应用数学和力学，第13卷第11期（1992年11月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

复合材料力学的Hamilton体系和辛几何方法（Ⅰ）——一般原理*

钟万勰　欧阳华江

（大连理工大学工程力学研究所，1991年7月1日收到）

摘　要

首次把用于动态体系的Hamilton系统引入到静力学中，建立了与原控制方程相对应的Hamilton方程，可以对全状态向量分离变量，求出解析解和半解析解，特别适合于求解矩形域平面问题和柱形域空间问题。

本文建立了一种求解偏微分方程的新方法，并对复合材料力学中的层合板的弯曲和平面应力问题的求解做了详细说明。

关键词　Hamilton体系　辛几何　解析解　半解析解

一、问题的提出

数学力学和数学物理中的问题归结为求解一个或一组偏微分方程的初边值问题。

过去通行的解析解法是尽量消元，把原偏微分方程组化为一个或少数升阶的方程，然后最常用的是分离变量法[1]。

这种传统的解法遇到两个问题：1．若控制方程中出现奇数次偏导数，一般无法分离变量；2．即使硬性用分离变量的形式代入原方程，如把解设为$\sum\exp[\lambda x]g(y,z)$代入，一般会导致非Sturm-Liouville本征问题，本征函数的正交性和完备性在理论上不能保证[2]。这时分离变量法是行不通的。

过去的半解析法其实是Канторович法的推广，对固支边，在展开方向上一般选的不是（一般说来无法选出）本征函数，计算精度大受影响，通行的补救办法是：或增加级数的项数，或进行迭代。这两种做法都加大了计算量。

传统的方法使用多年，如果后人继续使用它求解数学力学和数学物理中尚未获解或尚未很好解决的问题，成功的机会自然越来越少，于是想到应该改变方法论，跳出传统的Euclid空间束缚，建立一套新方法。

在过去的工作中，作者发现计算力学、最优控制理论及柱形域上的偏微分方程的半解析解之间在数学形式上存在着一一对应的模拟关系[3]，这一相似性原理的发现使得计算力学和最优控制理论这两个在理论上原本互不相关、独立发展的领域里的成果可以互相促进，为计

* 国家博士后科学基金资助项目。

算力学解决最优控制问题提供了理论基础，已开展了一些研究工作[4~6]。

计算力学的理论和方法给最优控制理论的研究提供了新手段，反过来，最优控制理论中的成果也可移植到力学中而产生新意。状态空间法和Hamilton体系在最优控制理论中得到成功应用[7]，其思想具有启发意义，作者把Hamilton体系引入到数学弹性力学中，由此建立了辛正交归一关系[8]，提出了求解力学问题的新的解析解法和半解析解法，可以克服上述的传统解析解法和半解析解法的缺点，获得较好的结果。

Hamilton体系早已用于动态问题，是动力学基本方程的三种形式之一，在静力学中建立Hamilton体系（与动态问题的Hamilton体系有很大不同）尚属首次。

二、预 备 知 识

鉴于对控制方程进行消元升阶所带来的问题，这里反其道而行之，象状态空间法那样增元降阶为一阶偏微分方程，为使此降阶方程组符合Hamilton列式，不用状态空间法的增元方法，而采用力学中常用的广义变分原理。

考虑各向异性线弹性材料，设$\boldsymbol{q}$是广义位移向量，$\boldsymbol{p}$是广义力向量，二者构成全状态向量$\boldsymbol{r}=\{\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}\}^T$，这里斜黑体字母表示向量，正黑体字母表示矩阵，应变能密度$U=U(\boldsymbol{q})$是$\boldsymbol{q}$的函数，通过Legendre变换，构造Hamilton函数[9]

$$\mathscr{H}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})=\boldsymbol{p}^T\dot{\boldsymbol{q}}-U(\boldsymbol{q}) \tag{2.1}$$

在(2.1)中，$\dot{\boldsymbol{q}}$是$\boldsymbol{q}$对某一展开坐标的偏导数，不妨认为$\dot{\boldsymbol{q}}=\partial\boldsymbol{q}/\partial x$，其中$\dot{\boldsymbol{q}}$必须通过应力应变关系解出来并代入(2.1)中，使$\mathscr{H}$是$\boldsymbol{q}$和$\boldsymbol{p}$的函数，而不能显含$\dot{\boldsymbol{q}}$。

广义变分原理可写为

$$\left.\begin{aligned}&\Pi=\int_V\{\boldsymbol{p}^T\dot{\boldsymbol{q}}-\mathscr{H}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})\}dV+\text{外力势能}\\&\delta\Pi=0\end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

由$\delta\Pi=0$展开，可推出

$$\dot{\boldsymbol{r}}=\mathbf{H}\boldsymbol{r}+f \tag{2.3}$$

其中$\mathbf{H}$是包含偏微分算子的Hamilton矩阵，这点是与动态问题Hamilton矩阵的显著差别，若取x为展开坐标，即$\dot{\boldsymbol{r}}=\partial\boldsymbol{r}/\partial x$，则$\mathbf{H}=\mathbf{H}(\partial/\partial y,\partial/\partial z)$，$f$是外力产生的右端项。

这样就进入了Hamilton体系，可以对(2.3)进行分离变量。先说明解析解法，设$\boldsymbol{r}$ $x,y,z)=X(x)\mathbf{\Phi}(y,z)$ 1)代入(2.3)，推出

$$\dot{X}(x)=\mu X(x)；\quad \mathbf{H}\mathbf{\Phi}(y,z)=\mu\mathbf{\Phi}(y,z) \tag{2.4}$$

(2.4)中第二式是Hamilton微分算子矩阵的本征问题，若能求出完备的本征函数数列$\{\mathbf{\Phi}_i\}$，就可以求出分离变量形式的级数解：

$$\boldsymbol{r}(x,y,z)=\sum_{i=1}^{\infty}c_i\exp[\mu_i x]\mathbf{\Phi}_i(y,z)+\text{特解} \tag{2.5}$$

特解一般较容易得到，关键是确定本征函数$\mathbf{\Phi}_i$和系数c_i。

也许有人会说，把位移设成$\sum\exp[\lambda x]g(y,z)$，代入弹性力学的位移方程，一样可以分离变量，这对少数已获得解析解的弹性力学边值问题是对的，对另外的多数含有奇数次偏导的控制方程（如对称角铺设层合板的弯曲问题）的边值问题就不行了[10]，因为这样做，g所满足的本征方程一般不是Sturm-Liouuille型的，其完备性在数学上尚不能保证，同时一般

1）$\mathbf{\Phi}$应用斜黑体，因工厂暂缺，故用正黑体代之。

也不具备正交性．所以必须进入Hamilton体系，使全状态向量具有完备性，并建立一种新的正交性，才有可能求解这些问题．

三、理 论 展 开

通常的Hamilton矩阵定义为

$$\mathbf{JHJ}=\mathbf{H}^T;\quad \mathbf{J}=\begin{bmatrix}0 & \mathbf{I}\\ -\mathbf{I} & 0\end{bmatrix} \tag{3.1}$$

这里I是具有恰当尺度的单位阵．因本文中的Hamilton矩阵的元素除了数外，还会是偏微分算子，其定义与数量Hamilton矩阵自然不同．

先定义运算符

$$\langle \boldsymbol{p}^T, \mathbf{F}, \boldsymbol{q}\rangle=\int \boldsymbol{p}^T\mathbf{F}\boldsymbol{q}\,dy\ dz \tag{3.2}$$

其中 $\mathbf{F}=\mathbf{F}(\partial/\partial y,\ \partial/\partial z)$是偏微分算子矩阵。若$\boldsymbol{q}$和$\boldsymbol{p}$均满足$y$-$z$平面上的边界条件，由分部积分公式可推出

$$\langle \boldsymbol{q}^T,\ \mathbf{F}^T,\ \boldsymbol{p}\rangle=\langle \boldsymbol{p}^T,\ \mathbf{F}, \boldsymbol{q}\rangle \tag{3.3}$$

式(3.3)通过F定义了$\mathbf{F}^T$，$\mathbf{F}^T$一般不是F的简单转置，因为F的元素中有偏微分算子．

传统的解法的对象是以同一类自变量表示的偏微分方程或方程组，即研究对象是$\boldsymbol{q}$的(如Nauier)或$\boldsymbol{p}$的(如Beltrami)方程，所属的空间的结构是Euclid几何，分别对应的是最小势能原理和最小余能原理；而进入Hamilton体系中，导出两类变量$\boldsymbol{q}$和$\boldsymbol{p}$的混合方程，这种相空间的结构不再适用于Euclid几何，而应使用辛几何[11]，对应的是能进入Hamilton体系的广义变分原理．这里特别强调能进入Hamilton体系，因为以前提出的广义变分原理，尽管有二类或三类变量甚至导出混合型方程，但不能进入（其提出者也没想进入）Hamilton体系．

体现辛几何性质的是反对称阵J，这里称之为旋转换位算子，可认为它是辛几何空间的度量矩阵，这一点在下面的推导中可以看得很清楚．

由(2.4)和(3.1)可推出

$$-(\mathbf{JHJ})\mathbf{J}\boldsymbol{\Phi}_i=-\mathbf{H}^T\mathbf{J}\boldsymbol{\Phi}_i=\mu_i\mathbf{J}\boldsymbol{\Phi}_i \tag{3.4}$$

因为H与$\mathbf{H}^T$的本征值相同，说明$-\mu_i$也是H的本征值，可知H的本征值可分为二组

$$\mu_{ai}(\mathrm{Re}(\mu_{ai})\leqslant 0);\quad \mu_{bi}=-\mu_{aj}(\mathrm{Re}(\mu_{bi})\geqslant 0) \tag{3.5}$$

互为负值的一对本征值称为共轭，JΦ称为辛共轭本征向量．

四、辛正交归一关系

正交关系是分离变量法的基础，Hamilton体系中的正交关系显然与Euclid空间中的正交关系有所不同．

设H的两个本征全状态向量为

$$\mathbf{H}\boldsymbol{\Phi}_i=\mu_i\boldsymbol{\Phi}_i;\quad \mathbf{H}\boldsymbol{\Phi}_j=\mu_j\boldsymbol{\Phi}_j \tag{4.1}$$

由(3.3)推出

$$\langle \boldsymbol{\Phi}_j^T, \mathbf{JH},\ \boldsymbol{\Phi}_i\rangle=\mu_i\langle \boldsymbol{\Phi}_j^T,\ \mathbf{J},\ \boldsymbol{\Phi}_i\rangle \tag{4.2}$$

再由(3.4)和(3.3)推出

$$\langle \Phi_j^T, JH, \Phi_i \rangle = \langle \Phi_i^T, H^T, (J^T\Phi_j) \rangle = -\mu_j \langle \Phi_i^T, J^T, \Phi_j \rangle$$
$$= -\mu_j \langle \Phi_j^T, J, \Phi_i \rangle \tag{4.3}$$

从而

$$(\mu_i + \mu_j)\langle \Phi_j^T, J, \Phi_i \rangle = 0 \tag{4.4}$$

可见，若$\mu_i \neq -\mu_j$，则

$$\langle \Phi_j^T, J, \Phi_i \rangle = 0; \text{ 或} \langle \Phi_i^T, J, \Phi_j \rangle = 0 \tag{4.5}$$

称为辛正交关系．(4.5)说明J是辛几何空间的度量，因为

$$J \cdot \{q, p\}^T = \{p, -q\}^T \tag{4.6}$$

所以作者又称其为旋转换位算子（矩阵）．

可以定义

$$\langle \Phi_i^T, J, \Phi_i \rangle = (\Phi_i, \Phi_j)_s \tag{4.7}$$

为辛内积，所谓辛正交即辛内积等于零；传统Euclid内积为

$$\langle \Phi_i^T, I, \Phi_j \rangle = (\Phi_i, \Phi_j)_E \tag{4.8}$$

欧氏正交即Euclid内积等于零．两种几何的根本区别体现在度量矩阵上：一个是I，一个是J．因为|J|=1，可以认为J是辛几何空间的（辛）单位阵．

再仔细考察这两个变量矩阵：如果认为+1代表阳，－1代表阴，0=－1+(+1)代表太极或无极，那么J就是一幅完整的太极图，其中零对角阵相当于鱼眼，阴和阳分别代表q和p两类变量，属于混合变量的相空间；而在I中只有阳和无极，只能代表q或p一类变量．

通过比较可见，在辛几何空间里，解题的范围有所扩大，一些原来未能求出解析解的问题有可能得到解决，按此想法构造半解析解和数值解也会产生新意和良好的效果．

有了正交关系，还可把本征函数向量归一化．考虑到辛共轭的本征向量不正交，可以这样定义辛归一关系

$$\langle \Phi_{ai}^T, J, \Phi_{bi} \rangle = -\langle \Phi_{bi}^T, J, \Phi_{ai} \rangle = 1 \tag{4.9}$$

再规定

$$(\Phi_{ai}, \Phi_{ai})_E = (\Phi_{bi}, \Phi_{bi})_E \tag{4.10}$$

就可以把Φ归一化．

分离变量形式的级数解为

$$r(x,y,z) = \sum_{i=1}^{\infty} (a_i \exp[\mu_i x] \Phi_{ai}(y,z) + b_i \exp[-\mu_i x] \Phi_{bi}(y,z)) \tag{4.11}$$

通过x方向两端的边界条件确定常系数a_i和b_i，就获得解析解．

若在(4.11)中只取有限项，并通过数值方法确定$X(x)$，就构成各种各样的半解析法，将遇到Hamilton数量阵，需要使用辛算法，这些工作将在另文中讲述．

参 考 文 献

[1] Sokolnikoff, I. S., *Mathematical Theory of Elasticity*, Second Edition, MacGraw-Hill, (1956).

[2] Courant, R. and D. Hilbert, 《数学物理方法》(钱敏，郭敦仁译)，北京：科学出版社（1957）．

[3] Zhong Wan-xie and Zhong Xiang-xiang, Computational structural mechanics, opti-

mal control and semi-analytical method for PDE, *Computer and Structures*, 37(6) (1990).

[4] 钟万勰、林家浩、裘春航，相同子结构串的本征对问题及展开解法，力学学报，23(1)(1991).

[5] 钟万勰，离散LQ控制问题本征解，计算结构力学及其应用，7(2) (1990).

[6] 钟万勰、杨再石，连续时间LQ控制主要本征对的算法，应用数学和力学，12(1) (1991).

[7] 解学书，《最优控制理论与应用》，北京：清华大学出版社 (1986).

[8] 钟万勰，条形域平面弹性问题与哈密尔顿体系，大连理工大学学报，31(4) (1991).

[9] Arnold, V. I., *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer-Verlag, New York, Inc. (1978).

[10] R. M. 琼斯，《复合材料力学》，朱颐龄等译，上海科学技术出版社 (1981).

[11] 秦孟兆，辛几何及计算哈密顿力学，力学与实践，12(6) (1990).

Hamiltonian System and Simpletic Geometry in Mechanics of Composite Materials (Ⅰ)——Fundamental Theory

Zhong Wan-xie Ouyang Hua-jiang

(*Dalian University of Technology, Dalian*)

Abstract

For the first time, Hamiltonian system used in dynamics is introduced to formulate statics and Hamiltonian equation is derived corresponding to the original governing equation, which enables separation of variables to work and eigen function to be obtained for the boundary problem. Consequently, analytical and semianalytical solutions can be got. The method is especially suitable to solve rectangular plane problem and spatial prism in elastic mechanics.

The paper presents a new idea to solve partially differential equation in solid mechanics. The flexural problem and plane stress problem of laminated plate are studied in detail.

Key words Hamiltonian system, simpletic geometry, analytical solution, semi-analytical solution