应用数学和力学，第13卷第8期（1992年8月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

负阻尼周期运动的经过时间

李怡平

（广州 中山大学数学系；澳门大学科技学院）

（李骊推荐，1990年8月20日收到）

摘　要

初始时作周期运动的系统被负阻尼作用逐渐托出势能井，其周期运动的经过时间由多重变量展开解得．一强非线性系统的算例表明其结果近似性好且计算简便．

关键词　奇异摄动　多重尺度　非线性振动　渐近分析

一、引　言

非线性振动在很多领域都有研究，自由电子激光中的电子能量共振是其中比较新的应用领域[1]．这类系统带有负阻尼，其振幅逐渐增长，为了让系统在振动状态下运行，我们必须控制它的周期运动的经过时间．当然，这可以借助于计算机应用数值分析去计算，但是数值结果难于揭示解与系统参数之间的关系．本文讨论的是一种基于多重尺度的渐近分析方法，最后通过算例将它与数值计算的结果作一比较．

二、带慢变参数的非线性振动

考虑强非线性振动系统

$$d^2y/dt^2+\varepsilon k(y,\bar{t})dy/dt+g(y,\bar{t})=0 \tag{2.1}$$

其中$\bar{t}=\varepsilon t(0<\varepsilon\ll 1)$为慢变尺度，快变尺度为$t^+$并采用Kuzmak[2]的定义

$$dt^+/dt=\omega(\bar{t}) \tag{2.2}$$

这里$\omega(\bar{t})$为待定函数，它将由(2.1)的解的周期性质所确定．假定方程(2.1)中函数k和g均解析，而且当$\varepsilon=0$时(2.1)有周期解．

容易看到，方程(2.1)的周期解的频率是快变的，应是t^+的函数，而它的振幅和相位是慢变的，应是$\bar{t}$的函数．因此解函数y有渐近开式

$$y(t,\varepsilon)=y_0(t^+,\bar{t})+\varepsilon y_1(t^+,\bar{t})+\varepsilon^2y_2(t^+,\bar{t})+\cdots \tag{2.3}$$

式中y_0，y_1，…都必须是t^+的周期函数，否则展开式失去渐近意义．将(2.3)代入(2.1)并比较ε的同次幂系数可得方程

$$O(1):\quad \omega^2\partial^2y_0/\partial t^{+2}+g(y_0,\bar{t})=0 \tag{2.4}$$

$$O(\varepsilon^n):\ \omega^2\partial^2 y_n/\partial t^{+2}+g_y(y_0,\bar{t})y_n=F_n(y_0,y_1,\cdots,y_{n-1},\bar{t}) \tag{2.5}$$

其中$n=1,2,\cdots$；F_1可以推导得到

$$F_1=-2\omega\frac{\partial^2 y_0}{\partial t^+\partial\bar{t}}-\left[\frac{d\omega}{d\bar{t}}+\omega k(y_0,\bar{t})\right]\frac{\partial y_0}{\partial t^+} \tag{2.6}$$

容易验证，(2.5)的齐次方程有一个周期解：

$$y_{\rm I}=\partial y_0/\partial\psi,\ \psi=t^++\psi_0(\bar{t}) \tag{2.7}$$

然后用降阶法可求出该齐次方程的另一个与$y_{\rm I}$线性无关的解：

$$y_{\rm II}=y_{\rm I}\int^{\psi}\frac{d\psi'}{y_{\rm I}^2} \tag{2.8}$$

遗憾的是对于一般的非线性系统，$y_{\rm II}$已不是周期解.应用常数变易法，我们就可以得到(2.5)的通解：

$$\begin{aligned}y_n&=C_n(\bar{t})y_{\rm I}+D_n(\bar{t})y_{\rm II}-\frac{y_{\rm I}}{\omega^2}\int^{\psi}F_n y_{\rm II}d\psi'+\frac{y_{\rm II}}{\omega^2}\int^{\psi}F_n y_{\rm I}d\psi'\\&=y_{\rm I}\left[C_n(\bar{t})+\int^{\psi}\frac{d\psi'}{y_{\rm I}^2}\left(D_n(\bar{t})+\frac{1}{\omega^2}\int^{\psi'}F_n y_{\rm I}d\omega''\right)\right]\end{aligned} \tag{2.9}$$

其中$n=1,2,\cdots$；系数C_n和D_n可由高阶解的周期性确定．为了使y_n成为ψ的周期函数，我们分别要求(2.9)中的内层积分和外层积分为ψ'和ψ的周期函数．令周期为1，则有

$$\int_0^1 F_n y_{\rm I}d\psi=0 \tag{2.10}$$

$$\int_0^1\frac{d\psi}{y_{\rm I}^2}\left(D_n(\bar{t})+\frac{1}{\omega^2}\int^{\psi}F_n y_{\rm I}d\psi'\right)=0 \tag{2.11}$$

其中$n=1,2,\cdots$．Kuzmak[2]得到$n=1$的条件(2.10)且由此方程解出$\omega(\bar{t})$．Luke[3]将Kuzmak的方法扩展到高阶并且完成了另一条件，该条件可以简化为(2.11).戴世强等[4]讨论了比(2.1)更为一般的系统并导出其解$y_{\rm II}$．本文主要应用首阶近似解．对于高阶解的详细情况，读者可参看[3～5]．其中[5]简化了[3]的推导过程而结果也更为简明．

首阶解y_0有两个参数$\omega(\bar{t})$和$\psi_0(\bar{t})$待定．在[5]中已证明ψ_0是常数，而$\omega(\bar{t})$可从(2.10)解得．令$n=1$将(2.6)和(2.7)代入(2.10)得

$$\int_0^1\left[2\omega f_{\psi\bar{t}}f_\psi+\left(\frac{d\omega}{d\bar{t}}+\omega k(f,\bar{t})\right)f_\psi^2\right]d\psi=0 \tag{2.12}$$

此式可改写为一阶微分方程：

$$\frac{d}{d\bar{t}}\left(\omega\int_0^1 f_\psi^2 d\psi\right)+\omega\int_0^1 k(f,\bar{t})f_\psi^2 d\psi=0 \tag{2.13}$$

于(2.12)和(2.13)，我们已应用记号$y_0=f(\psi,\bar{t})$．对(2.13)积分后解出

$$\omega(\bar{t})=\frac{C}{\int_0^1 f_\psi^2 d\psi}\exp\left(-\int_0^{\bar{t}}\frac{\int_0^1 k(f,\tau)f_\psi^2 d\psi}{\int_0^1 f_\psi^2 d\psi}d\tau\right) \tag{2.14}$$

其中C为任意常数．如果阻尼项k与y有关，ω的计算相当复杂．在[5]中提出有平均阻尼的处理方法，即阻尼项k中的y以振荡中心y_r替代，则(2.14)可以简化为

$$\omega(\bar{t})=\frac{C}{\int_0^1 f_\phi^2 d\psi}\exp\left(-\int_0^{\bar{t}} k(y_r,\tau)d\tau\right) \tag{2.15}$$

在[5]中给出的数值算例表明，这样处理的结果是令人满意的．

三、负阻尼振荡的终止

现在考虑将上节的结果应用于非线性系统

$$d^2y/dt^2+\varepsilon k(y,\bar{t})dy/dt+a(\bar{t})y+b(\bar{t})y^3=0 \tag{3.1}$$

其中$\bar{t}=\varepsilon t(0<\varepsilon\ll 1)$．假设(3.1)的解有形如(2.3)的渐近展开式，它的相当于(2.4)的首阶方程为

$$\omega^2(\bar{t})\partial^2 y_0/\partial t^{+2}+a(\bar{t})y_0+b(\bar{t})y_0^3=0 \tag{3.2}$$

其能量积分（方程两边同乘$\partial y_0/\partial t^+$后积分）为

$$\frac{\omega^2(\bar{t})}{2}\left(\frac{\partial y_0}{\partial t^+}\right)^2+V(y_0,a,b)=E_0(\bar{t}) \tag{3.3}$$

其中

$$V(y_0,a,b)=\frac{a(\bar{t})}{2}y_0^2+\frac{b(\bar{t})}{4}y_0^4 \tag{3.4}$$

为系统势能，而$E_0(\bar{t})$为系统的慢变能量．从(3.4)可以看到，仅当$a<0$，$b<0$时，V不存在极小值，对于a和b的其它符号组合情况，方程(3.2)都有周期解．不过我们这里只讨论对称于$y_0=0$的周期解，即当$a>0$时的周期解．

对方程(3.3)再积分一次可以解出y_0是t^+的椭圆正弦函数．这里我们采用另一种方法，先假设解为椭圆函数，然后通过方程(3.2)确定其振幅和模数．设

$$y_0=A_0(\bar{t})\mathrm{sn}[K(\nu)\psi,\nu(\bar{t})] \tag{3.5}$$

其中$\psi=t^++\psi_0$，而K是关于模数$\sqrt{\nu}$的第一类完全积分．将(3.5)代入(3.2)得

$$\omega^2K^2A_0\frac{\partial^2}{\partial u^2}\mathrm{sn}(u,\nu)+aA_0\mathrm{sn}(u,\nu)+bA_0^3\mathrm{sn}^3(u,\nu)=0 \tag{3.6}$$

其中$u=K(\nu)\psi$．由$\mathrm{sn}(u,\nu)$满足的关系式

$$\left[\frac{\partial}{\partial u}\mathrm{sn}(u,\nu)\right]^2-[1-\mathrm{sn}^2(u,\nu)][1-\nu\mathrm{sn}^2(u,\nu)]=0 \tag{3.7}$$

对u求导有

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2}\mathrm{sn}(u,\nu)+(1+\nu)\mathrm{sn}(u,\nu)-2\nu\mathrm{sn}^3(u,\nu)=0 \tag{3.8}$$

从(3.6)和(3.8)消去$\mathrm{sn}(u,\nu)$的偏导数，并令$\mathrm{sn}(\ \ )$和$\mathrm{sn}^3(\ \ )$的系数分别恒等于零，我们就得到代数方程组：

$$-(1+\nu(\bar{t}))\omega^2(\bar{t})K^2(\nu)+a(\bar{t})=0 \tag{3.9}$$

$$2\omega^2(\bar{t})\nu(\bar{t})K^2(\nu)+b(\bar{t})A_0^2(\bar{t})=0 \tag{3.10}$$

从这两个方程消去$\omega^2(\bar{t})$可以解出以ν表示的A_0，代入(3.5)即得到解函数

$$y_0=\sqrt{\frac{-2a\nu}{b(1+\nu)}}\mathrm{sn}[K\psi,\nu] \tag{3.11}$$

其中$\psi=t^+ +\psi_0$而ω则如上节所讨论由(2.15)计算得到

$$\omega(\bar{t})=\frac{C}{A_0^2(\nu)K(\nu)L(\nu)}\exp\left(-\int_0^{\bar{t}}k(0,\tau)d\tau\right) \tag{3.12}$$

其中

$$L(\nu)=\int_0^K \mathrm{cn}^2(u,\nu)\mathrm{dn}^2(u,\nu)du=\frac{1}{3\nu}[(1+\nu)E(\nu)-(1-\nu)K(\nu)] \tag{3.13}$$

这里$E(\nu)$ 是关于模数$\sqrt{\nu}$ 的第二类完全积分。从方程(3.9)，(3.10)和(3.12) 中消去A_0和ω，得到ν的方程

$$\frac{L^2(\nu)\nu^2}{(1+\nu)^3}=\frac{C^2b^2}{4a^3}\exp\left(-2\int_0^{\bar{t}}k(0,\tau)d\tau\right) \tag{3.14}$$

其中常数C可由系统的初始值计算。

从势能式(3.4)知道，当$a>0$，$b<0$ 时势能井是开放型的。在这种情形下，如系统有负阻尼作用，则振幅会逐渐增长，最后溢出势能井而终止振荡现象。由(3.11)可以看到a/b为常数时，振幅增大即模数ν在增大。当ν达到1时，y_0就不再是ψ的周期函数，由此可以推得系统周期运动的经过时间。记最终时刻为T，由(3.14)得到

$$\frac{C^2b^2(T)}{a^3(T)}\exp\left(-2\int_0^{\varepsilon T}k(0,\tau)d\tau\right)=\frac{2}{9} \tag{3.15}$$

在上式的推导中已用到极限结果：当$\nu\to 1$时$L(\nu)\to 2/3$。

四、算　　例

下列非线性系统带慢变参数并有负阻尼作用

$$d^2y/dt^2+(1+\varepsilon t)^2y-(1+\varepsilon t)^3y^3-\varepsilon dy/dt=0, \qquad 0<\varepsilon\ll 1 \tag{4.1}$$

其初始值为$y(0)=0.5$和$\dot{y}(0)=0$。可以验证这个系统的初始状态为周期运动，但是在负阻尼的作用下，系统的振幅逐渐增长最终溢出势能井而停止振荡。

将初始值应用于(3.11)，我们有$\psi_0=1$和$\nu(0)=1/7$。这样(3.14)中的常数C就可以确定，从而由(3.15)可以解出系统(4.1)的周期运动的终止时间

$$T=\frac{1}{\varepsilon}\ln\frac{(1+\nu(0))^{3/2}}{3\sqrt{2}L(\nu(0))\nu(0)}=\frac{0.9609}{\varepsilon} \tag{4.2}$$

应用(4.2)渐近计算的结果与应用计算机数值计算的结果的比较在表1给出。

表 1

ε	渐近结果	数值结果	误差(%)
0.1	9.609	11.19	14
0.01	96.09	97.81	2
0.001	960.9	963.1	0.2
0.0001	9609	9612	0.03

五、结　　语

比较的结果表明，随着ε的递减，式(4.2)给出的渐近结果趋向于精确解。应该注意到，ε的减小没有导致渐近计算工作量的增加。但是如果应用数值方法去解(4.1)，系统会因ε的下降而变成刚性，并且需要的计算机时间也将迅速增加。

参 考 文 献

[1] Li, Y. P. and J. Kevorkian, The effects of wiggler taper rate and signal field gain rate in free-electron lasers, *IEEE J. Quantum Electron*, **24** (1988), 598—608.

[2] Kuzmak, G. E., Asymptotic solutions of nonlinear second order differential equations with variable coefficients, *PMM*, **23** (1959), 515—526.

[3] Luke, J. C., A perturbation method for nonlinear dispersive wave problems, *Proc. Roy. Soc.*, Ser. A, **292** (1966), 403—412.

[4] 戴世强、庄峰青，一类非线性振动系统的渐近解，中国科学，A辑，(1) (1986), 34—40.

[5] Li, Y. P., Free electron lasers with variable parameter wigglers, a strictly nonlinear oscillator with slowly varying parameters, Ph. D. dissertation, Univ. of Wash., Seattle, WA (1987); Dept. Appl. Math., UW, Tech. Rep. 87—2 (1987).

Elapsed Time of Periodic Motion with Negative Damping

Li Yi-ping

(Department of Mathematics, Zhongshan University, Guangzhou;
Faculty of Science and Technology, University of Macao, Macao)

Abstract

An initially periodic motion is gradually raised out of the potential well by the effect of negative damping. The elapsed time when the motion ceases to be periodic is obtained by multiple variable expansions. An example of a strictly nonlinear system shows the result has a good approximation and is easy to calculate.

Key words singular perturbation, multiple scale, nonlinear oscillators, asymptotic analysis