

# 杆、壳子空间变分原理\*

郑泉水 杨德品 宋固全

(江西工业大学, 1991年9月20日收到)

## 摘 要

本文建立了杆、壳的子空间变分原理的一般形式, 将它作为杆、壳的本构近似理论中的控制方程, 并由此得出杆、壳的本构方程, 所得结果令人满意.

**关键词** 杆、壳理论 子空间变分原理 本构方程

## 一、引 言

在杆、壳理论的发展中, 我们可以发现它有两种来源<sup>[1][2]</sup>: Cosserat 曲线、曲面理论虽然能提供精确的杆、壳方程, 但它的本构方程一般须经本构实验才能得到, 这使该理论的实用有很多困难. 三维方程的近似化理论利用杆、壳材料的连续介质本构关系, 经过数学处理, 从而得到杆、壳的本构方程.

在文[3]中, 作者提出了直杆、板的子空间变分原理. 本文在此基础上给出了杆、壳子空间变分原理的一般形式. 在三维方程近似理论中, 它可作为杆、壳本构近似的控制方程, 得到杆、壳理论中的本构方程. 从求解过程中, 我们可知杆、壳本构方程的精度由内截面上应力近似的精度所控制, 同时证明了在  $H_n$  空间<sup>[4]</sup>内得到的杆、壳本构方程的误差为  $O(\epsilon_n)$ .

## 二、杆的子空间变分原理

设组成杆的材料为超弹性的, 在三维非极弹性的变分问题中, 总势能泛函为<sup>[5]</sup>:

$$\Pi(\mathbf{u}) = \int_{K_0} [\Sigma(\mathbf{F}) - \rho_0(\mathbf{b} - \mathbf{a})\mathbf{u}] dV - \int_{\partial K_0^s} \mathbf{p} \mathbf{u} dA \quad (2.1)$$

这里,  $\mathbf{b}$  为体力密度,  $\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{u}}$  为加速度,  $\Sigma(\mathbf{F})$  为变形势能泛函,  $\mathbf{F}$  为变形梯度,  $\partial K_0^s$  为物体表面  $\partial K_0$  上的应力边界部份. 对  $\mathbf{u}$  作满足位移边界条件:

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad (\text{的 } \partial K_0^d \text{ 上}) \quad (2.2)$$

的变分  $\delta \mathbf{u}$ , 且规定  $\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{u}}$  不参加变分 (原则可用 Hamilton 原理, 结果将是一致的), 利用本构方程

$$\boldsymbol{\tau} = d\Sigma/d\mathbf{F} \quad (2.3)$$

\* 何福保推荐.

$\tau$ 为第一Kirchhoff应力, 从变分驻值问题 $\delta\Pi=0$ 可给出:

$$\text{Div}\tau + \rho_0(\mathbf{b}-\mathbf{a})=0 \quad (\text{在} K_0 \text{内}) \quad (2.4)$$

$$\tau\mathbf{n}=\mathbf{p} \quad (\text{面}\partial K_0^a \text{上}) \quad (2.5)$$

总势能泛函(2.1)的变分等价于平衡方程及应力边界条件.

对于一般曲杆, 采用文[4]中的记法,  $K_0$ 中采用Frenet标架,  $\mathcal{A}_0$ 面上采用笛卡尔标架. 由 $S$ 和 $S+\Delta S$ 两横截面截取杆的一个微段 $\Delta K_0$ . (如图1), 将 $\Delta K_0$ 作为一个三维体考虑. 假设作用在面 $\mathcal{A}(S)$ 和面 $\mathcal{A}(S+\Delta S)$ 上的应力 $\tau_S, \tau_{S+\Delta S}$ 已知, 并作为外荷载. 则 $\Delta K_0$ 的边界除有限个点外均为应力边界. 根据(2.1)式,  $\Delta K_0$ 的总势能泛函为:

$$\begin{aligned} \Delta\Pi(\mathbf{u}) = & \int_S^{S+\Delta S} \left[ \iint_{\mathcal{A}} \Lambda(\Sigma - \rho_0(\mathbf{b}-\mathbf{a})\mathbf{u})dA - \oint_{\partial\mathcal{A}} \Lambda\eta\mathbf{p}udC \right] dS \\ & - \left[ \iint_{\mathcal{A}(S+\Delta S)} \tau_{S+\Delta S}\mathbf{u}dA - \iint_{\mathcal{A}(S)} \tau_S\mathbf{u}dA \right] \end{aligned} \quad (2.6)$$

令 $\Delta S \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta\Pi}{\Delta S} = & \iint_{\mathcal{A}} \Lambda[\Sigma - \rho_0(\mathbf{b}-\mathbf{a})\mathbf{u}]dA - \oint_{\partial\mathcal{A}} \Lambda\eta\mathbf{p}udC \\ & - \iint_{\mathcal{A}} (\partial_S\tau_S\mathbf{u} + \tau_S\partial_S\mathbf{u})dA \\ & - \oint_{\partial\mathcal{A}} \tau_S\mathbf{u}gdC \end{aligned} \quad (2.7)$$

式中 $g$ 为待定常数. 设 $\partial_S\mathbf{u}=\mathbf{v}$ 为一独立变量, 则得到:

$$\begin{aligned} \Pi^S(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = & \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \Delta\Pi/\Delta S \\ = & \iint_{\mathcal{A}} [\Lambda\Sigma^S - (\Lambda\rho_0\bar{\mathbf{b}} + \partial_S\tau_S)\mathbf{u} - \tau_S\mathbf{v}]dA \\ & - \oint_{\partial\mathcal{A}} (\tau_Sg + \Lambda\eta\mathbf{p})udC \end{aligned} \quad (2.8)$$

式中

$$\Sigma^S = \Sigma|_{\partial_S\mathbf{u}=\mathbf{v}} \quad \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$$

对泛函 $\Pi^S(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ 变分,  $\rho_0\mathbf{a}=\rho_0\ddot{\mathbf{u}}$ 项不参加变分:

$$\begin{aligned} \delta\Pi^S = & \iint_{\mathcal{A}} [\Lambda\tau\delta F - (\Lambda\rho_0\bar{\mathbf{b}} - \partial_S\tau_S)\delta\mathbf{u} - \tau_S\delta\mathbf{v}]dA \\ & - \oint_{\partial\mathcal{A}} (\tau_Sg + \Lambda\eta\mathbf{p})\delta\mathbf{u}dC \end{aligned} \quad (2.9)$$

因为

$$\begin{aligned} \delta F = & \delta(I + \text{Grad}\mathbf{u}) = \text{Grad}\delta\mathbf{u} \\ = & \frac{1}{A} [\partial_S\delta\mathbf{u} + \tau y\partial_S\delta\mathbf{u} - \tau x\partial_S\delta\mathbf{u}] \otimes \mathbf{k} + \text{Grad}\delta\mathbf{u} \\ \iint_{\mathcal{A}} \Lambda\tau\delta F dA = & \iint_{\mathcal{A}} (\tau\mathbf{k})\delta\mathbf{v}dA + \oint_{\partial\mathcal{A}} \tau\mathbf{k}\delta\mathbf{u}\tau(y\bar{\mathbf{i}}_z - x\bar{\mathbf{i}}_y)dC \\ & - \iint_{\mathcal{A}} [\tau y\delta\mathbf{u}\partial_S(\tau\mathbf{k})dA - \tau x\delta\mathbf{u}\partial_S(\tau\mathbf{k})]dA \end{aligned}$$

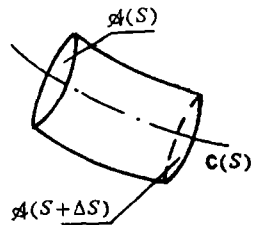


图 1

$$+ \iint_{\mathcal{A}} (\tau \mathbf{k} - A \overset{\circ}{\text{Div}} \boldsymbol{\tau}) \delta \mathbf{u} dA + \oint_{\partial \mathcal{A}} A \delta \mathbf{u} \tau \bar{n} dC \quad (2.10)$$

代入(2.9)式:

$$\begin{aligned} \delta \Pi^s = & \iint_{\mathcal{A}} [\delta \mathbf{u} (-A \rho_0 \bar{\mathbf{b}} - \partial_s \boldsymbol{\tau}_s - \tau y \partial_z (\boldsymbol{\tau} \mathbf{k}) + \tau x \partial_y (\boldsymbol{\tau} \mathbf{k}) \\ & - A \overset{\circ}{\text{Div}} \boldsymbol{\tau} + k \boldsymbol{\tau} \mathbf{i}) + \delta v (\boldsymbol{\tau} \mathbf{k} - \boldsymbol{\tau}_s)] dA \\ & + \oint_{\partial \mathcal{A}} \delta \mathbf{u} [-A \eta \mathbf{p} - \boldsymbol{\tau}_s g + A \bar{\boldsymbol{\tau}} \mathbf{b} + \boldsymbol{\tau} \mathbf{k} \tau (y \bar{n}_z - x \bar{n}_y)] dC \end{aligned} \quad (2.11)$$

从变分驻值条件

$$\delta \Pi^s = 0 \quad (2.12)$$

可得到下列方程

$$\partial_s \boldsymbol{\tau}_s + \tau (y \partial_z - x \partial_y) \boldsymbol{\tau} \mathbf{k} + A \overset{\circ}{\text{Div}} \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau} \mathbf{k} + \rho_0 A \bar{\mathbf{b}} = 0 \quad (2.13)$$

$$\boldsymbol{\tau}_s - \boldsymbol{\tau} \mathbf{k} = 0 \quad (2.14)$$

$$\boldsymbol{\tau} \mathbf{k} \tau (y \bar{n}_z - x \bar{n}_y) + A \boldsymbol{\tau} \bar{n} - \boldsymbol{\tau} g - A \eta \mathbf{p} = 0 \quad (2.15)$$

将(2.14)式代入(2.13)式:

$$\partial_s (\boldsymbol{\tau} \mathbf{k}) + \tau (y \partial_z - x \partial_y) \boldsymbol{\tau} \mathbf{k} + A \overset{\circ}{\text{Div}} \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau} \mathbf{k} + \rho_0 A \bar{\mathbf{b}} = 0$$

此式即为平衡方程(2.4)式在曲杆上的矢量表达式。将(2.14)式代入(2.15)式应为边界条件(2.5)式,这是总势能泛函变分的必然结果。将(2.5)、(2.14)式代入(2.15)式,并利用公式<sup>(4)</sup>

$$\mathbf{n} = \cos \beta \bar{n} - \sin \beta \mathbf{k}$$

可得到:

$$\boldsymbol{\tau} \mathbf{k} (A \tan \beta + \tau y \bar{n}_z - \tau x \bar{n}_y) - \boldsymbol{\tau} \mathbf{k} g = 0$$

从上式可得出待定常数:

$$g = \tau y \bar{n}_z - \tau x \bar{n}_y + A \tan \beta \quad (2.16)$$

上式实际上反映了下面的事实:

$$\partial_s \int_{\mathcal{A}} f dA = \int_{\mathcal{A}} \partial_s f dA + \oint_{\partial \mathcal{A}} f (\tau y \bar{n}_z - \tau x \bar{n}_y + A \tan \beta) dC \quad (2.17)$$

将g代回(2.15)式,成为

$$A (\eta \mathbf{p} - \boldsymbol{\tau} \bar{n} + \boldsymbol{\tau}_s \tan \beta) = \tau (\boldsymbol{\tau} \mathbf{k} - \boldsymbol{\tau}_s) (y \bar{n}_z - x \bar{n}_y) \quad (2.18)$$

(2.13)、(2.14)、(2.18)式是子空间势能泛函(2.8)式的Euler变分方程及自然边界条件。我们分别称为拟平衡方程、拟连续条件及拟边界条件。

对于一般情况下的曲杆,预先给出横截面 $\mathcal{A}$ 上的应力分布 $\boldsymbol{\tau}_s$ 是一件十分困难的事。因此,我们必须进行一些近似化处理。假如我们以 $\boldsymbol{\tau}_s$ 在 $H_n$ 空间上的投影 $P_n \boldsymbol{\tau}_s$ 近似代替应力 $\boldsymbol{\tau}_s$ ,则给问题的处理带来很大的方便。利用 $P_n \boldsymbol{\tau}_s$ 代替 $\boldsymbol{\tau}_s$ 后,(2.14)式成为

$$P_n \boldsymbol{\tau}_s - \boldsymbol{\tau} \mathbf{k} = 0 \quad (2.19)$$

上式实际上为拟连续条件(2.14)式仅在 $H_n$ 空间内成立。

一般来说,如果我们按照经典杆理论所提供的 $\mathcal{A}$ 面上的应力分布 $\hat{\boldsymbol{\tau}}_s$ 可以作为 $P_n \boldsymbol{\tau}_s$ 的应力分布。事实上,设 $\hat{\boldsymbol{\tau}}_s$ 为 $M^a$ 的函数

$$\hat{\boldsymbol{\tau}}_s = \hat{\boldsymbol{\tau}}_s(\mathbf{M}^a) \quad (2.20)$$

$\hat{\boldsymbol{\tau}}_s$ 只须满足

$$\langle \hat{\boldsymbol{\tau}}_s, G^a \rangle = M^a \quad (2.21)$$

即可做到

$$\dot{\mathbf{t}}_s = P_n \boldsymbol{\tau}_s = \mathbf{M}^a \mathbf{G}_a$$

因此, 我们可以总结得到下面杆的子空间变分原理

**定理** (曲杆的子空间变分原理) 杆的子空间总势能泛函

$$\begin{aligned} \Pi^S(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = & \int_{\mathcal{A}} [\Sigma^S - \rho_0 \bar{b} \mathbf{u} - \partial_s(P_n \boldsymbol{\tau}_s) \mathbf{u} - P_n \boldsymbol{\tau}_s \mathbf{v}] dA \\ & - \oint_{\partial \mathcal{A}} [P_n \boldsymbol{\tau}_s (\tau y \dot{n}_x - \tau x \dot{n}_y + A \tan \beta) + A \eta \mathbf{p}] u dC \end{aligned} \quad (2.22)$$

的Euler变分方程及自然边界条件为

拟平衡方程

$$\partial_s(P_n \boldsymbol{\tau}_s) + \tau(y \partial_x - x \partial_y) \boldsymbol{\tau} \mathbf{k} + A \text{Div} \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau} \mathbf{i} \mathbf{k} + \rho_0 \bar{b} \mathbf{A} = 0 \quad (2.23)$$

拟连续条件

$$P_n \boldsymbol{\tau}_s - \boldsymbol{\tau} \mathbf{k} = 0 \quad (2.19)$$

拟边界条件

$$A(\eta \mathbf{p} - \boldsymbol{\tau} \dot{n} - P_n \dot{n}_s \tan \beta) = \boldsymbol{\tau} (\boldsymbol{\tau} \mathbf{k} - P_n \boldsymbol{\tau}_s) (y_x \dot{n} - x_y \dot{n}) \quad (2.24)$$

其中  $P_n \boldsymbol{\tau}_s$  为已知, 泛函变量  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in F \times F$ , 在下述条件

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{Curl } \mathbf{u} |_{\partial_x n} = 0 \quad (\text{在点 } P_0 \in \mathcal{A}) \quad (2.25)$$

下变分, 子空间应变能密度  $\Sigma^S$  和曲杆的材料在三维弹性时的本构关系为

$$\boldsymbol{\tau} = d\Sigma/d\mathbf{F} |_{\partial_s \mathbf{u} = \mathbf{v}} \quad \Sigma^S = \Sigma |_{\partial_s \mathbf{u} = \mathbf{v}}$$

(2.25)式实际上是  $\mathcal{A}$  面的刚性位移及转动的约束条件。

对于曲杆中最简单的一种特例——直杆, 此时  $K$  为零,  $\tau$  为零, 子空间势能泛函简化为:

$$\begin{aligned} \Pi^S(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = & \iint_{\mathcal{A}} [\Sigma^S - (\rho_0 \bar{b} + \partial_s P_n \boldsymbol{\tau}_s) \mathbf{u} - P_n \boldsymbol{\tau}_s \mathbf{v}] dA \\ & - \oint_{\partial \mathcal{A}} \eta (\mathbf{p} + P \boldsymbol{\tau}_s \sin \beta) u dC \end{aligned}$$

在文[6]中, 利用上式  $\Pi^S(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  的变分驻值导出了深梁的本构关系, 修正了 Cowper<sup>[7]</sup> 的结果, 增加了荷载修正项, 考虑了荷载效应及荷载各种分布情况。与三维精确结果相比, 当厚跨比较大时, 忽略荷载项带来了较大误差。

### 三、壳的子空间变分原理

取壳的流形为其中面  $\mathcal{A}$ , 在  $\mathcal{A}$  上取随动曲线坐标系  $\{\theta^a; a=1, 2\}$ , 沿着  $\mathcal{A}$  的正法线方向取坐标  $\theta^3 = z$ , 在  $\mathcal{A}$  上任一点沿坐标线方向取一微柱壳体 (图2), 设微柱壳体的四个侧面  $\mathcal{A}(\theta^1)$ ,  $\mathcal{A}(\theta^1 + \Delta\theta^1)$ ,  $\mathcal{A}(\theta^2)$ ,  $\mathcal{A}(\theta^2 + \Delta\theta^2)$  上的应力  $S^{i1}(\theta^1)$ ,  $S^{i1}(\theta^1 + \Delta\theta^1)$ ,  $S^{i2}(\theta^2)$ ,  $S^{i2}(\theta^2 + \Delta\theta^2)$  为已知, 则这个微柱壳体的总势能泛函为:

$$\begin{aligned} \Delta \Pi = & \int_{\Delta V} (\Sigma - \rho_0 \bar{b} \mathbf{u}) dV - \oint_{\partial \Delta V} \mathbf{p} u dS \\ = & \int_C \int_{\Delta A} \mu (\Sigma - \rho_0 \bar{b} \mathbf{u}) dA dz - \int_{\Delta A} (\mathbf{p}^i u_i \mu \eta) \dot{n}^i dA \end{aligned}$$

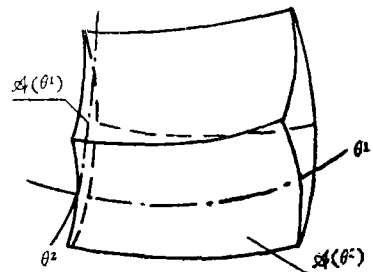


图 2

$$\begin{aligned}
& - \left[ \int_{\mathcal{A}(\theta^1 + \Delta\theta^1)} \sqrt{g} S^{i1} u_i d\theta^2 dz - \int_{\mathcal{A}(\theta^1)} \sqrt{g} S^{i1} u_i d\theta^2 dz \right] \\
& - \left[ \int_{\mathcal{A}(\theta^2 + \Delta\theta^2)} \sqrt{g} S^{i2} u_i d\theta^1 dz - \int_{\mathcal{A}(\theta^2)} \sqrt{g} S^{i2} u_i d\theta^1 dz \right]
\end{aligned} \quad (3.1)$$

令  $\Delta A \rightarrow 0$ , 并注意:

$$\sqrt{g}_{, \alpha} = [\mathbf{g}_1 \ \mathbf{g}_2 \ \mathbf{g}_3]_{, \alpha} = \bar{\Gamma}^i_{i\alpha} [\mathbf{g}_1 \ \mathbf{g}_2 \ \mathbf{g}_3] = \bar{\Gamma}^i_{i\alpha} \sqrt{g} \quad (3.2)$$

则(3.1)式可简化为

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \Pi}{\Delta A} = & \int_C \mu (\Sigma - \rho_0 \delta u - \bar{\Gamma}^i_{i\alpha} S^{i\alpha} u_i - S^{i\alpha} u_i \\
& - S^{i\alpha} u_{i,\alpha} - S^{i\alpha} u_j \bar{\Gamma}^j_{i\alpha}) dz - [\mu \eta (f \\
& - S^{i\alpha} \mu^{\beta}_{\alpha} n_{\beta}) u_i]_{z^+}^{z^-}
\end{aligned} \quad (3.3)$$

在上式中, 将  $u_i, u_{i,\alpha}$  作为独立变量后, 记为

$$\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \Pi}{\Delta A} \frac{df}{dA} = \Pi^S(u_i, u_{i,\alpha}) \quad (3.4)$$

对  $\Pi^S(u_i, u_{i,\alpha})$  进行变分, 利用本构关系(2.3)式可得到:

$$\begin{aligned}
\delta \Sigma &= \alpha \Sigma / dF \quad \delta F = \tau \delta \text{Grad } u = \tau^{ij} \delta u_{i,j} \\
&= \tau^{i\alpha} \delta u_{i,\alpha} + \tau^{i3} \delta u_{i,3} \\
\mu \delta \Sigma &= \mu \tau^{i\alpha} \delta u_{i,\alpha} + (\mu \tau^{i3} \delta u_i)_{,3} - \mu_{,3} \tau^{i3} \delta u_i - \mu \tau^{i3}_{,3} \delta u_i \\
\delta \Pi^S(u_i, u_{i,\alpha}) &= \int_C \mu \{ (\tau^{i\alpha} - S^{i\alpha}) \delta u_{i,\alpha} - [\tau^{i\alpha} |_{\alpha} + \tau^{i3} |_{,3} \\
&+ \rho_0 \delta^i + (S^{i\alpha} - \tau^{i\alpha})_{, \alpha} + \bar{\Gamma}^j_{i\alpha} (S^{i\alpha} - \tau^{i\alpha}) \\
&+ \Gamma^j_{i\alpha} (S^{j\alpha} - \tau^{j\alpha})] \delta u \}_i dz + [\mu (p^i \eta \\
&- S^{i\alpha} \mu^{\beta}_{\alpha} n_{\beta} \eta - \tau^{i3}) \delta u_i]_{z^+}^{z^-}
\end{aligned} \quad (3.5)$$

从子空间势能泛函  $\Pi^S(u_{i,\alpha}, u_i)$  的驻值:

$$\delta \Pi^S(u_i, u_{i,\alpha}) = 0 \quad (3.6)$$

可得到:

$$\tau^{ij} |_{,j} + \rho_0 \delta^i + (S^{i\alpha} - \tau^{i\alpha})_{, \alpha} + \bar{\Gamma}^j_{i\alpha} (S^{i\alpha} - \tau^{i\alpha}) + \bar{\Gamma}^j_{i\alpha} (S^{j\alpha} - \tau^{j\alpha}) = 0 \quad (3.7)$$

$$\tau^{i\alpha} - S^{i\alpha} = 0 \quad (3.8)$$

$$p^i = \tau^{i\alpha} n_{\beta} \mu^{\beta}_{\alpha} + \tau^{i3} n_3 + (S^{i\alpha} - \tau^{i\alpha}) \eta_{\beta} \mu^{\beta}_{\alpha} \quad (3.9)$$

(3.7)~(3.8)式是变分问题(3.6)式的Euler方程及自然边界条件。事实上, 对于一般情况下的壳体, 要预先给出  $S^{i\alpha}$  的精确分布, 几乎是不可能的事情。因此我们有必要进行一些近似处理。和杆的子空间变分原理处理方法一样, 用  $S^{i\alpha}$  在  $H_n$  空间上的投影  $P_n S^{i\alpha}$  近似地代替  $S^{i\alpha}$ , 此时, 我们可以得到如下的壳体的子空间变分原理:

**定理 (壳体的子空间变分原理)** 壳体子空间总势能泛函:

$$\begin{aligned}
\Pi^S(u_i, u_{i,\alpha}) = & \int_C (\Sigma^S - \rho_0 \delta^i u_i - \bar{\Gamma}^j_{i\alpha} P_n S^{i\alpha} u_i - (P_n S^{i\alpha})_{, \alpha} u_i \\
& - P_n S^{i\alpha} \cdot u_{i,\alpha} - P_n S^{i\alpha} u_j \bar{\Gamma}^j_{i\alpha}) dz - [\mu \eta (p^i - P_n S^{i\alpha} n_{\beta} \mu^{\beta}_{\alpha}) u_i]_{z^+}^{z^-}
\end{aligned} \quad (3.10)$$

的Euler变分方程及自然边界条件为

拟平衡方程:

$$\tau^{ij} |_{,j} + \rho_0 \delta^i + (P_n S^{i\alpha} - \tau^{i\alpha})_{, \alpha} + \bar{\Gamma}^j_{i\alpha} (P_n S^{i\alpha} - \tau^{i\alpha})$$

$$+\bar{\Gamma}_{;a}^i(P_n S^{ja} - \tau^{ja}) = 0 \quad (3.11)$$

拟连续条件

$$P_n S^{ia} - \tau^{ia} = 0 \quad (3.12)$$

拟边界条件

$$p^i = \tau^{ia} n_{\beta} \mu_a^{\beta} + \tau^{i3} n_3 + (P_n S^{ia} - \tau^{ia}) n_{\beta} \mu_a^{\beta} \quad (3.13)$$

其中  $P_n S^{ia} = S^{ia}(M^r)$  为已知, 泛函变量  $(u_i, u_{i;a}) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}$  在下列条件下

$$u_i = 0 \quad \partial u_a / \partial z = 0 \quad (\text{在 } z=0 \text{ 上}) \quad (3.14)$$

任意变分, 子空间应变能密度  $\Sigma^s$  及壳体材料的三维本构关系已知为

$$\Sigma^s = \Sigma|_{(u_{i;a}, u_i)} \quad \tau = d\Sigma/dF \quad (3.15)$$

(3.14)式实际上是约束壳体法线方向的刚性位移及转角的条件。

#### 四、子空间变分原理求杆、壳本构方程及误差分析

在二、三两部份中, 建立了杆、壳的子空间变分原理, 通过子空间变分原理, 我们能方便地得到杆、壳的本构方程。以壳体为例, 在(3.10)式中, 我们可以取经典壳体理论所提供的截面应力分布  $\dot{S}^{ia}$  为  $P_n \dot{S}^{ia}$ 。实际上,  $\dot{S}^{ia}$  为  $M^r$  的函数

$$\dot{S}^{ia} = \dot{S}^{ia}(M^r) \quad (4.1)$$

$\dot{S}^{ia}$  只须满足<sup>[4]</sup>

$$\langle Sg^a G^r \rangle = M^r a^a$$

即可得到

$$\dot{S}^{ia} = P_n S^{ia}$$

将(4.1)式代入(3.10)式中, 通过变分计算, 可得到关系式

$$U = (u_i, u_{i;a}) = U(M^r)$$

再将上式代入壳体的应变度量方程, 最后即可得到壳体的广义应力-广义应变关系

$$K_a = K_a(M^r) \quad (4.2)$$

此式即为壳的本构方程。

记由(3.11)~(3.13)式所确定的应力为  $\tau^{*ij}$ ,  $\tau^{ij}$  为(3.7)~(3.9)式所确定的应力, 即壳内的精确应力值, 很容易证明

$$P_n \tau^{ij} = \tau^{*ij}$$

而<sup>[4]</sup>

$$\tau^{ij} = P_n \tau^{ij} + O(\varepsilon_n)$$

因此

$$\tau^{*ij} = \tau^{ij} + O(\varepsilon_n) \quad (4.3)$$

总势能泛函驻值问题实际上是平衡方程的能量描述。在变分计算过程中, 我们利用了三维本构关系

$$\tau = d\Sigma/dF = C(F)$$

$C$  为可微函数。当  $\tau^*$  代替  $\tau$  时, 很容易地推导出<sup>[4]</sup>最后得到的本构关系(4.2)式的误差量级为  $O(\varepsilon_n)$ 。从求解过程中, 我们亦知, 本构方程的误差完全由  $\tau$  的近似误差所决定。

在文[8]中, 我们利用子空间变分原理求出了小变形时 Reissner 板的本构方程。与文[2]中结果相比, 在其本构方程中增加了荷载(包括面内荷载)项。特别是对于多层层合板,

得到了它的全截面本构方程,避免了繁琐的分层计算,为层合板的分析计算提供了有效的途径。

### 参 考 文 献

- [1] Antman, S. S., *The Theory of Rods, Encyclopedia of Physics* (Ed by S. Flügge), Springer-Verlag, Vol. VIa/2 (1972), 641—754.
- [2] Naghdi, P. M., *The Theory of Shells and Plates, Encyclopedia of Physics* (Ed by S. Flügge), Springer-Verlag, Vol. VIa/2 (1972), 425—640.
- [3] Zheng Quan-shui, Yang De-pin and Wang An-ping, Subspace variational principles and their applications for developing the constitutive equations of rods, plates and shells, *Int. Conf. Comput. Engng. Sci.*, Atlanta, Georgia, U. S. A. (1988).
- [4] 郑泉水、杨德品、宋固全, 杆、壳理论在Hilbert空间的构造, *应用数学和力学*, 13(5) (1992), 429—442.
- [5] 郭仲衡, 《非线性弹性理论》, 科学出版社 (1980).
- [6] 卢小杼、杨德品, 基于子空间变分原理的深梁本构方程, *江西工业大学学报*, (2)(1988), 1—11.
- [7] Cowper, G. R., The shear coefficients in Timoshenko's beam theory, *J. Appl. Mech.*, 33(1966), 335—340.
- [8] 宋固全、杨德品、郑泉水, 基于子空间变分原理的厚板本构方程, 第七届华东固体力学学术会议论文集, 《江西工业大学学报》专辑(1991). (待出版)

## Subspace Variational Principle of Rods and Shells

Zheng Quan-shui    Yang De-pin    Song Gu-quan

(Jiangxi Polytechnic University, Nanchang)

### Abstract

This paper builds the general forms of subspace variational principles of rods and shells which are taken as the controlled equations of the constitutive theories developed from the three-dimensional (non-polar) continuum mechanics. And the constitutive equations of rods and shells using the principles are satisfactory.

**Key words** theory of rods and shells, subspace variational principle, constitutive equations