

非均匀薄板弯曲的精确元法

纪振义 叶开沅

(安徽建筑工业学院) (兰州大学)

(1989年9月16日收到)

摘 要

本文在阶梯折算法的基础上, 提出构造有限元的新方法——精确元法. 它不用一般变分原理, 可适用于任意变系数正定和非正定偏微分方程. 利用该方法, 得到薄板弯曲一个非协调三角形单元, 它具有6个自由度. 文中给出证明, 位移和内力均收敛于精确解, 并有很好的精度. 文末给出算例, 算例表明利用本文的方法, 内力和位移均可获得满意的结果.

关键词 算法 非均匀薄板 弯曲 精确元法

一、引 言

有限元单刚矩阵的推导一般采用最小势能原理或虚功原理, 它仅适用于正定微分算子. 众所周知, 利用最小势能原理推导板弯曲的单元矩阵, 须在单元之间满足挠度一阶法向导数连续的相容条件, 这一条件很难满足. 在[1~3]中采用高次插值得到了协调单元. 但由于有二阶导数作为节点未知参数, 使用起来很不方便. Herrman 在[4~5]中, 使用混合变分原理, 得到了同时以位移和内力作为未知参数的有限元模型. 它不需要挠度的一阶法向导数在单元之间连续, 但得到的刚度矩阵却不是正定的. Morler^[6]给出6自由度, Zienkiewicz^[7]给出9自由度非协调单元. [6~7]中的单元能通过“分片检验”^[8], 并收敛于精确解.

本文在阶梯折算法和精确解析法的基础上^[9,10]提出精确元法. 该方法不用变分原理, 直接从偏微分方程出发推导有限元单刚矩阵, 适用于一切变系数正定或非正定偏微分方程. 利用这个方法, 我们推导了一个6自由度非协调三角形平板单元. 文中给出收敛性证明. 所得到的单元刚度矩阵具有正定对称性质. 该方法和一般有限元相比, 给出单刚矩阵时, 不需在单元上进行面积分, 节点载荷项具有明显的物理意义. 并且位移和内力在单元节点上具有较好的数值精度.

文末给出算例, 算例表明利用本文的方法, 内力和位移均可获得满意的结果.

二、六自由度板弯曲三角形单元

对于一个非均匀弹性薄板, 它的平衡方程为

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} = -q(x, y) \quad \text{在 } \Omega \text{ 上} \quad (2.1)$$

内力和位移的关系为

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -D(x, y) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu(x, y) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad M_y = -D(x, y) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu(x, y) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ M_{xy} &= -D(x, y) (1 - \nu(x, y)) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}, \quad Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

式中记号:

w 为板弯曲时的挠度; M_x , M_y 和 M_{xy} 为分别是 x 和 y 方向的弯矩及扭矩, Q_x , Q_y 为横向剪力; $q(x, y)$ 和 $\nu(x, y)$ 为板的横向分布载荷密度和泊松比; $D(x, y)$ 为抗弯刚度, 等于 $Eh^3/12(1-\nu^2)$, 这里 E 是板的弹性模量, h 是板的厚度; Ω 为板所占的平面空间。

我们把板分成 N 个三角形单元。设第 e 个单元所占的空间是 Ω_e , 利用本文的方法, (2.1) 可转化为常系数方程

$$D_e \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = 0 \quad \text{在 } \Omega_e \text{ 上} \quad (2.3)$$

式中已把 $q(x, y)$ 离散为集中力放在单元的三个顶点上, 它们的大小均为 $Aq_e/3$ 。记号 A 表示单元的面积, 下标 e 表示函数 $(\dots)_e$ 等于 $(\dots)|_{x=\bar{x}, y=\bar{y}}$, \bar{x}_e 和 \bar{y}_e 是三角形单元的形心坐标。同理, (2.2) 可转化为

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -D_e \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_e \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad M_y = -D_e \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_e \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ M_{xy} &= -D_e (1 - \nu_e) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad Q_x = -D_e \frac{\partial}{\partial x} (\Delta w), \quad Q_y = -D_e \frac{\partial}{\partial y} (\Delta w) \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

我们选择满足于(2.3)的二次多项式作插值函数。单元节点上的位移和内力参数见图1。图中 θ_{ni} 表示单元第 i 个边界上的法向转角, 等于 $\partial w / \partial n$ 。此外, 单元边界上的法向弯矩, 扭矩和角点集中反力可分别写为

$$\left. \begin{aligned} M_n &= M_x n_x^2 + 2M_{xy} n_x n_y + M_y n_y^2, \quad M_{ns} = (n_x^2 - n_y^2) M_{xy} + n_x n_y (M_y - M_x) \\ R_i &= M_{nsj} - M_{nsk} \quad i, j, k \text{ 为循环指标} \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

式中 n_x 和 n_y 为边界法线的方向余弦。如果在单元之间, 法向转角和弯矩有

$$\theta_{n(a)} = \theta_{n(b)}, \quad M_{n(a)} - M_{n(b)} = \bar{M}_n \quad \text{在 } (ab) \text{ 的边中点上} \quad (2.6)$$

此外在任意单元的角点上 w 连续, 围绕这一角点的全部单元的集中反力 $\sum_e R_i^{(e)}$ 的合力等于

角点上集中载荷 \bar{R}_i (在单元边界上 \bar{R}_i 还包括总剪力转化到角点上的集中力), 我们则可证明, 当 $N \rightarrow \infty$ 时在单元节点上的 w , θ_n , M_n 和 R_i 可按(3.8)式收敛于精确解。在(2.6)中, 下标 (a) 和 (b) 表示相邻的两个单元, (ab) 为其交界, 外载 \bar{M}_n 是加在 (ab) 上的法向弯矩, 方向和 $M_{n(a)}$ 相同。

由上述的连续条件, 可利用

$$\{F\} = [K]\{\delta\} \quad (2.7)$$

得到单刚矩阵 $[K]$ 。在(2.7)中矢量

$$\left. \begin{aligned} \{F\} &= \{R_1 \ R_2 \ R_3 \ M_{n_1 l_1} \ M_{n_2 l_2} \ M_{n_3 l_3}\}^T \\ \{\delta\} &= \{w_1 \ w_2 \ w_3 \ \theta_{n_1} \ \theta_{n_2} \ \theta_{n_3}\}^T \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

l_i 为单元第 i 个边的边长。由(2.7)~(2.8)获得的单刚矩阵 $[K]$ 具有正定对称性质。

现给出单刚矩阵 $[K]$ 的详细推导。 w 采用完全二次多项式作形函数, 它满足方程(2.3), 可得

$$w = \sum_{i=1}^3 \phi_i w_i + \sum_{i=1}^3 \bar{\phi}_i \theta_{n_i}$$

$$\left. \begin{aligned} \phi_i &= L_i^2 + \left(\frac{l_i}{l_j} \cos \alpha_j \right) L_i L_k + \left(\frac{l_i}{l_j} \cos \alpha_k \right) L_i L_j + \left(\frac{l_i}{l_k} \cos \alpha_j + \frac{l_i}{l_j} \cos \alpha_k \right) L_i L_k \\ \bar{\phi}_i &= (2A/l_i)(L_i^2 - L_i) \quad i, j, k \text{ 为循环指标} \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

式中 L_i 为三角形面积坐标, α_j 是三角形第 j 角的夹角。利用(2.5)式可得

$$M_n = -D_e \sum_{i=1}^3 \left[\left(\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial n^2} + \nu_e \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial s^2} \right) w_i + \frac{\partial^2 \bar{\phi}_i}{\partial n^2} \theta_{n_i} \right]$$

$$M_{ns} = -D_e (1 - \nu_e) \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial n \partial s} w_i \quad (2.10)$$

式中 n 和 s 分别表示单元边界上外法线和切线方向 (逆时针为正) 的单位矢量。我们可以求出(2.10)中的

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi_u}{\partial n_i^2} &= \sum_{n=1}^3 \sum_{m=1}^3 \left[\frac{1}{4A^2 l_i^2} (b_i b_n + a_i a_n) (b_m b_i + a_m a_i) \right] \frac{\partial^2 \phi_u}{\partial L_m \partial L_n} \\ \frac{\partial^2 \phi_u}{\partial s_i^2} &= \sum_{n=1}^3 \sum_{m=1}^3 \left[\frac{1}{4A^2 l_i^2} (b_n a_i - a_n b_i) (b_m a_i + a_m b_i) \right] \frac{\partial^2 \phi_u}{\partial L_m \partial L_n} \\ \frac{\partial^2 \phi_u}{\partial n_i \partial s_i} &= \sum_{n=1}^3 \sum_{m=1}^3 \left[-\frac{1}{4A^2 l_i^2} (b_n a_i - a_n b_i) (b_m b_i + a_m a_i) \right] \frac{\partial^2 \phi_u}{\partial L_m \partial L_n} \\ \frac{\partial^2 \phi_u}{\partial n_i^2} &= \frac{l_i}{A}, \quad \frac{\partial^2 \bar{\phi}_u}{\partial s_i^2} = \frac{\partial^2 \phi_u}{\partial n_i \partial s_i} = 0 \quad \left(\begin{array}{l} i=1, 2, 3 \\ u=1, 2, 3 \end{array} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

这里 n_i 和 s_i 分别表示三角形第 i 边的法线和切向方向单位矢量。记号

$$\left. \begin{aligned} b_j &= y_k - y_i \\ a_j &= x_i - x_k \end{aligned} \right\} \quad i, j, k \text{ 为循环指标} \quad (2.12)$$

x_i 和 y_i 表示第 i 个角点的坐标。根据(2.7)式, 把角点和边中点坐标代入(2.5), 再利用(2.9~2.12), 即可求出单刚矩阵 $[K]$ 。总刚和载荷的合成, 边界条件处理和代数方程组与一般有限元法相同。应当指出, 合成总刚时, 应按(2.6)式对单刚矩阵有关 θ_{n_i} 和 M_{n_i} 的项进行叠加。

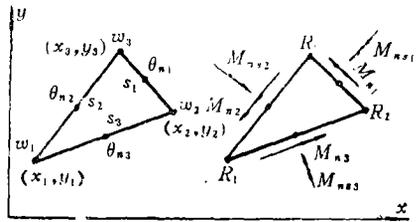


图1 三角形6自由度板单元

三、收敛性证明

我们把(2.1)和(2.3)写成算子形式

$$Bw = q(x, y), \quad \bar{B}_e \bar{w} = 0 \quad \text{在 } \Omega_e \text{ 上} \quad (3.1)$$

这里 \bar{w} 表示用本文的方法求得的近似解。因 B 和 \bar{B}_e 是线性算子，因此内积

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} (\varphi, Bw - \bar{B}\bar{w}) &= \lim_{N \rightarrow \infty} (\varphi, Bw - \sum_e \bar{B}_e \bar{w}) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_e \left(\int_{\Omega_e} \varphi q(x, y) d\Omega_e - \sum_{i=1}^3 \frac{1}{3} \varphi_i q_e A \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

φ_i 表示函数 φ 在第 i 个角点取值， $\varphi \in W_2^{(2)}(\Omega)$ ， $W_2^{(2)}$ 为索伯列夫空间。利用分部积分，并注意 \bar{w} 为二次多项式，我们得到

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} (\varphi, Bw - \bar{B}\bar{w}) &= \lim_{N \rightarrow \infty} (B^* \varphi, w - \bar{w}) \\ &+ \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_e \int_{\partial \Omega_e} \left[-\varphi \left(Q_n + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial n} (M_n - \bar{M}_n) - M_n^* (\theta_n - \bar{\theta}_n) \right. \\ &+ \left. \left(Q_n^* + \frac{\partial M_{ns}^*}{\partial s} \right) (w - \bar{w}) \right] ds + \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_e \sum_{i=1}^3 [\varphi_i (R_i - \bar{R}_i) + (w_i - \bar{w}_i) R_i^*] \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left((B^*, w - \bar{w}) + \sum_e \int_{\partial \Omega_e} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial n} (M_n - \bar{M}_n) - M_n^* (\theta_n - \bar{\theta}_n) \right] ds \right) \\ &+ \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_e \sum_{i=1}^3 \left(\varphi_i \left[\left(R_i - \frac{l_j}{2} \left(Q_{nj} + \frac{\partial M_{nsj}}{\partial s_j} \right)_i - \frac{l_k}{2} \left(Q_{nk} + \frac{\partial M_{nsk}}{\partial s_k} \right)_i \right) - \bar{R}_i \right] \right. \\ &+ \left. (w_i - \bar{w}_i) \left[R_i^* - \frac{l_j}{2} \left(Q_{nj}^* + \frac{\partial M_{nsj}^*}{\partial s_j} \right)_i - \frac{l_k}{2} \left(Q_{nk}^* + \frac{\partial M_{nsk}^*}{\partial s_k} \right)_i \right] \right) \\ &= 0 \quad i, j, k \text{ 是循环指标} \end{aligned} \quad (3.3)$$

式中 M_n^* ， M_{ns}^* ， Q_n^* 和 R_i^* 分别表示以 φ 代替 w 所求得的 M_n ， M_{ns} ， Q_n 和 R_i ，并假定 M_n^* 和 $Q_n^* + \partial M_{ns}^* / \partial s$ 在单元边界上连续，共轭算子 $B^* = B$ ，符号 $(Q_{nj} + \partial M_{nsj} / \partial s_j)_i$ 表示单元第 j 边上的 $(Q_n + \partial M_{ns} / \partial s)$ 在第 i 角点上的值， $\partial \Omega_e$ 是单元的边界。利用连续条件，已知的边界条件和角点条件，并让未知边界条件对应的共轭边界条件为零，则可得

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (B^* \varphi, w - \bar{w}) = 0 \quad (3.4)$$

根据 Hilbert 一伴随算子的逆定理，当 B 在给定的边界条件有逆算子 B^{-1} 存在时， B^* 在零共轭边界条件下也有逆 $(B^*)^{-1}$ ，特别地当

$$B^* \varphi = w - \bar{w} \quad (3.5)$$

时，有唯一解 $\varphi \in W_2^{(2)}(\Omega)$ ，使 M_n^* 和 $Q_n^* + \partial M_{ns}^* / \partial s$ 在单元边界上连续。因此我们有

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (w - \bar{w})^2 d\Omega = 0 \quad (3.6)$$

在子空间 $\Omega - \Omega_e$ 中, 利用(3.6), 连续条件, 边界已知条件及未知边界条件对应的零共轭边界条件, 可得

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega - \Omega_e} (\varphi, Bw - \bar{B}\bar{w}) d\Omega + O(\Delta A) \\ &= \int_{\partial\Omega_e} \left[\frac{\partial\varphi}{\partial n} (M_n - \bar{M}_n) - M_{ni}^* (\theta_n - \bar{\theta}_n) \right] ds - \sum_{i=1}^3 \left(\varphi_i \left[R_i - \frac{l_j}{2} \left(Q_{nj} + \frac{\partial M_{n sj}}{\partial s_j} \right)_i \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{l_k}{2} \left(Q_{nk} + \frac{\partial M_{n sk}}{\partial s_k} \right)_i - \bar{R}_i \right] + (w_i - \bar{w}_i) \left[R_i^* - \frac{l_j}{2} \left(Q_{nj}^* + \frac{\partial M_{n sj}^*}{\partial s_j} \right)_i \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{l_k}{2} \left(Q_{nk}^* + \frac{\partial M_{n sk}^*}{\partial s_k} \right)_i \right] + O_1(\Delta s_{\max}^2) \right) \\ &= \sum_{i=1}^3 \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n} \right)_i (M_{ni} - \bar{M}_{ni}) l_i - M_{ni}^* (\theta_{ni} - \bar{\theta}_{ni}) l_i \right] - \varphi_i \left[R_i - \frac{l_j}{2} \left(Q_{nj} + \frac{\partial M_{n sj}}{\partial s_j} \right)_i \right. \\ & \quad \left. - \frac{l_k}{2} \left(Q_{nk} + \frac{\partial M_{n sk}}{\partial s_k} \right)_i - \bar{R}_i \right] + (w_i - \bar{w}_i) \left[R_i^* - \frac{l_j}{2} \left(Q_{nj}^* + \frac{\partial M_{n sj}^*}{\partial s_j} \right)_i \right. \\ & \quad \left. - \frac{l_k}{2} \left(Q_{nk}^* + \frac{\partial M_{n sk}^*}{\partial s_k} \right)_i \right] + O_2(\Delta s_{\max}^2) = 0 \quad i, j, k \text{ 是循环指标} \quad (3.7) \end{aligned}$$

这里 e 是 Ω 中任意的一个单元, 因 $\varphi, (\partial\varphi/\partial n)_i, M_{ni}^*$ 和

$$\left[R_i^* - \frac{l_j}{2} \left(Q_{nj}^* + \frac{\partial M_{n sj}^*}{\partial s_j} \right)_i - \frac{l_k}{2} \left(Q_{nk}^* + \frac{\partial M_{n sk}^*}{\partial s_k} \right)_i \right]$$

的任意性, 从(3.7)我们可以得到

$$\left. \begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \bar{w}_i &= w_i, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \bar{R}_i = R_i - \frac{l_j}{2} \left(Q_{nj} + \frac{\partial M_{n sj}}{\partial s_j} \right)_i - \frac{l_k}{2} \left(Q_{nk} + \frac{\partial M_{n sk}}{\partial s_k} \right)_i \\ & \quad \text{在单元角点 } i \text{ 上} \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \bar{\theta}_{ni} &= \theta_{ni}, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \bar{M}_{ni} = M_{ni} \\ & \quad \text{在单元边中点 } i \text{ 上} \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

\bar{w}_i 和 \bar{R}_i 在角点上有二阶收敛精度, $\bar{\theta}_{ni}$ 和 \bar{M}_{ni} 在边中点上一阶精度。

如果令 $\varphi = w - \bar{w}$, 因 B 是正定算子, 很容易证明

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|w - \bar{w}\|_{W_2^1(\Omega)} = 0 \quad (3.9)$$

即 \bar{w} 在 $W_2^1(\Omega)$ 空间中收敛于精确解。

四、算 例

算例1 一个边长为 a 在均布载荷 q 作用下的简支板, 见图2. 由于对称, 我们取 $1/4$ 板进行计算. 网格划分取 2×2 和 6×6 . 板的挠度、转角、弯矩和角点集中力计算结果在表1和表2中

给出。由计算结果可以看出 w 和 R_i 有二阶收敛精度， M_n 和 θ_n 有一阶收敛精度，证明了本文理论的正确性。

算例2 一个变厚度悬臂薄板如图3所示，它的弹性模量 $E=2.1 \times 10^7 \text{N/cm}^2$ ，泊松比 $\nu=0.3$ ，受均布载荷 $q=10 \text{N/cm}^2$ 作用。它的精确解为

$$w=2.184 \times 10^{-2} [(100-x) \ln 100] + x(\ln x - x)]$$

由于对称，本文仅取宽度为 b 的板条进行计算，网格取 $2 \times 8 (b=5)$ 和 $2 \times 16 (b=2.5)$ 。计算的挠度 w 和弯矩 M_x 值列于表3。利用公式(3.8)计算得到的沿 x 方向分布的剪力 Q_x 也列于表3，并和精确解作了比较。

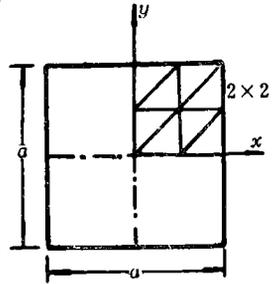


图2 均布载荷作用下的方板

表1 均布载荷下简支方板的挠度 ($y=0$)

x/a		0	0.0833	0.1667	0.25	0.3333	0.4167	0.5	$x/a=0.25$ $y/a=0.25$
$100wD/qa^4$	2×2	0.5127 (26%)			0.3710 (26%)			0	0.2779 (30%)
	6×6	0.4175 (2.8%)	0.4043	0.3655	0.3022 (2.9%)	0.2169	0.1138	0	0.2205 (3.4%)
	精确解[11]	0.4062	0.3935	0.3556	0.2938	0.2107	0.1104	0	0.2132

表2 均布载荷下简支方板的转角、弯矩和角点集中力

x/a		0.0417	0.125	0.2083	0.2917	0.375	0.4583	R/qa^2 ($x=a/2, y=a/2$)
$10M_y/qa^2$	2×2		0.4458 (0.51%)			0.2224 (8.29%)		0.04794 (26%)
	6×6	0.4759	0.4472 (0.2%)	0.3926	0.3129	0.2102 (2.37%)	0.09086	0.06268 (3.5%)
	精确解[11]	0.4754	0.4481	0.3936	0.3124	0.2053	0.07406	0.065
$-10^3\theta_n D/qa^4$	2×2		0.7617 (6.3%)			0.3593 (3.92%)		
	6×6	0.8616	0.8064 (0.82%)	0.6990	0.5437	0.3490 (0.955%)	0.1281	
	精确解[11]	0.8690	0.8132	0.7037	0.5451	0.3457	0.1186	

算例3 一个变厚度在简支边界条件下的圆板如图4所示。我们分别计算了在均布载荷 q 和圆心处受集中载荷 P 作用下的挠度和径向弯矩。由于对称，取圆板的1/8进行分析，网格划分如图5所示。表4给出了挠度 w 和径向弯矩 M_r 的计算结果。这里泊松比 $\nu(x,y)=0.25$ ，圆板的半径为 a 。

从以上三个算例可以看出，由本文的方法计算的结果是满意的，并收敛于精确解，表明了本文理论的正确性。

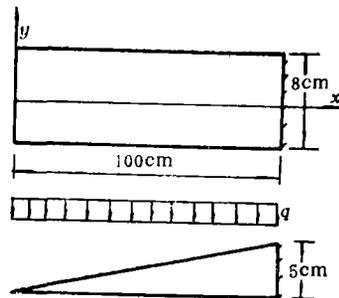


图3 变厚度悬臂薄板

表 3 变厚度悬臂薄板的挠度, 弯矩和剪力分布

x		0	12.5	25	37.5	50	62.5	75	87.5	100
w	2×8 ($b=5$)	2.38	1.4	0.91	0.58	0.347	0.185	0.0792	0.0198	0
	2×16 ($b=2.5$)	2.29	1.36	0.89	0.567	0.339	0.180	0.0760	0.0184	0
	精确解	2.18	1.343	0.881	0.562	0.335	0.177	0.0748	0.0178	0
M_x	2×8	0	65.1	299	690	1237	1940	2799	3815	4987
	精确解	0	78.1	312	703	1250	1953	2813	3828	5000
Q_x	2×8	0	12.48	24.99	37.48	49.84	62.62	74.96	87.64	99.98
	精确解	0	12.5	25	37.5	50	62.5	75	87.5	100

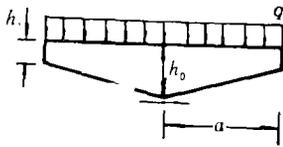


图4 简支变厚度圆板

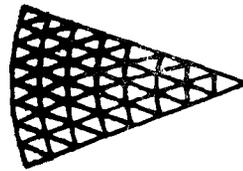


图5 圆板网格的划分

表 4 非均匀变厚度圆板的计算结果

h_0/h_1		1.00		1.50		2.33	
		本文解	精确解[11]	本文解	精确解[11]	本文解	精确解[11]
均布载荷 q	$wEh_0^3/qa^4 (r=0)$	0.752	0.738	1.287	1.260	2.12	2.04
	$M_r/qa^2 (r=0)$	0.203	0.203	0.248	0.257	0.292	0.304
	$M_r/qa^2 (r=a/2)$	0.152	0.154	0.177	0.166	0.198	0.196
集中载荷 P	$wEh_0^3/Pa^2 (r=0)$	0.604	0.582	0.957	0.930	0.146	0.139
	$M_r/P (r=a/2)$	0.0701	0.069	0.088	0.088	0.104	0.102

参 考 文 献

- [1] Cowper, G. R., E. Kosko, G. M. Lindberg and M. D. Olson, Statics and dynamics of high-precision triangular plate bending element, *AIAA Journal*, 7(10) (1969), 1957.
- [2] Argyris, J. H. and K. E. Buck, A sequel to technical note 14 on the TUBA family of plate element, *Aeronautical Journal*, 72 (1968), 977.
- [3] Irons, B. M., A conforming quartic triangular element for plate bending, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1(1) (1969), 29.
- [4] Hermmann, L. R., A bending analysis for plates, AD 646300 (1966), 577.
- [5] Hermmann, L. R., Finite element bending analysis for plates, *Journal of the Engineering Mechanics Division, Proceedings of the ASCE*, 93 (EM5) (1967), 13.
- [6] Morley, L. S. D., On the constant moment plate bending element, *Journal of Strain Analysis*, 6(1) (1971), 20.
- [7] Zienkiewicz, O. C., *The Finite Element Method*, 3rd Ed., McGraw-Hill Book Company (1977).
- [8] Irons, B. and S. Ahmad, *Techniques of Finite Elements*, Ellis Horwood, Ltd.,

- Chichester, UK (1979).
- [9] 叶开沅, 非均匀变厚度弹性力学的若干问题的一般解, *IV*. 非均匀变厚度梁的弯曲、稳定 和自由振动, 兰州大学学报, 力学专号, (1) (1979), 133—157.
- [10] 纪振义、叶开沅, 任意变系数微分方程的精确解析法, 应用数学和力学, 10 (10) (1989), 841—852.
- [11] Timoshenko, S. and S. Woinowsky-Krieger, *Theory of Plates and Shells*, 2nd Ed., McGraw-Hill Book Company, Inc. (1959).

An Exact Element Method for Bending of Nonhomogeneous Thin Plates

Ji Zhen-yi

(Anhui Architectural Industry College, Hefei)

Yeh Kai-yuan

(Lanzhou University, Lanzhou)

Abstract

In this paper, based on the step reduction method, a new method, the exact element method for constructing finite element, is presented. Since the new method doesn't need the variational principle, it can be applied to solve non-positive and positive definite partial differential equations with arbitrary variable coefficient. By this method, a triangle noncompatible element with 6 degrees of freedom is derived to solve the bending of nonhomogeneous plate. The convergence of displacements and stress resultants which have satisfactory numerical precision is proved. Numerical examples are given at the end of this paper, which indicate satisfactory results of stress resultants and displacements can be obtained by the present method.

Key words algorithm, nonhomogeneous thin plate, bending, exact element method