应用数学和力学，第13卷第9期（1992年9月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

# 单侧障碍问题解梯度的Hölder连续性*

王向东　　梁鋆廷

（许昌师专数学系）　（中山大学数学系）

（钱伟长推荐，1991年9月15日收到）

摘　要

对$1<p<2$的情形本文证明了变分不等式：

$$\int_G \{\nabla v\cdot \mathbf{A}(x,u,\nabla u)+vB(x,u,\nabla u)\}dx\geqslant 0,\quad \forall v\in \mathring{W}_p^1(G),\quad v\geqslant \psi-u$$

单侧障碍问题解梯度的Hölder连续性.

**关键词**　变分不等式　障碍问题　梯度　Hölder不等式

## 一、引　言

Lindqvist[1]考虑了下面的障碍问题：

$$\int_G |\nabla u|^p dx=\min \qquad (\forall v\in \mathscr{F}_\psi^+)$$

$$\mathscr{F}^+=\{v\in C(G)\cap W_p^1(G),\ v-\psi\in \mathring{W}_p^1(G),\ v\geqslant\psi\}$$

对$n=2$，$p\geqslant 2$情形证明了解的$C^{1,\alpha}$正则性．他的方法不能推广到高维的情形，也不包括$1<p<2$的情形．在梁鋆廷-于鸣岐[2]中对$p\geqslant 2$的情形，证明了更一般的变分不等式

$$\int_G\{\nabla v\cdot \mathbf{A}(x,u,\nabla u)+vB(x,u,\nabla u)\}dx\geqslant 0,\ \forall v\in \mathring{W}_p^1(G),\ v\geqslant\psi-u \qquad (1.1)$$

的障碍问题的解($u\in W_p^1(G)$，$u\geqslant\psi$)的梯度的Hölder连续性．又在 Norando[3]中（仍限于$p\geqslant 2$）考虑了下面变分不等式

$$\int_G\{\nabla v\cdot|\nabla u|^{p-2}\nabla u+vB(x,u,\nabla u)\}dx\geqslant 0,\ \forall v\in \mathring{W}_p^1(G)\cap L_\infty(G),\ v\leqslant\psi-u$$

的另一单侧障碍问题并证明后者的有界解的$C^{1,\alpha}$正则性．但是在$1<p<2$的情形，对具有蜕化椭圆性的变分不等式解的$C^{1,\alpha}$正则性的研究还留有缺口．本文旨在填平这个蚀口，对$1<p<2$的情形证明(1.1)的解的$C^{1,\alpha}$正则性．和[2]一样，证明奠基于解的$C^{0,\lambda}$正则性的基础上，后者已由Michael-Zimer[4]作出．

* 中山大学自然科学基金资助．

## 二、主要结果和证明

设 $G$ 是 $n$ 维欧氏空间 $E^n$ 中的有界区域，设 $p>1$，$W_p^1(G)$ 和 $\mathring{W}_p^1(G)$ 记通常的 Соболев 空间。设对每一 $\varepsilon\in(0,1)$，$\mathbf{A}(x,u,\xi)=\mathbf{A}_\varepsilon(x,u,\xi)$ 和 $B(x,u,\xi)$ 在 $G\times E^1\times E^n$ 上定义，对固定的 $u$、$\xi$ 关于 $x$ 为可测，对固定的 $x$（几乎处处）关于 $u$、$\xi$ 为连续。

**定理** 设 $\mathbf{A}$、$B$ 满足结构条件：

$$\xi\cdot\mathbf{A}(x,u,\xi)\geqslant K^{-1}|\xi|^p-C|u|^p-C \tag{2.1}$$

$$|\mathbf{A}(x,u,\xi)|\leqslant K|\xi|^{p-1}+C|u|^{p-1}+C \tag{2.2}$$

$$|B(x,u,\xi)|\leqslant C|\xi|^{p-1}+C|u|^{p-1}+C \tag{2.3}$$

$$|\mathbf{A}(x,u,\xi)-\mathbf{A}(x,u,\eta)|\leqslant C(\varepsilon+|\xi|^2+|\eta|^2)^{\frac{p-1-\tau}{2}}|\xi-\eta|^\tau \tag{2.4}$$

$$|\mathbf{A}(x,u,\xi)-\mathbf{A}(y,v,\xi)|\leqslant C(\varepsilon+|\xi|^2)^{\frac{p-1}{2}}\cdot(|x-y|^\sigma+|u-v|^\sigma) \tag{2.5}$$

$$a_{ij}(x,u,\xi)\zeta^i\zeta^j\geqslant K^{-1}(\varepsilon+|\xi^2|)^{\frac{p-2}{2}}|\zeta|^2 \tag{2.6}$$

$$|a_{ij}(x,u,\xi)|\leqslant K(\varepsilon+|\xi|^2)^{\frac{p-2}{2}} \tag{2.7}$$

其中 $1<p<2$，$K\geqslant1$，$C\geqslant0$，$0<\sigma\leqslant1$ 和 $0<\tau\leqslant p-1$ 是和 $\varepsilon$ 无关的常数，

$$a_{ij}(x,u,\xi)=\frac{\partial}{\partial\xi^j}A^i(x,u,\xi)\qquad(i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

设障碍函数 $\psi\in C^{1,\beta}(G)$，$\beta>0$。设 $u=u_\varepsilon\in W_p^1(G)$，$u\geqslant\psi$ 是(1.1)的解。如果存在常数 $M>0$，使 $\|u\|_{L_p(G)}\leqslant M$（对 $\varepsilon$ 一致），那么 $u$ 在 $G$ 内有Hölder连续的一阶梯度 $\nabla u$，后者在任何紧子集 $G'\subset\subset G$ 上的Hölder指数 $\alpha>0$ 和Hölder系数与 $\varepsilon$ 无关。

**证明** 记 $B(x,r)=\{y\in E^n,\ |y-x|<r\}$。设 $G'\subset\subset G$ 为任意。取 $R<1$ 足够小，使

$$G''=\bigcup_{x\in G'}B(x,4R)\subset\subset G$$

因为设 $\|u\|_{L_p(G)}\leqslant M$，$\psi\in C^{1,\beta}(G)$ 和结构条件(2.1)～(2.3)，根据[4]中给出的结果，$u$ 在 $G''$ 上有和 $\varepsilon$ 无关的界，此外，$u\in C^{0,\lambda}(\bar{G}'')$ 并且

$$\begin{aligned}\underset{x,y\in B(x_0,R)}{\mathrm{vraimax}}|u(x)-u(y)|&\leqslant C\left[\left(R^{-n}\int_G|u|^pdx\right)^{\frac{1}{p}}+1\right]\left(\frac{|x-y|}{R}\right)^\lambda\\&\leqslant C|x-y|^\lambda\qquad(\forall x_0\in G')\end{aligned} \tag{2.8}$$

其中常数 $C>0$ 依赖于 $n$，$p$，$M$，$R$，$\|\psi\|_{C^1(\bar{G}'')}$ 和结构条件(2.1)～(2.3)中的常数，但和 $x_0$，$\varepsilon$ 无关。

设 $\rho<R$ 为任意，设 $U$ 是下面问题

$$\int_{B(x_0,\rho)}\nabla v\cdot\mathbf{A}_0(\nabla u)dx=0,\ (\forall v\in\mathring{W}_p^1(B(x_0,\rho))) \tag{2.9}$$

$$U-u\in\mathring{W}_p^1(B(x_0,\rho)) \tag{2.10}$$

的解，其中 $\mathbf{A}_0(\xi)=\mathbf{A}(x_0,u(x_0),\xi)$。取 $v=U-u\in\mathring{W}_p^1(B(x_0,\rho))$ 作试验函数，代入(2.9)并利用结构条件(2.6)、(2.7)和Hölder不等式，即得

$$\int_{B(x_0,\rho)}|\nabla U|^pdx\leqslant C\int_{B(x_0,\rho)}(|\nabla u|^p+|u|^p+1)dx \tag{2.11}$$

此外，根据Di Benedetto[5]的结果，还成立

$$\operatorname*{vraimax}_{B(x_0,\rho/2)}|\nabla U|\leqslant C\left[\frac{1}{\rho^n}\int_{B(x_0,\rho)}(1+|\nabla U|^p)dx\right]^{\frac{1}{p}} \tag{2.12}$$

$$\operatorname*{vraimax}_{x,y\in B(x_0,\rho/2)}|\nabla U(x)-\nabla U(y)|\leqslant C\left(\frac{|x-y|}{\rho}\right)^{\gamma}\left(\frac{1}{\rho^n}\int_{B(x_0,\rho)}(1+|\nabla U|^p)dx\right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.13}$$

其中 $\gamma>0$ 是常数且只依赖于 $n$，$p$以及(2.6)、(2.7)中的常数。所有出现在(2.11)～(2.13)中的常数$C$和$\varepsilon$，$x_0$，$\rho$无关。

记 $U\vee\psi=\max(U,\psi)$。考虑到 $u\geqslant\psi$ 和 $U-u\in\mathring{W}^1_p(B(x_0,\rho))$，我们有$(U-U\vee\psi)\in\mathring{W}^1_p(B(x_0,\rho)$。由于$\mathbf{A}_0(\nabla\psi(x_0))$是何量，(2.9)可以改写为

$$0=\int_{B(x_0,\rho)}\{\nabla v\cdot[\mathbf{A}_0(\nabla U)-\mathbf{A}_0(\nabla(U\vee\psi))]+\nabla v\cdot[\mathbf{A}_0(\nabla(U\vee\psi))$$
$$-\mathbf{A}_0(\nabla\psi(x_0))]\}dx,\ (\forall v\in\mathring{W}^1_p(B(x_0,\rho))) \tag{2.9$'$}$$

由结构条件(2.6)，我们可得

$$(\mathbf{A}_0(\xi)-\mathbf{A}_0(\eta))\cdot(\xi-\eta)$$
$$=\int_0^1 a_{ij}(x_0,u(x_0),\eta+t(\xi-\eta))(\xi^i-\eta^i)(\xi^j-\eta^j)dt$$
$$\geqslant(\varepsilon+|\xi|^2+|\eta|^2)^{\frac{p-2}{2}}|\xi-\eta|^2. \tag{2.14}$$

取$v=U-U\vee\psi\in\mathring{W}^1_p(B(x_0,\rho))$代入 (2.9)$'$ 并注意这时的积分有效区域是 $B(x_0,\rho)\cap\{U<\psi\}$，其中$U\vee\psi=\psi$，由(2.4)、(2.14)我们即得

$$\int_{B(x_0,\rho)}(\varepsilon+|\nabla U|^2+|\nabla(U\vee\psi)|^2)^{\frac{p-2}{2}}|\nabla U-\nabla(U\vee\psi)|^2dx$$
$$\leqslant\int_{B(x_0,\rho)\cap\{U<\psi\}}|\nabla U-\nabla(U\vee\psi)|(\varepsilon+|\nabla\psi|^2+|\nabla\psi(x_0)|^2)^{\frac{p-1-\tau}{2}}|\nabla\psi-\nabla\psi(x_0)|^\tau dx$$
$$\leqslant C(1+\|\psi\|_{C^{1,\beta}(G'')})^{p-1}\rho^{\beta\tau}\int_{B(x_0,\rho)}|\nabla U-\nabla(U\vee\psi)|dx$$
$$\leqslant C\rho^{\beta\tau+\left(1-\frac{1}{p}\right)n}\left(\int_{B(x_0,\rho)}|\nabla U-\nabla(U\vee\psi)|^pdx\right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.15}$$

另一方面

$$\int_{B(x_0,\rho)}\nabla U-\nabla(U\vee\psi)|^pdx$$
$$\leqslant\left(\int_{B(x_0,\rho)}(1+|\nabla U|^2+|\nabla(U\vee\psi)|^2)^{\frac{p}{2}}dx\right)^{1-\frac{p}{2}}$$
$$\cdot\left(\int_{B(x_0,\rho)}(\varepsilon+|\nabla U^3+|\nabla(U\vee\psi)|^2)^{\frac{p-2}{2}}|\nabla U-\nabla(U\vee\psi)|^2dx\right)^{\frac{p}{2}} \tag{2.16}$$

联合(2.15)、(2.16)给出

$$\int_{B(x_0,\rho)}|\nabla U-\nabla(U\vee\psi)|^p dx\leqslant C\Big[\int_{B(x_0,\rho)}(1+|\nabla U|^p)dx\Big]^{2-p}\rho^{p\beta\tau+(p-1)n}\tag{2.17}$$

其中的常数$C>0$和$\varepsilon$，$x_0$，$\rho$无关．

当$v\in\overset{\circ}{W}{}^1_p(B(x_0,\rho))$且在$B(x_0,\rho)$上$v\geqslant\psi-u$时，开拓$v$到整个$G$，取$v=0$当$x\in G\setminus B(x_0,\rho)$．这样的$v$可取作(1.1)中的试验函数．据(1.1)和(2.9)，我们有

$$0\geqslant\int_{B(x_0,\rho)}\{\nabla v\cdot[\mathbf{A}_0(\nabla v)-\mathbf{A}_0(\nabla u)]$$

$$+\nabla v\cdot[\mathbf{A}_0(\nabla u)-\mathbf{A}(x,u,\nabla u)]-vB(x,u,\nabla u)\}dx\tag{1.1$'$}$$

$$(\forall v\in\overset{\circ}{W}{}^1_p(B(x_0,\rho))\,;\ v\geqslant\psi-u)$$

显然，$v=U\vee\psi-u=(U\vee\psi-U)+(U-u)\in\overset{\circ}{W}{}^1_p(B(x_0,\rho))$并且$v+u-\psi=U\vee\psi-\psi\geqslant0$．因此，这样的$v$可以取作(1.1)′中的试验函数，将它代入(1.1)′给出

$$\int_{B(x_0,\rho)}(\varepsilon+|\nabla U|^2+|\nabla u|^2)^{\frac{p-1}{2}}|\nabla U-\nabla u|^2dx$$

$$\leqslant\int_{B(x_0,\rho)}(\nabla U-\nabla u)\cdot(\mathbf{A}_0(\nabla U)-\mathbf{A}_0(\nabla u))dx$$

$$\leqslant\int_{B(x_0,\rho)}\{-(\nabla(U\vee\psi)-\nabla U)\cdot(\mathbf{A}(\nabla U)-\mathbf{A}_0(\nabla u))$$

$$+\nabla(U\vee\psi-U+U-u)\cdot[\mathbf{A}(x,u,\nabla u)-\mathbf{A}_0(\nabla u)]$$

$$+(U\vee\psi-U+U-u)B(x,u,\nabla u)\}dx$$

$$\leqslant C\int_{B(x_0,\rho)}|\nabla(U\vee\psi)-\nabla U|(1+|\nabla u|^2+|\nabla U|^2)^{\frac{p-1-\tau}{2}}|\nabla U-\nabla u|^\tau$$

$$+|\nabla(U\vee\psi)-U+U-u)|(\varepsilon+|\nabla u|^2)^{\frac{p-1}{2}}(|x-x_0|^\sigma+|u-u(x_0)|^\sigma$$

$$+|U\vee\psi-U+U-u|(|\nabla u|^{p-1}+|u|^{p-1}+1)\}dx=\mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III}\tag{2.18}$$

记

$$J=\int_{B(x_0,\rho)}(|\nabla u|^p+|u|^p+1)dx,$$

$$M(\rho)=\underset{B(x_0,\rho)}{\mathrm{vraimax}}(|x-x_0|^\sigma+|u-u(x_0)|^\sigma),$$

由Hölder不等式和Poincare不等式，我们得

$$\mathrm{I}\leqslant J^{\frac{p-1-\tau}{p}}\Big(\int_{B(x_0,p)}|\nabla(U\vee\psi)-\nabla U|^pdx\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int_{B(x_0,\rho)}|\nabla U-\nabla u|^pdx\Big)^{\frac{\tau}{\rho}}\tag{2.19}$$

$$\mathrm{II}\leqslant M(\rho)J^{1-\frac{1}{p}}\Big[\Big(\int_{B(x_0,\rho)}|\nabla(U\vee\psi)-\nabla U|^pdx\Big)^{\frac{1}{p}}$$

$$+\Big(\int_{B(x_0,p)}|\nabla U-\nabla u|^pdx\Big)^{\frac{1}{p}}\Big]\tag{2.20}$$

$$\mathrm{III}\leqslant C\rho J^{1-\frac{1}{p}}\Big[\Big(\int_{B(x_0,\rho)}|\nabla(U\vee\psi)+\nabla U|^pdx\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int_{B(x_0,\rho)}|\nabla U-\nabla u|^pdx\Big)^{\frac{1}{p}}\Big]\tag{2.21}$$

$$\int_{B(x_0,\rho)}|\nabla U-\nabla u|^p dx\leqslant J^{1-\frac{p}{2}}\left(\int_{B(x_0,\rho)}(\varepsilon+|\nabla U|^2+|\nabla u|^2)^{\frac{p-2}{2}}|\nabla U-\nabla u|^2 dx\right)^{\frac{p}{2}} \tag{2.22}$$

联合(2.8)、(2.11)、(2.17)～(2.22)并利用Young不等式，即得

$$\begin{aligned}&\int_{B(x_0,\rho)}(\varepsilon+|\nabla u|^2+|\nabla U|^2)^{\frac{p-2}{2}}|\nabla U-\nabla u|^2 dx\\ &\leqslant C\{J^{\frac{2-p\tau}{p(2-\tau)}}\rho^{\frac{2}{2-\tau}\left(\beta\tau+\left(1-\frac{1}{p}\right)n\right)}\\ &+J^{\frac{1}{p}}(\rho^\sigma+\rho^{\sigma\lambda})\rho^{\beta\tau+\left(1-\frac{1}{p}\right)n}\\ &+J(\rho^\sigma+\rho^{\sigma\lambda})^2+J^{\frac{1}{p}}\rho^{1+\beta\tau+\left(1-\frac{1}{p}\right)n}+J\rho^2\}\end{aligned} \tag{2.23}$$

因为$\rho<R<1$，我们可证存在常数$C>0$和$\varepsilon$，$x_0$，$\rho$无关（证明将在下面给出），使得

$$J\leqslant C\rho^{n-p+p\lambda}\qquad(\forall x_0\in G') \tag{2.24}$$

从而，由(2.23)即得

$$\int_{B(x_0,\rho)}(\varepsilon+|\nabla u|^2+|\nabla U|^2)^{\frac{p-2}{2}}|\nabla U-\nabla u|^2 dx\leqslant C\rho^{n-p+p\lambda_1} \tag{2.25}$$

$$\lambda_1=\lambda+\frac{1}{p}\min\left\{\frac{2(p-1)(1-\lambda)+2\beta\tau}{2-\tau},\ (p-1)(1-\lambda)+\beta\tau+\sigma\lambda,\ 2\sigma\lambda\right\}>\lambda \tag{2.26}$$

于是由(2.22)可得

$$\int_{B(x_0,\rho)}|\nabla U-\nabla u|^p dx\leqslant C\rho^{n-p+p\left(\lambda\left(1-\frac{p}{2}\right)+\lambda_1\frac{p}{2}\right)} \tag{2.27}$$

根据(2.11)、(2.12)、(2.24)和(2.27)，当$r\leqslant\rho/2$时，我们有

$$\begin{aligned}\int_{B(x_0,r)}|\nabla u|^p dx&\leqslant\int_{B(x_0,r)}C(|\nabla U|^p+|\nabla U-\nabla u|^p)dx\\ &\leqslant C\left(\frac{r}{\rho}\right)^n\int_{B(x_0,\rho)}|\nabla U|^p dx+C\rho^{n-p+p\left(\lambda\left(1-\frac{p}{2}\right)+\lambda_1\frac{p}{2}\right)}\\ &\leqslant C\left(\frac{r}{\rho}\right)^n\left[\int_{B(x_0,\rho)}|\nabla u|^p dx+\rho^n\right]+C\rho^{n-p+p\left(\lambda\left(1-\frac{p}{2}\right)+\lambda_1\frac{p}{2}\right)}\end{aligned} \tag{2.28}$$

当$r>\rho/2$时，(2.28)是平凡的．(2.28)隐含了（见Giaqinta[6]中第三章引理2.1）：

$$\int_{B(x_0,r)}|\nabla u|^p dx\leqslant C\left(\frac{r}{\rho}\right)^{n-p+\lambda_2}\left[\int_{B(x_0,\rho)}|\nabla u|^p dx+\rho^{n-p+p\lambda_2}\right] \tag{2.29}$$

$$(\forall r\leqslant\rho)$$

其中

$\lambda_2<1$可以任意，如果$\lambda\left(1-\frac{p}{2}\right)+\lambda_1\frac{p}{2}\geqslant1$；

$$\lambda_2=\lambda\left(1-\frac{p}{2}\right)+\lambda_1\frac{p}{2}，\text{如果 }\lambda\left(1-\frac{p}{2}\right)+\lambda_1\frac{p}{2}<1.$$

因为$x_0\in G'$的任意性和常数$C$与$\varepsilon$，$x_0,\rho$无关，根据Morrey定理，由(2.29)导得$u\in C^{0,\lambda_2}(\bar{G}')$，因为$G'\subset\subset G$的任意性，我们又回到原来的出发点，但$\lambda$由较大的$\lambda_2>\lambda$来代。经过有限次迭代之后，出现在(2.8)中的$\lambda$可以充分接近1并使

$$\lambda\left(1-\frac{p}{2}\right)+\lambda_1\frac{p}{2}=\lambda_3>1 \tag{2.30}$$

对任何$r\leqslant\rho$，用$(\nabla U)_{x_0,r}$记$\nabla U$在$B(x_0,r)$上的平均值，由(2.13)、(2.27)和Hölder不等式，即得

$$\begin{aligned}
&\int_{B(x_0,r)}|\nabla u-(\nabla U)_{x_0,r}|dx\\
&\leqslant\int_{B(x_0,r)}(|\nabla U-(\nabla U)_{x_0,r}|+|\nabla U-\nabla u|)dx\\
&\leqslant C\left(\frac{r}{\rho}\right)^{n+\gamma}\rho^n\left(\frac{1}{\rho^n}\int_{B(x_0,\rho)}|\nabla U|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\quad+Cr^{n\left(1-\frac{1}{p}\right)}\left(\int_{B(x_0,\rho)}|\nabla U-\nabla u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\leqslant C\left(\frac{r}{\rho}\right)^{n+\gamma}\rho^n\left(\frac{1}{\rho^n}\int_{B(x_0,\rho)}(|\nabla u|^p+|u|^p+1)dx\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\quad+Cr^{n\left(1-\frac{1}{p}\right)}\rho^{(n-p+p\lambda_3)/p}\\
&\leqslant C\left(\frac{r}{\rho}\right)^{n+\gamma}\rho^{n-1+\lambda}+Cr^{n\left(1-\frac{1}{p}\right)}\rho^{(n-p+p\lambda_3)/p}\qquad\left(r\leqslant\frac{\rho}{2}\right)
\end{aligned}\tag{2.31}$$

根据(2.26)、(2.30)，我们设$\lambda$足够接近1使

$$\frac{1-\lambda}{\gamma}<\frac{p(\lambda_3-1)}{n}.$$

取$\theta$和$R<1$，使

$$\frac{1-\lambda}{\gamma}<\theta<\frac{p(\lambda_3-1)}{n}\text{和 }R^\theta\leqslant\frac{1}{2}.$$

如果$r\leqslant R^{1+\theta}$，取$\rho\leqslant R$使$r=\rho^{1+\theta}\leqslant\rho R^\theta\leqslant\rho/2$，由(2.31)得

$$\begin{aligned}
&\int_{B(x_0,r)}|\nabla u-(\nabla U)_{x_0,r}|dx\leqslant C\rho^{(1+\theta)\left[n+\frac{\theta\gamma-1+\lambda}{1+\theta}\right]}+C\rho^{(1+\theta)\left[n+\frac{\lambda_3-1-\frac{n}{p}\theta}{1+\theta}\right]}\\
&\leqslant Cr^{n+\alpha},\qquad\alpha=\min\left\{\frac{\theta\gamma-1+\lambda}{1+\theta},\ \frac{\lambda_3-1-\frac{n}{p}\theta}{1+\theta}\right\}>0
\end{aligned}\tag{2.32}$$

如果$R^{1+\theta}\leqslant r\leqslant R$，我们有

$$\int_{B(x_0,r)}|\nabla u-(\nabla U)_{x_0,r}|dx\leqslant 2\int_{B(x_0,r)}|\nabla u|dx$$

$$\leqslant 2\left(\frac{r}{R^{1+\theta}}\right)^{n+\alpha}\int_{B(x_0,R)}|\nabla u|dx$$

$$\leqslant C\left(\frac{r}{R^{1+\theta}}\right)^{n+\alpha}R^{n\left(1-\frac{1}{p}\right)}\left(\int_{B(x_0,R)}|\nabla u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant Cr^{n+\alpha}R^{-(n\theta+\alpha(1+\theta)+1-\lambda)} \tag{2.33}$$

因为$x\in G'$和$r\leqslant R$的任意性，根据Meyers定理[7]，(2.32)、(2.33)一起隐含了$\nabla u\in C^{0,\alpha}(\bar{G}')$.

下面我们给出(2.24)的证明．设$\zeta(x)$是光滑截断函数，满足$0\leqslant\zeta(x)\leqslant 1$，

$\zeta(x)=1$当$x\in B(x_0,\rho)$，$\zeta(x)=0$ 当$x\overline{\in}B(x_0,2\rho)$并且$|\nabla\zeta(x)|\leqslant\frac{2}{\rho}$.

设$v=-(u-u(x_0)-\psi+\psi(x_0))^+\zeta^p$，那么$v\in\mathring{W}_p^1(G)$并且

$$v+u-\psi=(u-\psi)(1-\zeta^p)+[u-\psi-(u-u(x_0)-\psi+\psi(x_0))^+]\zeta^p\geqslant 0$$

(因为$u\geqslant\psi$)．这样的$v$可以取作试验函数，把它代入(1.1)给出

$$\int_{\Omega^+}(\nabla u\cdot\mathbf{A})\zeta^p dx\leqslant\int_{\Omega^+}(\nabla\psi\cdot\mathbf{A})\zeta^p$$

$$-(u-u(x_0)-\psi+\psi(x_0))[p\zeta^{p-1}\nabla\zeta\cdot\mathbf{A}+\zeta^p B]\}dx \tag{2.34}$$

其中 $\Omega^+=B(x_0,2\rho)\cap\{u-\psi>u(x_0)-\psi(x_0)\}$ 是积分的有效区域，根据结构条件，(2.1)～(2.3)，由(2.34)即得

$$\int_{\Omega^+}|\nabla u|^p\zeta^p dx\leqslant C\int_{\Omega^+}\{|\nabla u|(|u|^p+1)\zeta^p$$

$$+|\nabla\psi|(|\nabla u|^{p-1}+|u|^{p-1}+1)\zeta^p$$

$$+(|u-u(x_0)|+|\psi-\psi(x_0)|)(\zeta^{p-1}|\nabla\zeta|+\zeta^p)(|\nabla u|^p+|u|^p+1)\}dx \tag{2.35}$$

考虑到$u\in C^{0,\lambda}(\bar{G}'')$和$\psi\in C^{1,\beta}(\bar{G}'')$，由(2.35)即可得

$$\int_{\Omega^+}\zeta^p|\nabla u|^p dx\leqslant C\rho^{n-p+p\lambda}\qquad(\rho\leqslant R) \tag{2.36}$$

类似地，

$$\tilde{v}=(u(x_0)-\psi(x_0)-u+\psi)^+\zeta^p\in\mathring{W}_p^1(G),$$

$$\tilde{v}+u-\psi=(u-\psi)(1-\zeta^p)+[u-\psi+(u(x_0)-\psi(x_0)-u+\psi)^+]\zeta^p\geqslant 0.$$

这样的$\tilde{v}$又可取作试验函数，用它代入(1.1)并重复前面的证明，我们又得

$$\int_{\Omega^-}\zeta^p|\nabla u|^p dx\leqslant C\rho^{n-p-p\lambda}\qquad(\rho\leqslant R) \tag{2.37}$$

其中 $\Omega^-=B(x_0,\rho)\cap\{u-\psi<u(x_0)-\psi(x_0)\}$．由(2.36)、(2.37)即可得出(2.24)，于是定理完全获证．

## 三、注　记

当取 $1<p<2$，$0<\varepsilon<1$和

$$\mathbf{A}(x,u,\xi)\equiv\mathbf{A}(\xi)=(\varepsilon+|\xi|^3)^{\frac{p-2}{2}}$$

时，上节中的条件(2.1)、(2.2)、(2.4)～(2.5)是满足的．

事实上，我们有

$$\xi\cdot\mathbf{A}(\xi)=(\varepsilon+|\xi|^2)^{\frac{p-2}{2}}|\xi|^2$$

$$=(\varepsilon+|\xi|^2)^{\frac{p}{2}}-\varepsilon(\varepsilon+|\xi|^2)^{\frac{p-2}{2}}$$

$$\geqslant\frac{1}{2}(\varepsilon+|\xi|^2)^{\frac{p}{2}}-C(p)\varepsilon^{\frac{p}{2}}$$

$$\geqslant\frac{1}{2}|\xi|^p-C(p);$$

$$|\mathbf{A}(\xi)|=(\varepsilon+|\xi|^2)^{\frac{p-2}{2}}|\xi|\leqslant(\varepsilon+|\xi|^2)^{\frac{p-1}{2}}$$

$$\leqslant|\xi|^{p-1}+1.$$

所以，对于$\mathbf{A}(\xi)$，条件(2.1)和(2.2)成立。

对于$\mathbf{A}(\xi)$，条件(2.4)相当于

$$|\mathbf{A}(\xi)-\mathbf{A}(\eta)|=|(\varepsilon+|\xi|^2)^{\frac{p-2}{2}}\xi-(\varepsilon+|\eta|^2)^{\frac{p-2}{2}}\eta|$$

$$\leqslant C(\varepsilon+|\xi|^2+|\eta|^2)^{\frac{p-1-\tau}{2}}|\xi-\eta|^\tau \tag{3.1}$$

$$(1<p<2,\ 0<\tau\leqslant p-1<1,\ \varepsilon\in(0,1))$$

如果$|\xi|=|\eta|$，(3.1)可以写为

$$|\xi-\eta|\leqslant C(\varepsilon+|\xi|^2+|\eta|^2)^{\frac{p-1-\tau}{2}}(\varepsilon+|\xi|^2)^{\frac{2-p}{2}}|\xi-\eta|^\tau$$

$$=C\left(\frac{\varepsilon+2|\xi|^2}{\varepsilon+|\xi|^2}\right)^{(p-1-\tau)/2}\left(\varepsilon+\frac{|\xi|^2+|\eta|^2}{2}\right)^{\frac{1-\tau}{2}}|\xi-\eta|^\tau \tag{3.1$'$}$$

由于$p-1-\tau\geqslant0$并且

$$|\xi-\eta|\leqslant(|\xi|+|\eta|)^{1-\tau}|\xi-\eta|^\tau\leqslant[2(|\xi|^2+|\eta|^2)]^{\frac{1-\tau}{2}}|\xi-\eta|^\tau,$$

只要取 $C>4^{\frac{1-\tau}{2}}$，(3.1)′，就能满足。

下面设$|\xi|>|\eta|$，将(3.1)两边平方得

$$0\leqslant(\varepsilon+|\xi|^2)^{p-2}|\xi|^2+(\varepsilon+|\eta|^2)^{p-2}|\eta|^2-2[(\varepsilon+|\xi|^2)(\varepsilon+|\eta|^2)]^{\frac{p-2}{2}}\xi\cdot\eta$$

$$\leqslant C(\varepsilon+|\xi|^2+|\eta|^2)^{p-1-\tau}(|\xi|^2+|\eta|^2-2\xi\cdot\eta)^\tau \tag{3.2}$$

由此可得

$$0\leqslant\theta_\xi^2+\theta_\varepsilon^{2(p-2)}\theta_\eta^2-2\theta_\varepsilon^{p-2}\theta_\xi\theta_\eta\gamma$$

$$\leqslant C(1+\theta_\eta^2)^{p-1-\tau}(\theta_\xi^2+\theta_\eta^2-2\theta_\xi\theta_\eta\gamma)^\tau,$$

即

$$\frac{\theta_\xi^2+\theta_\varepsilon^{2(p-2)}\theta_\eta^2-2\theta_\varepsilon^{p-2}\theta_\xi\theta_\eta\gamma}{(\theta_\xi^2+\theta_\eta^2-2\theta_\xi\theta_\eta\gamma)^\tau}\leqslant C(1+\theta_\eta^2)^{p-1-\tau} \tag{3.3}$$

其中$\theta_\xi$，$\theta_\eta$，$\theta_\varepsilon\in(0,1)$，$\gamma\in(-1,1)$分别定义为

$$\theta_\xi^2=\frac{|\xi|^2}{\varepsilon+|\xi|^2},\quad \theta_\eta^2=\frac{|\eta|^2}{\varepsilon+|\xi|^2},\quad \theta_\varepsilon^2=\frac{\varepsilon+|\eta|^2}{\varepsilon+|\xi|^2}$$

并且 $\xi\cdot\eta=(\varepsilon+|\xi|^2)\theta_\xi\theta_\eta\gamma$。因为$p-1-\tau\geqslant0$，故我们只须证明

$$\frac{\theta_\xi^2+\theta_\varepsilon^{2(p-2)}\theta_\eta^2-2\theta_\varepsilon^{p-2}\theta_\xi\theta_\eta\gamma}{[\theta_\xi^2+\theta_\eta^2-2\theta_\xi\theta_\eta\gamma]^\tau}\leqslant C.$$

考虑到$\tau\in(0,1)$且

$$0\leqslant\theta_\xi^2+\theta_\varepsilon^{2(p-2)}\theta_\eta^2-2\theta_\varepsilon^{p-2}\theta_\xi\theta_\eta\gamma$$

$$\leqslant\theta_\xi^2+\theta_\varepsilon^{2(p-1)}\left(\frac{\theta_\eta}{\theta_\varepsilon}\right)^2+2\theta_\varepsilon^{p-1}\theta_\xi\left(\frac{\theta_\eta}{\theta_\varepsilon}\right)\leqslant 4,$$

我们只须证明

$$\left[\frac{\theta_\xi^2+\theta_\varepsilon^{2(p-2)}\theta_\eta^2-2\theta_\varepsilon^{p-2}\theta_\xi\theta_\eta\gamma}{\theta_\xi^2+\theta_\eta^2-2\theta_\xi\theta_\eta\gamma}\right]^\tau\leqslant C$$

或等价地证明

$$\frac{\theta_\xi^2+\theta_\varepsilon^{2(p-2)}\theta_\eta^2-2\theta_\varepsilon^{p-2}\theta_\xi\theta_\eta\gamma}{\theta_\xi^2+\theta_\eta^2-2\theta_\xi\theta_\eta\gamma}=\frac{(\theta_\xi-\theta_\varepsilon^{p-2}\theta_\eta)^2+2\theta_\varepsilon^{p-2}\theta_\xi\theta_\eta(1-\gamma)}{(\theta_\xi-\theta_\eta)^2+2\theta_\xi\theta_\eta(1-\gamma)}\leqslant C \tag{3.4}$$

因为$1<p<2$，我们有

$$0\leqslant 2\theta_\varepsilon^{p-2}\theta_\xi\theta_\eta(1-\gamma)\leqslant 2.5^{2-p}\theta_\xi\theta_\eta(1-\gamma)$$

$$\leqslant 2\cdot C\theta_\xi\theta_\eta(1-\gamma),\qquad (\forall\theta_\varepsilon\geqslant\frac{1}{5}\text{且}C\geqslant 5^2).$$

另一方面，

$$\frac{|\xi|^2}{\varepsilon+|\xi|^2}>\frac{|\eta|^2}{\varepsilon+|\eta|^2},\ \forall|\xi|>|\eta|,$$

那么，

$$\theta_\xi^2-\theta_\varepsilon^{2(p-2)}\theta_\eta^2=\frac{|\xi|^2}{\varepsilon+|\xi|^2}-\left(\frac{\varepsilon+|\eta|^2}{\varepsilon+|\xi|^2}\right)^{p-2}\frac{|\eta|^2}{\varepsilon+|\eta|^2}>0$$

并且

$$(\theta_\xi-\theta_\varepsilon^{p-2}\theta_\eta)^2\leqslant(\theta_\xi-\theta_\eta)^2\leqslant C(\theta_\xi-\theta_\eta)^2,\qquad(\forall C\geqslant 1),$$

故当$\theta_\varepsilon\geqslant 1/5$且$C\geqslant 5^2$时(3.4)成立。但如果$\theta_\varepsilon<1/5$，我们有

$$|\eta|^2\leqslant\frac{1}{5}|\xi|^2\text{ 而且 }\theta_\eta\leqslant\frac{1}{\sqrt{5}}\theta_\xi,$$

从而

$$(\theta_\xi-\theta_\eta)^2+2\theta_\xi\theta_\eta(1-\gamma)\geqslant(\theta_\xi-\theta_\eta)^2\geqslant\left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2\theta_\xi^2 \tag{3.5}$$

类似地，

$$|(\theta_\xi-\theta_\varepsilon^{p-2}\theta_\eta)^2+2\theta_\varepsilon^{p-2}\theta_\xi\theta_\eta(1-\gamma)|\leqslant(\theta_\xi+\theta_\varepsilon^{p-2}\theta_\eta)^2$$

$$\leqslant 2(\theta_\xi^2+\theta_\varepsilon^{2(p-2)}\theta_\eta^2)=2\left[\frac{|\xi|^2}{\varepsilon+|\xi|^2}+\left(\frac{\varepsilon+|\eta|^2}{\varepsilon+|\xi|^2}\right)^{p-1}\frac{|\eta|^2}{\varepsilon+|\eta|^2}\right]$$

$$\leqslant 2\left[\frac{|\xi|^2}{\varepsilon+|\xi|^2}+\frac{|\eta|^2}{\varepsilon+|\eta|^2}\right]\leqslant 4\frac{|\xi|^2}{\varepsilon+|\xi|^2}=4\theta_\xi^2 \tag{3.6}$$

所以，当$\theta_\varepsilon<1/5$时，有

$$\frac{(\theta_\xi-\theta_\varepsilon^{p-2}\theta_\eta)^2+2\theta_\varepsilon^{p-2}\theta_\xi\theta_\eta(1-\gamma)}{(\theta_\xi-\theta_\eta)^2+2\theta_\xi\theta_\eta(1-\gamma)}\leqslant\frac{4}{\left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2},$$

即当$\theta_\varepsilon<1/5$且$C\geqslant 5^2$时(3.4)也成立。故对于$\mathbf{A}(\xi)$，条件(2.4)成立得证。对于$\mathbf{A}(\xi)$，条件(2.5)～(2.7)成立是显然的。

## 参 考 文 献

[1] Lindqvist, P., Regularity for the gradient of the solution to a nonlinear obstacle problem with degenerate ellipticity, *Nonlinear Anal. TMA*, (2) (1988), 1245—1255.

[2] 梁鋈廷、于鸣岐，一个障碍问题解梯度的Hölder连续性，数学杂志，(4) (1991).

[3] Norando, T., $C^{1,\alpha}$ local regularity for a class of quasilinear elliptic variational inequalities, *Bull. U. M. I., Ser.* Ⅶ, V-C(1986), 281—292.

[4] Michael, J.H. Zimer, W. P., Interior regularity for solutions to obstacle problems, *Nonlinear Anal. TMA*, 10 (1986), 1427—1448.

[5] Di Benedetto, E., $C^{1+\alpha}$ local regularity of weak solutions of degenerate elliptic equations, *Nonlinear Anal. TMA*, (7) (1983), 827—850.

[6] Giaquinta, G., *Multiple Integrals in the Calculus of Variations and Nonlinear elliptic Systems*, Princeton Univ. Press, Princeton (1983).

[7] Meyers, N. G., Mean oscillation over cubes and Hölder continuity, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 15 (1964), 717—721.

[8] Giquinta, G., Remarks on the regularity of weak solutions to some variational inequalities, *Math. Z.*, 177 (1981), 15—31.

# The Hölder Continuity for the Gradient of Solutions to One-Sided Obstacle Problems

Wang Xiang-dong

(*Department of Mathematics, Xuchang Teachers college, Xuchang*)

Liang Xi-ting

(*Department of Mathematics, Zhongshan University, Guangzhou*)

**Abstract**

There is a gap in case $1<p<2$ to the $C^{1,\alpha}$ regularity for solutions of variational inequalities with degenerate ellipticity. In this paper, based on the fundamental of the $C^{0,\alpha}$ reglarity of solutions, the Hölder continuity for the gradient of solutions is proved in case $1<p<2$ to a one-sided obstacle problem for variational inequalities

$$\int_G \{\nabla v\cdot \mathbf{A}(x,u,\nabla u)+vB(x,u,\nabla u)\}dx\geqslant 0$$

$$(\forall v\in \overset{\circ}{W}{}_p^1(G) \text{ and } v\geqslant\psi-u)$$

**Key words** variational inequality, obstacle problem, gradient, Hölder continuity