半连续的，于是由引理2(i)知$\xi(x,y)$关于$x$下半连续。

另外，在前面我们已证明$h(x,y,f)$关于y对$x\in X$一致下半连续，而下半连续函数的上确界仍为下半连续函数，故$\xi(x,y)$关于y对$x\in X$也是一致下半连续的。因而$\xi(x,y)$关于x下半连续，关于y对$x\in X$一致下半连续。由引理4，$\xi(x,y)$关于(x,y)在$X\times X$下半连续。因S是下半连续映象，由引理2(i)，$g(y)=\sup\limits_{x\in S(y)}\xi(x,y)$关于$y$下半连续。证毕。

五、定理的推论

1. 首先我们指出：定理1是定理A的推广。

事实上，取$\varphi(x,y,f,w)=\langle f-w,\ y-x\rangle$，$Z=F$，则当定理A的条件满足时，则必满足定理1的条件。因而定理A的结论由定理1直接可得。

2. 其次我们指出：定理2是定理B的推广。

事实上，我们只要指出，当定理B的条件满足时，则必满足定理2的条件。

取$Z=F$，$\varphi(x,y,f,w)=\langle f-w,\ y-x\rangle$，由定理B的条件$\langle\cdot,\cdot\rangle$：$F\times E\to\Omega$是双线性泛函，使得对每一$f\in F$，$x\mapsto\langle f,x\rangle$在$X$上连续。因$F$被赋以$\delta(F,E)$拓扑，故易知$\langle\cdot,\cdot\rangle$在$F\times X$的紧子集上连续。于是对任给的$(y_0,w_0)\in A\times B$(这里$A\times B$表$F\times X$中的紧子集)，对任给的$f\in F$和$\varepsilon>0$，存在$w_0$的邻域$N_1$，和$y_0$的邻域$\mathscr{U}$，使得对任意的$(w,y)\in N_1\times\mathscr{U}$有

$$|\mathrm{Re}\langle f-w,y-y_0\rangle|<\varepsilon/2.$$

又因F赋以拓扑$\delta(F,E)$，故存在w_0的邻域N_2(与x无关)，使得$w\in N_2$时，$|\mathrm{Re}\langle w_0-w,y_0-x\rangle|<\varepsilon/2$.取$N=N_1\cap N_2$，则对任意的$(w,y)\in N\times\mathscr{U}$时有

$$\begin{aligned}&|\mathrm{Re}\langle f-w,y-x\rangle-\mathrm{Re}\langle f-w_0,y_0-x\rangle|\\&\leqslant|\mathrm{Re}\langle f-w,y-x\rangle-\mathrm{Re}\langle f-w,y_0-x\rangle|\\&\quad+|\mathrm{Re}\langle f-w,y_0-x\rangle-\mathrm{Re}\langle f-w_0,y_0-x\rangle|\\&=|\mathrm{Re}\langle f-w,y-y_0\rangle|+|\mathrm{Re}\langle w_0-w,y_0-x\rangle|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

上式表明定理2的条件(a_1)成立；

下证在定理B的条件下，定理2中条件(a_3)成立。事实上，因F赋以拓扑$\delta(F,E)$，故对任给的$x\in X$，$f\mapsto\langle f,x\rangle$连续。故对任给的$y\in F$及任一点$(w_0,f_0,x_0)\in F\times F\times X$，记$f-w=s$，$f_0-w_0=s_0$，于是有

$$\lim_{(w,f,x)\to(w_0,f_0,x_0)}(\mathrm{Re}\langle f-w,y-x\rangle-\mathrm{Re}\langle f_0-w_0,y-x_0\rangle)$$
$$=\lim_{\substack{x\to x_0\\ s\to s_0}}(\mathrm{Re}\langle s,y-x\rangle-\mathrm{Re}\langle s_0,y-x_0\rangle)$$
$$=\lim_{\substack{x\to x_0\\ s\to s_0}}(\mathrm{Re}\langle s-s_0,y-x\rangle)+\lim_{x\to x_0}\mathrm{Re}\langle s_0,x_0-x\rangle=0$$

故定理2中的条件(a_3)成立。

不难验证，定理2中其余条件也满足。故定理2是定理B的推广。

由定理1特别可得下面的推论。

推理1　设E是Ω上的局部凸的Hausdorff拓扑线性空间，X是E中的非空紧凸子集，Z是Ω上的拓扑线性空间，φ：$E\times E\times Z\to\Omega$满足下列条件：

(a_1)　对任给的$x\in X$，$\mathrm{Re}\varphi(x,y,w)$关于$(y,w)$在$X\times Z$的任一紧子集上是下半连续的；

(a_2)　对任给的$w\in Z$，$\mathrm{Re}\varphi(x,y,w)$关于$x$是0-对角凹的；

(b)　设S：$X\to 2^X$是具闭凸值的上半连续映象；

(c)　设T：$X\to 2^Z$是具紧值的上半连续映象；

(d)　$\Sigma=\{y\in X：\sup\limits_{x\in S(y)}\inf\limits_{w\in T(y)}\mathrm{Re}\varphi(x,y,w)>0\}$是$X$中的开集。

则存在$\hat{y}\in X$，使得

(i)　$\hat{y}\in S(\hat{y})$，且

(ii)　$\inf\limits_{w\in T(\hat{y})}\mathrm{Re}\varphi(x,\hat{y},w)\leqslant 0,\forall x\in S(\hat{y})$.

推论2　设E，X，Z同推论1，设φ：$E\times E\times Z\to\Omega$满足条件

(a_1)　对任给的$x\in X$，$\mathrm{Re}\varphi(x,y,w)$关于$(y,w)$在$X\times Z$的任一紧子集上是下半连续的；

(a_2)　对任给的$w\in Z$，$\mathrm{Re}\varphi(x,y,w)$关于$x$是0-对角凹的；

(b)　设T：$X\to 2^Z$是具紧值的上半连续映象。

则在在$\hat{y}\in X$，使得

$$\inf_{w\in T(\hat{y})}\mathrm{Re}\varphi(x,\hat{y},w)\leqslant 0,\quad\forall x\in X.$$

证　由条件(a_1)，(b)易证函数$\sup\limits_{x\in X}\inf\limits_{w\in T(y)}\mathrm{Re}\varphi(x,y,w)$是$y$的下半连续函数，故集合

$$\{y\in X：\sup_{x\in X}\inf_{w\in T(y)}\mathrm{Re}\varphi(x,y,w)>0\}$$

是X中的开集。于推论1中取$S(x)\equiv X$，$\forall x\in X$，则结论由推论1得知。

参 考 文 献

[1] Shih, M. H. and K. K. Tan, Generalized quasi-variational inequalities in locally convex topological vector spaces, *J. Math. Anal. Appl.*, **108** (1985), 333—343.

[2] Aubin, J. P. and I. Ekeland, *Applied Nonlinear Analysis*, John Wiley and Sons (1984).

[3] Shih, M. H. and K. K. Tan, Generalized bi-quasi-variational inequalities, *J. Math. Anal. Appl.*, **143** (1989), 66—85.

[4] Chang Shi-sheng and Zhang Ying, Generalized KKM theorem and variational inequalities, *J. Math. Anal. Appl.*, **158** (1991).

Some Generalizations of Generalized Bi-Quasi-Variational Inequalities

Zhang Shi-sheng Rao Ling

(*Department of Mathematics, Sichuan University, Chengdu*)

Abstract

The purpose of this paper is to introduce and study the existence problems of solutions for a class of new bi-quasi-variational inequalities. The results presented in this paper unify, sharpen and extend many recent results.

Key words generalized bi-quasi-variational inequality