

# 沉浮、俯仰及控制面振动引起的 跨音速非定常气动载荷计算\*

高 正 红

(西北工业大学, 1991年6月9日收到)

## 摘 要

本文将文献[9]提出改进的通量分裂方法, 应用于随时间变化的贴体网格中, 建立了可用于求解非定常Euler方程的通量分裂方法. 该方法是以连续的特征值分离为基础, 它具有方法简单, 便于推广使用的特点. 同时克服了Steger-Warming通量分裂方法存在的问题. 对通量分裂后的Euler方程, 利用MUSCL型迎风差分建立了具有二阶精度的有限体积方程. 文中以NACA64A-10翼型为例, 对其在跨音速流场中进行沉浮、俯仰及带有振动控制面引起的非定常气动载荷进行了计算. 部分计算结果与相应的实验结果进行了比较, 吻合良好.

**关键词** 非定常流动 Euler方程 沉浮振动 俯仰振动

## 一、引 言

在过去的数十年间, 已经出现了许多用于绕振动翼型或机翼的跨音速非定常流动及气动载荷计算的计算方法. 然而这些方法大多是基于跨音速小扰动速势方程建立的<sup>[1,2]</sup>. 随着超级计算机的产生, 开始出现一些基于Euler方程或Navier—Stokes方程的计算方法<sup>[3,4]</sup>.

非定常Euler方程可以正确地反映跨音速无粘流动. Euler方程的数值解可以较为准确地预测激波的强度, 位置等. 这时非定常流动计算尤为重要. 因为, 由于翼型或机翼的振动或变形可以造成激波强度与位置发生很大的变化, 这种变化对流动将产生一定的影响.

在求解Euler方程中, 很重要的一类方法是利用中心差分格式建立的有限差分或有限体积法. 用这类方法必须增加适当的人工粘性项. 这需要一定的计算经验. 对于非定常流动, 如何选择适当的人工粘性项就更为困难. 本文将文献[1]提出的一种改进的通量分裂方法应用于随时间变化的贴体坐标中, 利用二阶MUSCL型迎风差分格式, 建立了一种可以用于计算跨音速非定常流动的Euler方程的隐式有限体积方法. 为了减少求解所得块矩阵方程所需要的计算量, 文中采用了特征矩阵变换, 从而使得块矩阵方程组变成分离的代数方程组, 这就可以使求解方程所需CPU大为减少.

\* 钱伟长推荐.

本文将利用所建立的非定常Euler方程的求解方法计算由沉浮、俯仰及带有振动控制面在NACA64A-10翼型上的跨音速非定常气动载荷。

## 二、控制方程

### 1. 控制方程

在随时间变化的贴体坐标系中:

$$\xi = \xi(x, y, t), \quad \eta = \eta(x, y, t), \quad \tau = t \quad (2.1)$$

非定常Euler方程的守恒形式可以写成:

$$\frac{\partial Q}{\partial \tau} + \frac{\partial F}{\partial \xi} + \frac{\partial G}{\partial \eta} = 0 \quad (2.2)$$

其中

$$Q = q/J$$

$$F = (\xi_x q + \xi_x f + \xi_x g)/J$$

$$G = (\eta_x q + \eta_x f + \eta_x g)/J$$

$$q = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (e+p)u \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ (e+p)v \end{bmatrix}$$

这里 $\rho$ 是气体密度,  $u, v$ 分别是速度沿 $x, y$ 方向的分量,  $p$ 是压力,  $e$ 是单位体积的内能。对于完全气体有:

$$p = (r-1)[e - \rho(u^2 + v^2)/2] \quad (2.3)$$

$J$ 是网格坐标变换的Jacobian式。如果将计算点取在网格的中心,  $J$ 等于网格面积的倒数。

对于Euler方程(2.2), 存在有:

$$F = AQ, \quad G = BQ \quad (2.4)$$

其中  $A = \frac{\partial F}{\partial Q}, \quad B = \frac{\partial G}{\partial Q}$

同时, 矩阵 $A$ 和 $B$ 可以化为:

$$\left. \begin{aligned} A_A &= L_\xi A L_\xi^{-1} \\ A_B &= L_\eta B L_\eta^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

其中  $A_A = \text{diag}(\lambda_{A1}, \lambda_{A2}, \lambda_{A3}, \lambda_{A4})$

$$A_B = \text{diag}(\lambda_{B1}, \lambda_{B2}, \lambda_{B3}, \lambda_{B4})$$

$\lambda_{A_i}$ 和 $\lambda_{B_i}$  ( $i=1, 2, 3, 4$ ) 分别是矩阵 $A$ 和 $B$ 的特征值,  $L_\xi, L_\eta$ 是相应的特征向量矩阵。

### 2. 边界条件

对于无粘流动, 流体可以沿物体表面光滑流过, 因此, 沿物体表面我们有:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = v_n \quad (2.6)$$

其中,  $\mathbf{v}$ 是流体速度,  $\mathbf{n}$ 是物体表面单位法向矢量,  $v_n$ 是物体表面沿其法向振动或变形的速度。该速度是由物理问题本身决定的。对于定常流动问题,  $v_n = 0$ 。

对于远场边界条件, 本文采用了无反射边界条件<sup>[6]</sup>进行相应的数值处理。

### 三、网格生成

根据Thompson的网格理论<sup>[7]</sup>，在贴体坐标系中每一节点的坐标可以由一组椭圆型偏微分方程组确定：

$$G(z)=0 \quad (3.1)$$

其中  $z=[x, y]^T$

当翼型自身振动，变形或带有振动的控制面时，网格必须随时间改变。这样，在任意时刻，不仅需要确定网格点坐标位置，同时还需要确定网格节点随时间的变化速度 $(x_\tau, y_\tau)$ 。如果翼型只有刚性振动，其形状不随时间变化，则可以将刚性的网格系统固连于振动的翼型上。这样只需要一个简单的坐标变换关系，就可以确定出随时间变化的贴体网格坐标。就可以确定出随时间变化的贴体网格坐标。然而，如果翼型是弹性的，或带有振动的控制面，这时网格形状也必须随时间改变。这就需要生成新的贴体网格。为此，文献[8]利用多重网格方法，建立了一种能够快速生成随时间变化的贴体网格的计算方法。

首先，将方程(3.1)以时间 $\tau$ 为变量进行微分，于是，可以得到一组以 $(x_\tau, y_\tau)$ 为变量的线性偏微分方程组：

$$s(z_\tau)=0 \quad (3.2)$$

求解该方程组比直接解方程组(3.1)容易得多。当网格节点坐标 $(x, y)$ 的初始位置确定后，可求解方程组(3.1)获得流场中网格节点坐标随时间的变化速度 $(x_\tau, y_\tau)$ 。然后，再利用简单的时间积分即可得到下一时刻网格节点的坐标 $(x, y)$ 。求解方程组(3.1)和(3.2)，首先用中心差分格式将方程离散化，然后用Gauss-Seidel迭代方法进行迭代求解。同时利用多重网格方法加速其迭代收敛的过程。这样就可以快速地得到所需要的随时间变化的贴体网格。图1示出NACA64A-10翼型带有绕其铰链轴振动的控制面在不同时刻计算的O型网格。

### 四、数值方法

为了建立求解非定常Euler方程稳定的计算方法，首先根据文献[9]提出的改进的通量分裂方法，将其应用于随时间变化的贴体网格系统。为此，首先设：

$$\lambda_{A(B),i}^\pm = \hat{\lambda}_{A(B),i}^\pm a \sqrt{k_x^2 + k_y^2} \quad (4.1)$$

此时，  $M_k = (k_x + k_x u + k_y v) / a \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$

$$k = \begin{cases} \xi & \lambda_{A,i} \\ \eta & \lambda_{B,i} \end{cases} \quad (i=1, 2, 3, 4)$$

$a$ 是流场局部音速。

然后取：

$$\lambda_{A(B),i}^\pm = \begin{cases} 0 & \hat{M}_k \leq -\varepsilon \\ \frac{1}{2} \varepsilon (\hat{M}_k + \varepsilon)^2 & |\hat{M}_k| < \varepsilon \\ \hat{M}_k & \hat{M}_k \geq \varepsilon \end{cases} \quad (4.2)$$

$$\hat{\lambda}_{A(B),i}^- = \begin{cases} \hat{M}_k & \hat{M}_k \leq -\varepsilon \\ -\frac{1}{4\varepsilon}(\hat{M}_k - \varepsilon)^2 & |\hat{M}_k| < \varepsilon \\ 0 & \hat{M}_k \geq \varepsilon \end{cases}$$

其中

$$\hat{M}_k = \begin{cases} M_k - 1 & (i=1) \\ M_k & (i=2, 3) \\ M_k + 1 & (i=4) \end{cases}$$

$\varepsilon$ 是一个大于零的小量。已经证明该值对计算影响很小<sup>[5]</sup>。本文计算中取 $\varepsilon=0.04$ 。

利用(4.1)和(4.2)式,我们可以得到分裂成正、负的两组连续可微的特征值 $\lambda_{A(B),i}^\pm$ 。将所得到的 $\lambda_{A(B),i}^\pm$ 代入方程(2.4)和(2.5),便可得出相应分裂后的通量 $F^\pm$ 和 $G^\pm$ 。此时的 $F^\pm$ 和 $G^\pm$ 在整个流场中均具有连续可微的性质,并且满足数值解的要求<sup>[5]</sup>。

对于通量分裂后的Euler方程:

$$\frac{\partial Q}{\partial \tau} + \frac{\partial F^+}{\partial \xi} + \frac{\partial F^-}{\partial \xi} + \frac{\partial G^+}{\partial \eta} + \frac{\partial G^-}{\partial \eta} = 0 \quad (4.3)$$

利用MUSCL型二阶迎风差分格式<sup>[9]</sup>,可以建立具有二阶精度的隐式有限体积方程。然后根据Beam-Warming隐式因式分解方法,可以得出相应的两步隐式方程:

$$\begin{aligned} & \left[ I + \frac{\Delta \tau}{2} \left[ \frac{\partial F^+}{\partial Q_{i,j}} - \frac{\partial F^+}{\partial Q_{i-1,j}} + \frac{\partial F^-}{\partial Q_{i+1,j}} - \frac{\partial F^-}{\partial Q_{i,j}} \right] \right] \Delta W^n \\ & = -\Delta \tau \left( \frac{\partial F^+}{\partial \xi} + \frac{\partial F^-}{\partial \xi} + \frac{\partial G^+}{\partial \eta} + \frac{\partial G^-}{\partial \eta} \right)_{i,j} \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\left\{ I + \frac{\Delta \tau}{2} \left[ \frac{\partial G^+}{\partial Q_{i,j}} - \frac{\partial G^+}{\partial Q_{i,j-1}} + \frac{\partial G^-}{\partial Q_{i,j+1}} - \frac{\partial G^-}{\partial Q_{i,j}} \right] \right\} \Delta Q^n = \Delta W_{i,j}^n \quad (4.5)$$

这是两组三对角块矩阵方程组。由于求解这样的方程组需要大量的矩阵运算,因而计算工作量较大。特别是对于一般中、小型计算机而言。为了减少求解该方程组的计算量,本文采用了特征矩阵变换方法<sup>[5]</sup>,它可以在不改变原方程组离散化精度的前提下,将其变换为四组分离的三对角代数方程组:

$$\begin{aligned} & \alpha A_{Ai,j}^- \Delta \hat{W}_{i+1,j}^n + [I + \alpha(A_{Ai,j}^+ - A_{Ai,j}^-)] \Delta \hat{W}_{i,j}^n - \alpha A_{Ai,j}^+ \Delta \hat{W}_{i-1,j}^n \\ & \quad - \alpha \delta_A (A_{Ai,j}^+ - A_{Ai,j}^-) [\Delta \hat{W}_{i+1,j}^n - 2\Delta \hat{W}_{i,j}^n + \Delta \hat{W}_{i-1,j}^n] \\ & = L_{i,j}^n [\text{RHS}(12)] \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\Delta \hat{W}^n = [L_i^n] \Delta W^n \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} & \alpha A_{Bi,j}^- \Delta \hat{Q}_{i,j+1}^n + [I + \alpha(A_{Bi,j}^+ - A_{Bi,j}^-)] \Delta \hat{Q}_{i,j}^n - \alpha A_{Bi,j}^+ \Delta \hat{Q}_{i,j-1}^n \\ & \quad - \alpha \delta_B (A_{Bi,j}^+ - A_{Bi,j}^-) [\Delta \hat{Q}_{i,j+1}^n - 2\Delta \hat{Q}_{i,j}^n + \Delta \hat{Q}_{i,j-1}^n] = L_{i,j}^n [\Delta W_{i,j}^n] \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\Delta \hat{Q}^n = [L_i^n] \Delta \hat{Q}^n \quad (4.9)$$

其中  $A_{A(B)}^\pm = \text{diag}(\lambda_{A(B),1}^\pm, \lambda_{A(B),2}^\pm, \lambda_{A(B),3}^\pm, \lambda_{A(B),4}^\pm)$

$\alpha = \tau/2$ ,  $\delta_A$ 和 $\delta_B$ 是用于加强对角线元素的参数。 $\delta_{A(B)} = 0.1 \sim 0.5$ 。由于 $\delta_{A(B)}$ 所有项是方程中高于二阶的量,因此它们对计算结果的影响亦很小。

## 五、计算结果

本文,我们利用所建立的有随时间变化的贴体网格下求解非定常Euler方程的计算方

法，以NACA61A-10翼型为例。分别对其在跨音速流场中进行沉浮，俯仰振动及带有绕铰链轴振动的控制面流场及非定常气动载荷进行了计算。所有算例计算均在 $128 \times 32$ 的O型网格内进行。网格的外边界沿伸至12倍弦长处。翼型在振动平衡位置状态下Euler方程的定常解作为计算的初始值。本文的算例取来流马赫数 $M_\infty = 0.802$ ，迎角 $\alpha = 0^\circ$ 。图2示出在相应状态下计算所得作用于翼型表面的定常压力分布。同时示出与实验结果比较。

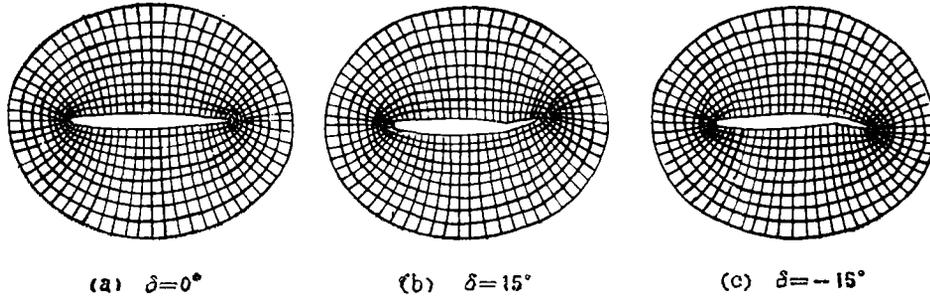


图1 不同时刻随时间变化的贴体网格

1. 翼型在跨音速流场中作沉浮，俯仰简谐振动的非定常气动载荷计算

由于这里考虑的仅仅是翼型做刚性振动，此时翼型本身的形状并不随时间变化。因此，如果将一“刚性”的贴体网格系统固连于翼型上，使其与翼型同步振动。于是，可以通过这种动坐标系与物理坐标系之间的转换关系，得到相应的任意时刻的贴体坐标以及该坐标系中各节点随时间的变化速度。

设翼型绕其距中心 $l$ 的点做俯仰及沉浮振动，其中俯仰振动的规律为：

$$\alpha = \alpha_m f(t) \tag{5.1}$$

相应的沉浮振动为：

$$h = -h_m g(t) \tag{5.2}$$

那么，在任意时刻，贴体网格中节点坐标为：

$$\left. \begin{aligned} x &= (x_0 + l) \cos \alpha + y_0 \sin \alpha - l \\ y &= -(x_0 + l) \sin \alpha + y_0 \cos \alpha + h \end{aligned} \right\} \tag{5.3}$$

这里， $(x_0, y_0)$ 是振动平衡位置处贴体网格节点坐标。如果将(5.3)式中以时间 $\tau$ 为变量进行求导，则可以得到相应网格节点坐标随时间的变化速度 $(x_\tau, y_\tau)$ 为：

$$\left. \begin{aligned} x_\tau &= [-(x_0 + l) \sin \alpha + y_0 \cos \alpha] \frac{d\alpha}{dt} \\ y_\tau &= -[(x_0 + l) \cos \alpha + y_0 \sin \alpha] \frac{d\alpha}{dt} + \frac{dh}{dt} \end{aligned} \right\} \tag{5.4}$$

利用(5.3)和(5.4)式，我们首先计算了翼型绕其1/4弦点( $l=1/4$ )做简谐俯仰振动的非定常气动载荷。此时，(5.1)式可以写成：

$$\alpha = \alpha_m \sin(ak_p \tau)$$

其中 $\alpha_m$ 是振动的幅值， $k_p$ 为折算频率， $k_p = \omega_p c / 2v_\infty$  ( $\omega_p$ 是振动的频率)。本算例中取 $\alpha_m = 1^\circ$ ， $k_p = 0.2$ 。计算在第三周期开始稳定，计算结果呈现出周期性。计算的非定常压力系数分布以局部复压力的第一阶谐振分别的实部和虚部的形式给出。图3示出了在翼型表面上

计算的非定常压力系数分布。同时，该计算结果与相应的实验结果进行了比较<sup>[10]</sup>。图4和图5分别给出第三周期计算升力系数与力矩系数随时间的变化过程。

利用(5.3)与(5.4)式，可以一次计算翼型同时进行沉浮和绕1/4弦的俯仰谐振动。本算例中取 $k_p = k_k = \pi/2$ ， $\alpha_m = 1^\circ$ ， $h_m = 0.03$ 。图6示出本计算所得第一阶谐振动非定常复压力系数的实部和虚部在翼型表面上的分布。图中同时示出分别两个自由度振动计算所得翼面上压力分布线性迭加后的结果。可以看出两种计算基本吻合。这亦证明了Davis和Malcolm<sup>[11]</sup>关于小振幅附体非定常跨音速流动可以迭加的实验结果。图7和图8分别示出计算的升力系数和力矩系数从第二到第三周期的变化过程。

### 2. 翼型带有谐振动控制面的非定常气动载荷计算

最后，我们对翼型带来绕其铰链轴做简谐振动控制面的跨音速非定常气动载荷进行了计算。算例中铰链轴距中心的距离 $s = 0.235$ 。控制面振动的规律为：

$$\delta = \delta_m \sin(2k_\delta \tau)$$

其中振幅 $\delta_m = 15^\circ$ ，折算频率 $k_\delta = \pi/2$ 。由于此时翼型带有一个振动的控制面，所以计算所需要的随时间变化的贴体网格只能通过文献[8]提出求解方程(3.1)和(3.2)的方法建立。该算例的计算结果表明，计算在第四周期所得计算结果呈现出周期性。每一周期大约需要200步计算。同样，计算得到的非定常压力系数亦采用第一阶谐复压力系数的实部和虚部的形式给出。图9示出了计算非定常压力系数在翼型表面上的分布。图10和11分别示出从第三到第四周期计算所得升力系数和力矩系数随时间的变化过程。

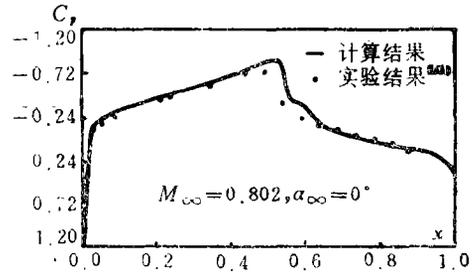


图2 在NACA64A-10翼型表面上定常压力分布

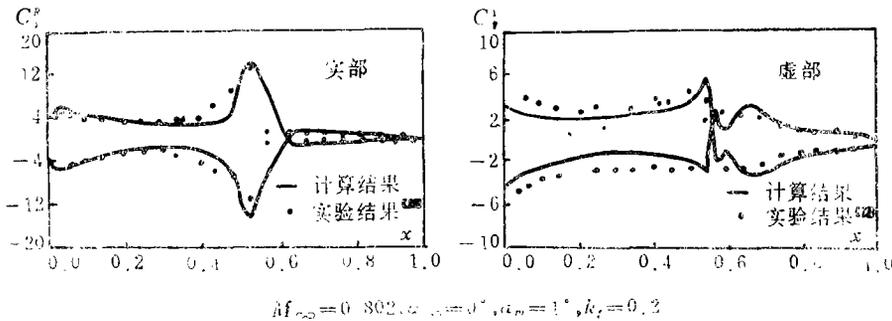


图3 NACA64A-10翼型表面非定常压力分布

## 六、结 论

本文通过将改进的通量分裂方法推广应用于随时间变化的贴体网格坐标，建立了可以用于计算跨音速非定常流场与气动力的非定常Euler方程的数值解法。同时，利用这种方法分别对NACA64A-10翼型俯仰，沉浮及带有振动控制面的跨音速非定常气动载荷进行了计算。部分计算结果与相应的实验数据进行了比较，吻合良好。这说明本方法可以应用于实际

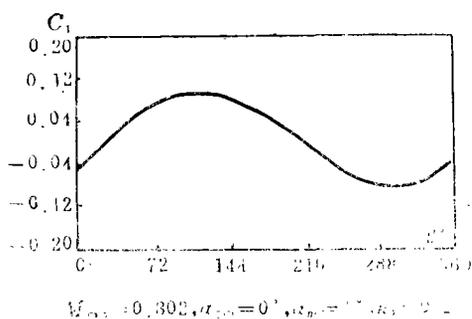


图4 升力系数在第三周期随时间的变化过程

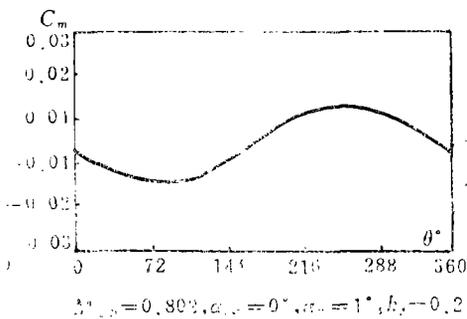
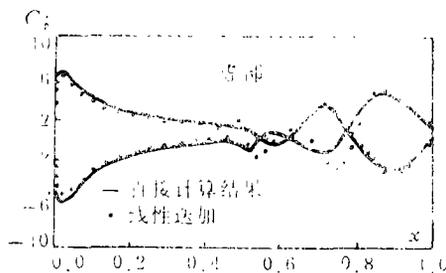
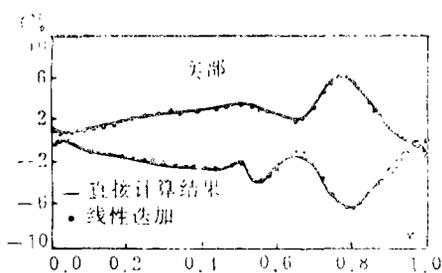


图5 力矩系数在第三周期随时间的变化过程



$M_\infty=0.802, \alpha_\infty=0^\circ, \alpha_m=1^\circ, h_m=0.03, k_p=k_s=\pi/2$

图6 沉浮、俯仰振动NACA64A-10翼型表面非定常压力分布

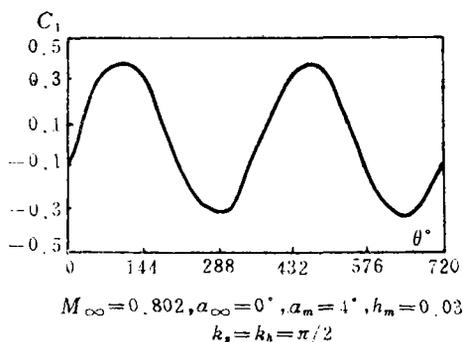


图7 升力系数在第二、三周期随时间的变化过程

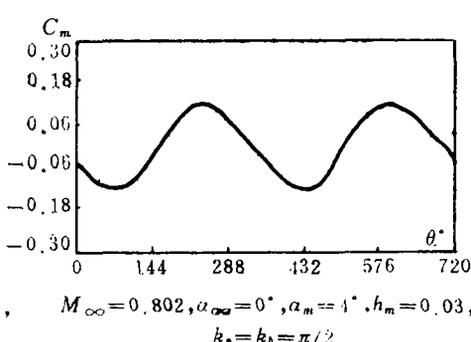
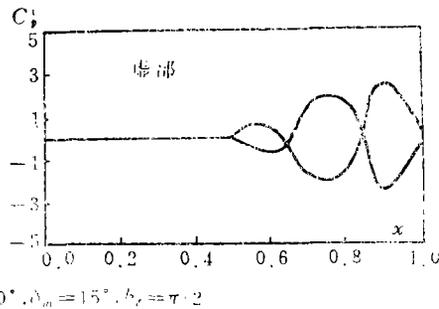
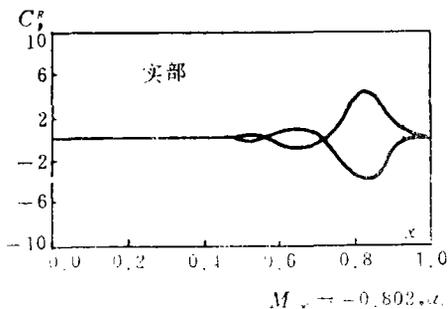


图8 力矩系数在第二、三周期随时间的变化过程



$M_\infty=0.802, \alpha_\infty=0^\circ, \alpha_m=15^\circ, h_m=\pi/2$

图9 带振动控制面的NACA64A-10翼型表面非定常压力分布

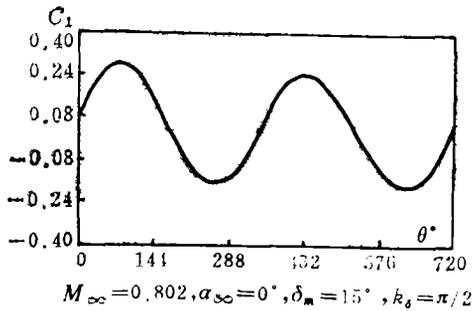


图10 升力系数在第三、四周期随时间的变化过程

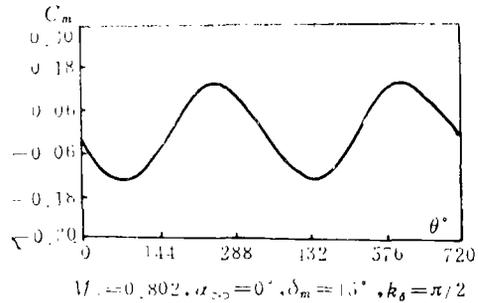


图11 力矩系数在第三、四周期随时间的变化过程

的跨音速非定常问题气动载荷计算,如跨音速颤振边界、颤振主动抑制及跨音速气动弹性响应等问题的计算。当然,对于一些粘性流动与非粘性流动区相互干扰较为严重的问题,流动的粘性项必须考虑。这就需要考虑对Euler方程解加入相应的附面层修正或直接求解Navier-Stokes方程。

### 参 考 文 献

- [1] Borland, C., D. Rizzitta, and H. Yoshihara, Numerical solution of three-dimensional unsteady transonic flow over swept wings, AIAA-paper, July (1980), 80—1369.
- [2] Sankar, L. N., J. B. Malone and Y. Tassa, An implicit conservative algorithm for steady and unsteady three-dimensional transonic potential flows, *Proceedings of the AIAA Fifth Computational Fluid Dynamics Conference*, Palo Alto, CA, June (1981), 199—212.
- [3] Jameson, A. and V. Venkatakrishnan, Transonic flow about oscillating airfoils using the Euler equations, AIAA-paper (1985), 85—1514.
- [4] Chyu, W. J., S. S. Davis, and K. S. Chang, Calculation of unsteady transonic flow over an airfoil, *AIAA Journal*, 19(6) (1981), 684—690.
- [5] 高正红, 跨音速定常与非定常流动的Euler方程解, 西北工业大学博士论文 (1989).
- [6] Thomas, J. L., B. Van Leer and R. W., Walfer, Implicit flux-split schemes for the Euler equations, AIAA-paper (1985), 85—1680.
- [7] Thompson, J. F., Grid generation techniques on computational fluid dynamics, *AIAA Journal*, 22 (1984), 1505.
- [8] 高正红, 用多重网格法快速生成随时间变化的贴体网格, 航空学报, 9(3) (1988).
- [9] 高正红、刘千刚, 一种求解Euler方程的改进的通量分裂方法。(待发表)
- [10] Davis, S. S. and G. N. Malcolm, Experimental unsteady aerodynamics of conventional and super-critical airfoils, NACA TM 81221.
- [11] Davis, S. S. and G. N. Malcolm, Experiments in unsteady transonic flow, *Proceedings of AIAA/ASME/AHS 20th Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*, St. Louis, Mo., April (1979).

# Unsteady Transonic Aerodynamic Loadings on the Airfoil Caused by Heaving, Pitching Oscillations and Control Surface

Gao Zheng-hong

*(Northwestern Polytechnical University, Xi'an)*

## Abstract

An implicit upwind finite volume solver for the Euler equations using the improved flux-splitting method is established and used to calculate the transonic flow past the airfoils with heaving, pitching oscillations and the control surface. Results are given for the NACA 64A-10 airfoil which is in harmonic heaving and pitching oscillations and with the control surface in the transonic flow field. Some computational results are compared with the experiment data and the good agreements are shown in the paper.

**Key words** transonic, unsteady flow, Euler equations, heaving oscillation, pitching oscillation