应用数学和力学，第13卷第9期（1992年9月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

变质量非完整非保守系统相对于非惯性系的最小作用量原理*

罗绍凯　　梅凤翔

（河南商丘师专）　（北京理工大学）

（汪家訸推荐，1991年11月9日收到）

摘　要

本文求得变质量非完整非保守系统相对于非惯性系的广义最小作用量原理，推证其Hölder形式与Cycлoв形式的等价性．最后，用求得的相应系统的最小作用量原理建立其运动微分方程．

关键词　分析力学　变质量系统　非完整约束　非惯性参考系　变分法　最小作用量原理

一、引　言

1744年，P.-L. de Maupertuis为了用微粒学说来理解光的本性，他用一个质点的运动来解释光学中著名的Fermat原理，得到单个质点的最小作用量原理；后来，L. Euler证明了该原理对于质点在有心力场中的动运也是成立的；1760年，J.-L. Lagrange把该原理推广到任意个自由度保守系统，并给出了严格证明[1]．1966年，B. C. Новоселов把该原理推广到非完整保守系统[2]，V. V. Rumiantsev于1979年对其结果做了进一步研究[3]．1986年，J. G. Papastavridis提出了完整非保守系统的最小作用量原理，并用于非线性振动问题的近似解法[4]．1990年，梅凤翔给出了非完整非保守系统的最小作用量原理，结果具有一般意义[5]．

本文目的探求变质量非完整非保守系统相对于非惯性系的最小作用量原理，同时给出Hölder形式和Cycлoв形式，可以证明这两种形式是等价的．最后，用求得的相应系统的最小作用量原理建立其运动微分方程．

二、广义最小作用量原理的建立

2.1　变质量系统相对于非惯性系的D'Alembert原理

研究n个变质量质点构成的力学系统相对于非惯性系$Oxyz$的运动．非惯性系与大质量物体固连，其相对于某惯性系的平动加速度$\mathbf{a}_0$、角速度$\boldsymbol{\omega}$和角加速度$\boldsymbol{\varepsilon}$都是时间t的已知函数，

* 国家自然科学基金资助课题．

与诸质点的运动无关。第i个质点相对于非惯性系原点O的位矢为$\mathbf{r}_i$，所受主动力和约束反力分别为$\mathbf{F}_i$和$\mathbf{N}_i$，牵连惯性力和科里奥利力

$$\mathbf{F}_{ei}=-m_i[\mathbf{a}_0+\boldsymbol{\varepsilon}\times\mathbf{r}_i+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_i)],\qquad \mathbf{F}_{ci}=-2m_i\boldsymbol{\omega}\times\dot{\mathbf{r}}_i$$

在理想约束条件下$\sum_{i=1}^{n}\mathbf{N}_i\cdot\delta\mathbf{r}_i=0$，系统相对于非惯性系的运动满足D'Alembert原理

$$\sum_{i=1}^{n}(-m_i\ddot{\mathbf{r}}_i+\mathbf{F}_i+\mathbf{F}_{ei}+\mathbf{F}_{ci}+\mathbf{R}_i)\cdot\delta\mathbf{r}_i=0,\qquad \mathbf{R}_i=\dot{m}_i\mathbf{u}_i \tag{2.1}$$

$\mathbf{u}_i$为质量微元dm_i分离或并入i质点的相对速度，$\mathbf{R}_i$为作用于i质点的反推力。

把主动力分为保守力和非保守力，有

$$\sum_{i=1}^{n}\mathbf{F}_i\cdot\frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha}=-\frac{\partial V}{\partial q_\alpha}+Q_\alpha(q_\alpha,\ \dot{q}_\alpha,\ t)$$

$q_\alpha(\alpha=1,\ 2,\ \cdots,\ s)$为确定系统位形的非惯性系中的广义坐标。引入广义迴转惯性力$Q_\alpha^{\varepsilon}=-\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{\varepsilon}\times m_i\mathbf{r}_i)\cdot\frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha}$[1)]，广义陀螺力$\Gamma_\alpha=-\sum_{\beta=1}^{s}\sum_{i=1}^{n}2m_i\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\left(\frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_\beta}\times\frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha}\right)\dot{q}_\beta$，平动惯性力场势能$V^0=\sum_{i=1}^{n}m_i\mathbf{a}_0\cdot\mathbf{r}_i$和惯性离心势能$V^\omega=-\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot[I_O]\cdot\boldsymbol{\omega}$，其中$[I_O]$为系统相对于非惯性系原点$O$的惯量张量。

设质点的质量为q_α，$\dot{q}_\alpha$和时间t的函数

$$m_i=m_i(q_\alpha,\ \dot{q}_\alpha,\ t)\qquad (i=1,2,\cdots,n;\ \alpha=1,2,\cdots,s) \tag{2.2}$$

用δ^*、$\varDelta/\varDelta(\cdots)$分别表示把质量当作常量时的等时变分记号和偏导数记号[6]，令$T_r=\sum_{i=1}^{n}m_i\dot{\mathbf{r}}_i\cdot\dot{\mathbf{r}}_i/2$为变质量系统的相对运动动能，容易证明

$$\frac{\varDelta T_r}{\varDelta q_\alpha}=\sum_{i=1}^{n}m_i\dot{\mathbf{r}}_i\cdot\frac{\partial\dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_\alpha},\qquad \frac{\varDelta T_r}{\varDelta\dot{q}_\alpha}=\sum_{i=1}^{n}m_i\dot{\mathbf{r}}_i\cdot\frac{\partial\dot{\mathbf{r}}_i}{\partial\dot{q}_\alpha}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\varDelta T_r}{\varDelta\dot{q}_\alpha}=\sum_{i=1}^{n}m_i\ddot{\mathbf{r}}_i\cdot\frac{\partial\dot{\mathbf{r}}_i}{\partial\dot{q}_\alpha}+\sum_{i=1}^{n}m_i\dot{\mathbf{r}}_i\cdot\frac{d}{dt}\frac{\partial\dot{\mathbf{r}}_i}{\partial\dot{q}_\alpha}+\sum_{i=1}^{n}\dot{m}_i\dot{\mathbf{r}}_i\cdot\frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha}$$

$$\frac{\partial\dot{\mathbf{r}}_i}{\partial\dot{q}_\alpha}=\frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha},\qquad \frac{\partial\dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_\alpha}=\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha}$$

利用以上关系式，由(2.1)得到变质量力学系统相对于非惯性系的广义坐标下的D'Alembert原理

$$\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\varDelta T_r}{\varDelta q_\alpha}-\frac{d}{dt}\frac{\varDelta T_r}{\varDelta\dot{q}_\alpha}+Q_\alpha+Q_\alpha^{\varepsilon}+\Gamma_\alpha+\Phi_\alpha\right)\delta q_\alpha-\delta^*(V+V^0+V^\omega)=0 \tag{2.3}$$

---

1) 上角ε为黑体。

$$\Phi_\alpha=\sum_{i=1}^{n}\dot{m}_i(\mathbf{u}_i+\dot{\mathbf{r}}_i)\cdot\frac{\partial\mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \tag{2.4}$$

2.2 变质量系统相对于非惯性系一般形式的最小作用量原理

定义一个特殊的全变分记号

$$\Delta^*(\cdots)\triangleq\delta^*(\cdots)+\frac{d}{dt}(\cdots)\Delta t \tag{2.5}$$

并计算Δ^*对变质量系统在非惯性系中的作用量

$$W_r=\int_{t_0}^{t_1}2T_r dt \tag{2.6}$$

有

$$\Delta^*W_r=\Delta^*\int_{t_0}^{t_1}2T_r dt=\int_{t_0}^{t_1}\delta^*(2T_r)dt+(2T_r\Delta t)\Big|_{t_0}^{t_1} \tag{2.7}$$

而

$$\delta^*T_r=\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\varPi T_r}{\varPi q_\alpha}-\frac{d}{dt}\frac{\varPi T_r}{\varPi\dot{q}_\alpha}\right)\delta q_\alpha+\frac{d}{dt}\left(\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\varPi T_r}{\varPi\dot{q}_\alpha}\delta q_\alpha\right)$$

$$+\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\varPi T_r}{\varPi\dot{q}_\alpha}\left(\delta\dot{q}_\alpha-\frac{d}{dt}\delta q_\alpha\right)$$

把(2.3)代入上式，得

$$\delta^*T_r=\delta^*(V+V^0+V^\omega)-\sum_{\alpha=1}^{s}(Q_\alpha+Q_\alpha^s+\Gamma_\alpha+\Phi_\alpha)\delta q_\alpha$$

$$+\frac{d}{dt}\left(\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\varPi T_r}{\varPi\dot{q}_\alpha}\delta q_\alpha\right)+\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\varPi T_r}{\varPi\dot{q}_\alpha}\left(\delta\dot{q}_\alpha-\frac{d}{dt}\delta q_\alpha\right)$$

令一般非惯性系中的机械能为$E_r=T_r+V+V^0+V^\omega$，有

$$\delta^*(2T_r)=\delta^*E_r+\delta^*T_r-\delta^*(V+V^0+V^\omega)$$

$$=\delta^*E_r-\sum_{\alpha=1}^{s}(Q_\alpha+Q_\alpha^s+\Gamma_\alpha+\Phi_\alpha)\delta q_\alpha+\frac{d}{dt}\left(\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\varPi T_r}{\varPi\dot{q}_\alpha}\delta q_\alpha\right)$$

$$+\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\varPi T_r}{\varPi\dot{q}_\alpha}\left(\delta\dot{q}_\alpha-\frac{d}{dt}\delta q_\alpha\right) \tag{2.8}$$

把(2.8)代入(2.7)，得

$$\Delta^*W_r=\int_{t_0}^{t_1}\left\{\delta^*E_r-\sum_{\alpha=1}^{s}(Q_\alpha+Q_\alpha^s+\Gamma_\alpha+\Phi_\alpha)\delta q_\alpha\right\}dt+\int_{t_0}^{t_1}\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\varPi T_r}{\varPi\dot{q}_\alpha}\left(\delta\dot{q}_\alpha-\frac{d}{dt}\delta q_\alpha\right)dt$$

$$+\left(\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\varPi T_r}{\varPi\dot{q}_\alpha}\delta q_\alpha+2T_r\Delta t\right)\Big|_{t_0}^{t_1} \tag{2.9}$$

至此为止，我们对于系统所受约束的性质、可比较轨道的端点条件以及d与δ之间运算

的交换关系并未施加任何的限制，(2.9)式具有一般意义。

假设系统所受约束相对于非惯性系是定常的，且有

$$\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\varPi T_r}{\varPi \dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha=2T_r \tag{2.10}$$

再对(2.9)增添端点条件

$$(\Delta q_\alpha)|_{t_0}=(\Delta q_\alpha)|_{t_1}=0 \tag{2.11}$$

把(2.10)、(2.11)代入(2.9)，便得

$$\Delta^* W_r-\int_{t_0}^{t_1}\left\{\delta^* E_r-\sum_{\alpha=1}^{s}(Q_\alpha+Q_\alpha^\varepsilon+\Gamma_\alpha+\Phi_\alpha)\delta q_\alpha\right\}dt$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\varPi T_r}{\varPi \dot{q}_\alpha}\left(\frac{d}{dt}\delta q_\alpha-\delta\dot{q}_\alpha\right)dt=0 \tag{2.12}$$

这便是变质量力学系统相对于非惯性系的一般形式的广义最小作用量原理。

如果考虑系统受到不同的约束，从(2.12)便可得到相应的广义最小作用量原理。

三、广义最小作用量原理的Hölder形式和Суслов形式

3.1 广义最小作用量原理的Hölder形式

设系统受有g个理想非完整约束

$$f_\rho(q_\alpha,\ \dot{q}_\alpha,\ t)=0 \qquad (\rho=1,2,\cdots,g;\ \alpha=1,2,\cdots,s) \tag{3.1}$$

或

$$\dot{q}_{\varepsilon+\rho}=\varphi_\rho(q_\alpha,\ \dot{q}_\sigma,\ t) \qquad (\rho=1,2,\cdots,g;\ \sigma=1,2,\cdots,\varepsilon;\ \varepsilon=s-g) \tag{3.2}$$

并设约束(3.2)对相对虚位移的限制满足Четаев定义

$$\delta q_{\varepsilon+\rho}=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial\varphi_\rho}{\partial\dot{q}_\sigma}\delta q_\sigma \tag{3.3}$$

按照d，δ运算交换性的Hölder观点[2],[7]

$$\delta\dot{q}_\alpha=\frac{d}{dt}\delta q_\alpha \qquad (\alpha=1,2,\cdots,s) \tag{3.4}$$

在此观点下，变更轨道不满足约束方程，即有

$$\delta f_\rho\neq 0 \qquad (\rho=1,2,\cdots,g)$$

把(3.4)代入(2.12)，得到变质量非完整非保守系统相对于非惯性系的 Hölder 形式的最小作用量原理

$$\Delta^* W_r-\int_{t_0}^{t_1}\left\{\delta^* E_r-\sum_{\alpha=1}^{s}(Q_\alpha+Q_\alpha^\varepsilon+\Gamma_\alpha+\Phi_\alpha)\delta q_\alpha\right\}dt=0 \tag{3.5}$$

3.2 广义最小作用量原理的Суслов形式

如果按照d，δ运算交换关系的Суслов观点[2],[7]

$$\left.\begin{aligned}&\delta\dot{q}_\sigma=\frac{d}{dt}\delta q_\sigma \qquad (\sigma=1,2,\cdots,\varepsilon)\\&\delta\dot{q}_{\varepsilon+\rho}=\frac{d}{dt}\delta q_{\varepsilon+\rho}-\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}T_\sigma^{\varepsilon+\rho}\delta q_\sigma \qquad (\rho=1,2,\cdots,g)\\&T_\sigma^{\varepsilon+\rho}=\frac{d}{dt}\frac{\partial\varphi_\rho}{\partial\dot{q}_\sigma}-\frac{\partial\varphi_\rho}{\partial q_\sigma}-\sum_{\nu=1}^{g}\frac{\partial\varphi_\rho}{\partial q_{\varepsilon+\nu}}\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial\dot{q}_\sigma}\end{aligned}\right\} \tag{3.6}$$

在此观点下，变更轨道满足约束方程，即有

$$\delta f_\rho=0 \qquad (\rho=1,2,\cdots,g)$$

把(3.6)代入(2.12)，得到变质量非完整非保守系统相对于非惯性系的Суслов形式的最小作用量原理

$$\Delta^* W_r-\int_{t_0}^{t_1}\left\{\delta^* E_r-\sum_{\alpha=1}^{s}(Q_\alpha+Q_\alpha^\varepsilon+\Gamma_\alpha+\Phi_\alpha)\delta q_\alpha\right\}dt$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\varDelta T_r}{\varDelta\dot{q}_{\varepsilon+\rho}}\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}T_\sigma^{\varepsilon+\rho}\delta q_\sigma dt=0 \tag{3.7}$$

3.3 Hölder形式与Суслов形式等价性的证明

令$\delta^* T_r^H$表示Hölder意义下的$\delta^* T_r$，$\delta^* T_r^c$表示Суслов意义下的$\delta^* T_r$，可把(3.5)、(3.7)分别改写为

$$\int_{t_0}^{t_1}\left\{\delta^* T_r^H-\delta^*(V+V^0+V^\omega)+\sum_{\alpha=1}^{s}(Q_\alpha+Q_\alpha^\varepsilon+\Gamma_\alpha+\Phi_\alpha)\delta q_\alpha\right\}dt+(2T_r\Delta t)\Big|_{t_0}^{t_1}=0 \tag{3.8}$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\left\{\delta^* T_r^c-\delta^*(V+V^0+V^\omega)+\sum_{\alpha=1}^{s}(Q_\alpha+Q_\alpha^\varepsilon+\Gamma_\alpha+\Phi_\alpha)\delta q_\alpha\right\}dt$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\sum_{\rho=1}^{g}\frac{\varDelta T_r}{\varDelta\dot{q}_{\varepsilon+\rho}}\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}T_\sigma^{\varepsilon+\rho}\delta q_\sigma dt+(2T_r\Delta t)\Big|_{t_0}^{t_1}=0 \tag{3.9}$$

因为

$$\delta^* T_r^c=\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\varDelta T_r}{\varDelta q_\alpha}\delta q_\alpha+\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\varDelta T_r}{\varDelta\dot{q}_\sigma}\frac{d}{dt}\delta q_\sigma+\sum_{\rho=1}^{g}\frac{\varDelta T_r}{\varDelta\dot{q}_{\varepsilon+\rho}}\left(\frac{d}{dt}\delta q_{\varepsilon+\rho}-\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}T_\sigma^{\varepsilon+\rho}\delta q_\sigma\right)$$

于是

$$\delta^* T_r^c+\sum_{\rho=1}^{g}\frac{\varDelta T_r}{\varDelta\dot{q}_{\varepsilon+\rho}}\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}T_\sigma^{\varepsilon+\rho}\delta q_\sigma=\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\varDelta T_r}{\varDelta q_\alpha}\delta q_\alpha+\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\varDelta T_r}{\varDelta\dot{q}_{\varepsilon+\rho}}\frac{d}{dt}\delta q_{\varepsilon+\rho}=\delta^* T_r^H \tag{3.10}$$

即(3.8)等价于(3.9)，亦即(3.5)等价于(3.7)。

四、广义最小作用量原理的应用

下面应用我们得到的广义最小作用量原理来推导变质量非完整非保守系统相对于非惯性系的运动微分方程。

利用关系式(3.4)，原理(3.8)可改写为

$$\int_{t_0}^{t_1}\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\varPi L_r}{\varPi q_\alpha}-\frac{d}{dt}\frac{\varPi L_r}{\varPi \dot q_\alpha}+Q_\alpha+Q_\alpha^\varepsilon+\Gamma_\alpha+\Phi_\alpha\right)\delta q_\alpha dt+\left(\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\varPi T_r}{\varPi \dot q_\alpha}\delta q_\alpha+2T_r\Delta t\right)\Bigg|_{t_0}^{t_1}=0$$

其中 $L_r=T_r-(V+V^0+V^\omega)$为变质量系统相对于非惯性系的Lagrange函数[8]. 把(2.10)、(2.11)代入上式，便得

$$\int_{t_0}^{t_1}\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\varPi L_r}{\varPi q_\alpha}-\frac{d}{dt}\frac{\varPi L_r}{\varPi \dot q_\alpha}+Q_\alpha+Q_\alpha^\varepsilon+\Gamma_\alpha+\Phi_\alpha\right)\delta q_\alpha dt=0 \tag{4.1}$$

考虑非完整约束加在虚位移δq_α的条件

$$\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial f_\rho}{\partial \dot q_\alpha}\delta q_\alpha=0$$

利用 Lagrange 乘子方法的一贯逻辑，得到变质量非完整非保守系统相对于 非 惯 性 系 的 Routh型方程

$$\frac{d}{dt}\frac{\varPi L_r}{\varPi \dot q_\alpha}-\frac{\varPi L_r}{\varPi q_\alpha}=Q_\alpha+Q_\alpha^\varepsilon+\Gamma_\alpha+\Phi_\alpha+\sum_{\rho=1}^{g}\lambda_\rho\frac{\partial f_\rho}{\partial \dot q_\alpha}\qquad(\alpha=1,2,\cdots,s) \tag{4.2}$$

(4.2)等价于文献[9]中“全凝固导数”的结果。

类似地，注意到约束关系 (3.3)，由原理 (3.9) 可以得到变质量非完整非保守系统相对于非惯性系的Maggi型方程

$$\frac{d}{dt}\frac{\varPi L_r}{\varPi \dot q_\sigma}-\frac{\varPi L_r}{\varPi q_\sigma}+\sum_{\rho=1}^{g}\left(\frac{d}{dt}\frac{\varPi L_r}{\varPi \dot q_{\varepsilon+\rho}}-\frac{\varPi L_r}{\varPi q_{\varepsilon+\rho}}\right)\frac{\partial \varphi_\rho}{\partial \dot q_\sigma}=\tilde Q_\sigma+\tilde Q_\sigma^\varepsilon+\tilde\Gamma_\sigma+\tilde\Phi_\sigma$$

$$(\sigma=1,2,\cdots,\varepsilon) \tag{4.3}$$

其中

$$\widetilde{(\cdots)}_\sigma=(\cdots)_\sigma+\sum_{\rho=1}^{g}(\cdots)_{\varepsilon+\rho}\frac{\partial\varphi_\rho}{\partial \dot q_\sigma}.$$

方程(4.2)、(4.3)均属于“半凝固导数”形式，经变换后可以得到与其等价的“全凝固导数”形式和普通导数形式

$$\frac{D}{Dt}\frac{\varPi L_r}{\varPi \dot q_\alpha}-\frac{\varPi L_r}{\varPi q_\alpha}=Q_\alpha+Q_\alpha^\varepsilon+\Gamma_\alpha+\Psi_\alpha+\sum_{\rho=1}^{g}\lambda_\rho\frac{\partial f_\rho}{\partial \dot q_\alpha},\quad \Psi_\alpha=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{R}_i\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \tag{4.4}$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\frac{\partial L_r}{\partial \dot q_\alpha}-\frac{\partial L_r}{\partial q_\alpha}=Q_\alpha+Q_\alpha^\varepsilon+\Gamma_\alpha+P_\alpha+\sum_{\rho=1}^{g}\lambda_\rho\frac{\partial f_\rho}{\partial \dot q_\alpha}\\&P_\alpha=\sum_{i=1}^{n}\left\{(\mathbf{R}_i+\dot m_i\dot{\mathbf{r}}_i)\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha}-\frac{1}{2}\dot{\mathbf{r}}_i\cdot\dot{\mathbf{r}}_i\frac{\partial m_i}{\partial q_\alpha}+\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{\mathbf{r}}_i\cdot\dot{\mathbf{r}}_i\frac{\partial m_i}{\partial \dot q_\alpha}\right)\right\}\end{aligned}\right\} \tag{4.5}$$

$$\frac{D}{Dt}\frac{\varPi L_r}{\varPi \dot q_\sigma}-\frac{\varPi L_r}{\varPi q_\sigma}+\sum_{\rho=1}^{g}\left(\frac{D}{Dt}\frac{\varPi L_r}{\varPi \dot q_{\varepsilon+\rho}}-\frac{\varPi L_r}{\varPi q_{\varepsilon+\rho}}\right)\frac{\partial \varphi_\rho}{\partial \dot q_\sigma}=\tilde Q_\sigma+\tilde Q_\sigma^\varepsilon+\tilde\Gamma_\sigma+\tilde\psi_\sigma \tag{4.6}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L_r}{\partial \dot q_\sigma}-\frac{\partial L_r}{\partial q_\sigma}+\sum_{\rho=1}^{g}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L_r}{\partial \dot q_{\varepsilon+\rho}}-\frac{\partial L_r}{\partial q_{\varepsilon+\rho}}\right)\frac{\partial \varphi_\rho}{\partial \dot q_\sigma}=\tilde Q_\sigma+\tilde Q_\sigma^\varepsilon+\tilde\Gamma_\sigma+\tilde P_\sigma\qquad(\sigma=1,2,\cdots,\varepsilon)$$

$$\tag{4.7}$$

五、讨论与结论

本文的主要新结果为(2.9)、(2.12)、(3.5)、(3.7)、(4.2)和(4.3)式。它们不仅适用于全部变质量的质点系统，也适用于部分变质量的质点系统。如果n个质点中仅有l个质点的质量$m_j(j=1,2,\cdots,l)$变化，$\mathbf{u}_i=0(i=1,2,\cdots,n-l)$，则有

$$\Phi_\alpha=\sum_{j=1}^{l}\dot{m}_j(\mathbf{u}_j+\dot{\mathbf{r}}_j)\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_\alpha},\quad \Psi_\alpha=\sum_{j=1}^{l}\dot{m}_j\mathbf{u}_j\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_\alpha},$$

$$P_\alpha=\sum_{j=1}^{l}\left\{(\mathbf{R}_j+\dot{m}_j\dot{\mathbf{r}}_j)\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_\alpha}-\frac{1}{2}\dot{\mathbf{r}}_j\cdot\dot{\mathbf{r}}_j\frac{\partial m_j}{\partial q_\alpha}+\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{\mathbf{r}}_j\cdot\dot{\mathbf{r}}_j\frac{\partial m_j}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)\right\},$$

$$T_r=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-l}m_i\dot{\mathbf{r}}_i\cdot\dot{\mathbf{r}}_i+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{l}m_j\dot{\mathbf{r}}_j\cdot\dot{\mathbf{r}}_j$$

这时，我们得到的广义最小作用量原理和运动微分方程仍保持原有的形式。

如果系统中各质点的质量均保持不变，则$\Phi=0$、$\delta^*=\delta$、$\Delta^*=\Delta$、$\text{Д}=\partial$，原理(3.5)和(3.7)成为

$$\Delta W_r-\int_{t_0}^{t_1}\left\{\delta E_r-\sum_{\alpha=1}^{s}(Q_\alpha+Q_\alpha^*+\Gamma_\alpha)\delta q_\alpha\right\}dt=0 \tag{5.1}$$

$$\Delta W_r-\int_{t_0}^{t_1}\left\{\delta E_r-\sum_{\alpha=1}^{s}(Q_\alpha+Q_\alpha^*+\Gamma_\alpha)\delta q_\alpha\right\}dt+\int_{t_0}^{t_1}\sum_{\rho=1}^{g}\frac{\partial T_r}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\rho}}\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}T_\sigma^{\varepsilon+\rho}\delta q_\sigma dt=0 \tag{5.2}$$

如果$Q_\alpha+Q_\alpha^*+\Gamma_\alpha+\Phi_\alpha=0$，且$f_\rho$对$\dot{q}_\alpha$是$k_\rho$阶齐次的或$\varphi_\rho$对$\dot{q}_\alpha$是一阶齐次的，则变质量非完整系统相对于非惯性系的运动存在能量积分

$$E_r=T_r+V+V^0+V^\omega=h=\text{const}$$

这时，原理(3.5)、(3.7)分别成为

$$\Delta^*W_r=0 \tag{5.3}$$

$$\Delta^*W_r+\int_{t_0}^{t_1}\sum_{\rho=1}^{g}\frac{{}^{**}\text{Д}T_r}{\text{Д}\dot{q}_{\varepsilon+\rho}}\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}T_\sigma^{\varepsilon+\rho}\delta q_\sigma dt=0 \tag{5.4}$$

值得注意，由于(5.3)变更轨道不满足约束方程，它并非稳定作用量原理；(5.4)虽然变更轨道满足约束方程，但它比稳定作用量原理多出一项，只有在

$$\sum_{\rho=1}^{g}\frac{\text{Д}T_r}{\text{Д}\dot{q}_{\varepsilon+\rho}}T_\sigma^{\varepsilon+\rho}=0$$

的条件下，(5.4)才是稳定作用量原理。

如果系统只受完整约束，则原理(3.5)和(3.7)成为

$$\Delta^*W_r-\int_{t_0}^{t_1}\left\{\delta^*E_r-\sum_{\alpha=1}^{s}(Q_\alpha+Q_\alpha^*+\Gamma_\alpha+\Phi_\alpha)\delta q_\alpha\right\}dt=0 \tag{5.5}$$

(5.5)虽然形式上与(3.5)式相同，但(5.5)式中$\delta q_\alpha(\alpha=1,2,\cdots,s)$是彼此独立的。

对于惯性参考系，有

$$\mathbf{a}_0=\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\varepsilon}=0,\quad T_r=T,\quad E_r=E,\quad W_r=W,$$
$$Q_\alpha^c=\Gamma_s=V^0=V^\omega=0$$

本文的广义最小作用量原理均化为惯性系形式.

文献[1～5]中的原理均可作为本文原理的推论.

感谢汪家诉教授的关心和帮助!

参 考 文 献

[1] 汪家诉，分析力学，高等教育出版社 (1982)，192—195.

[2] Новоселов В. С., *Вариационые Методы В Механике*, ЛГУ (1966), 26, 54.

[3] Rumiantsev V. V., *Lectures on Analytical Mechanics and theory of Stability*, Université de Franche-Comté, Besancon, France, Mai-Juin (1979), Troisième Conférence, 5—7.

[4] Papastavridis, J.G. and G. Chen, The principle of "least" action in non-linear and/or nonconservative oscillations, *Journal of Sound and Vibration*, 109 (1986), 225—235.

[5] 梅凤翔，Lagrange最小作用量原理的某些推广，黄淮学刊，6(3) (1990)，22—30.

[6] 杨来伍、梅凤翔，《变质量系统力学》，北京理工大学出版社 (1989)，229—234.

[7] 梅凤翔，《非完整系统力学基础》，北京工业学院出版社 (1985)，64-66.

[8] 罗绍凯，变质量高阶非完整系统相对于非惯性系的广义Noether定理，科学通报，36 (9) (1991)，717—718.

[9] 刘桂林等，变质量非完整力学系统的相对运动动力学，力学学报，21 (6) (1989)，742—748.

The Principles of Least Action of Vairable Mass Nonholonomic Nonconservative Systems in Noninertial Reference Frames

Luo Shao-kai

(*Shangqui Teachers College, Henan*)

Mei Feng-xiang

(*Beijing Institute of Technology, Beijing*)

Abstract

This paper presents the generalized principles of least action of variable mass nonholonomic nonconservative system in noninertial reference frame, proves the eigenvalence between Hölder form and Suslov form, and then obtains differential equations of motion of variable mass nonholonomic nonconservative system in noninertial reference frame.

Key words analytical mechanics, variable mass system, nonholonomic constraints, noninertial reference frame, variational method, principle of least action