应用数学和力学，第13卷第11期（1992年11月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

求解奇异摄动问题的一个耦合差分格式

孙晓弟 吴启光

（南京大学数学系，1991年10月8日收到）

摘 要

本文考察奇异摄动问题(1.1)．在一特殊的非均匀网格上，将不稳定、二阶精度的中心差格式和稳定、一阶精度的Abrahamsson-Keller-Kreiss箱子格式相耦合，得到了一个二阶一致收敛的差分格式．最后给出了数值结果．

关键词 奇异摄动问题 耦合差分格式 非均匀网格

一、引 言

本文考察非自伴的奇异摄动问题

$$\left.\begin{aligned}&L_3u:=\varepsilon u''+b(x)u'-c(x)u=f(x)\qquad(0<x<1)\\&u(0)=\mu_0,\ u(1)=\mu_1\end{aligned}\right\}\tag{1.1}$$

这里 ε是(0，1]中的常数；μ_0，μ_1为边界值；$b(x)$，$c(x)$，$f(x)\in C^3[0,1]$，且

$$b(x)>\beta_1=2\beta>0,\quad c(x)\geqslant 0,\quad \forall x\in[0,1]\tag{1.2}$$

众所周知，在以上假设条件下，方程（1.1）存在唯一解$u_\varepsilon(x)$满足

$$|u_\varepsilon^{(i)}(x)|\leqslant M\left[1+\varepsilon^{-i}\exp\left(-\frac{\beta_1x}{\varepsilon}\right)\right],\qquad(\forall x\in[0,1],\ i=0,1,\cdots,4)\tag{1.3}$$

其中 M是不依赖于ε的正常数．

奇异摄动问题（1.1）目前已被研究得相当透彻(详见[4])，但我们至今没见到在非均匀网格上直接对方程（1.1）进行离散、并得到一致收敛格式的文章．本文将在一特殊的非均匀网格上，将不稳定、二阶精度的中心差格式和稳定、一阶精度的Abrahamsson-Keller-Kreiss"箱子"格式（以下简称为A-格式）相耦合，得到了一个二阶一致收敛的三点差分格式（我们称之为耦合差分格式），并给出了数值结果．耦合差分格式的特点是不采用指数型拟合因子，结构简单且易于上机实现．

为了分析收敛性，需要以下引理．

引理1 方程（1.1）的解$u_\varepsilon(x)$具有分解$u_\varepsilon(x)=m(x)+y_\varepsilon(x)$满足

$$|m^{(i)}(x)|\leqslant M \tag{1.4a}$$

$$(\forall x\in[0,\ 1],\ i=0,\ 1,\ \cdots,\ 4)$$

$$|y_\varepsilon^{(i)}(x)|\leqslant M\varepsilon^{-i}\exp\left(-\frac{\beta_1 x}{\varepsilon}\right) \tag{1.4b}$$

其中 M是不依赖于ε的正常数。

证明 首先将定义在区间$[0,\ 1]$上的函数$b(x)$、$c(x)$和$f(x)$延拓到区间$[-1,\ 1]$上，使得光滑性和条件 (1.2) 仍然保持.延拓后的函数分别记为$\bar{b}(x)$、$\bar{c}(x)$和$\bar{f}(x)$.

定义$m(x)$是下述方程的唯一解

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon m''(x)+\bar{b}(x)m'(x)-\bar{c}(x)m(x)=\bar{f}(x),\quad(-1<x<1)\\&m(-1)=0,\quad m(1)=\mu_1\end{aligned}\right\} \tag{1.5}$$

由于方程 (1.5) 的边界层在$x=-1$处，故 (1.4a) 显然成立.

令$y_\varepsilon=u_\varepsilon-m$，则

$$\left.\begin{aligned}&L_\varepsilon y_\varepsilon=L_\varepsilon u_\varepsilon-L_\varepsilon m=0,\qquad(0<x<1)\\&y_\varepsilon(0)=\mu_0-m(0),\quad y_\varepsilon(1)=0\end{aligned}\right\} \tag{1.6}$$

根据极值原理，易证 (1.4b) 成立.

证毕.

注1 耦合差分格式对转向点问题也具有二阶一致收敛性.

注2 以下的M表示不依赖于ε和离散网格的正常数，在不同的地方可表示不同的值.

二、网格和格式

非均匀网格$I_h=\{x_i:i=0,\ 1,\ \cdots,\ N\}$是通过网格产生函数$\lambda(t)$得到，即

$$x_i=\lambda(t_i),\quad t_i=ih,\quad i=0,\ 1,\ \cdots,\ N,\quad h=1/N. \tag{2.1}$$

取

$$\lambda(t)=\begin{cases}\psi(t):=-a\varepsilon\ln\left(1-\dfrac{t}{q}\right)&(t\in[0,\ \alpha])\\\pi(t):=\psi(\alpha)+\psi'(\alpha)(t-\alpha)&(t\in(\alpha,\ 1])\end{cases} \tag{2.2}$$

其中 $q\in(0,\ 1)$，$a\in(0,\ q/\varepsilon)$为固定正数，而α由下式确定

$$\psi(\alpha)+\psi'(\alpha)(1-\alpha)=1,$$

即$\lambda(1)=1$. 不难证明$\alpha\in(0,\ q)$存在唯一，且有以下性质

(1) $q-\alpha=M\varepsilon,\ \psi(\alpha)=-a\varepsilon\ln\left(1-\dfrac{\alpha}{q}\right)=-M\varepsilon\ln\varepsilon,$ (2.3a)

(2) $1\leqslant\psi'(\alpha)\leqslant(1-q)^{-1},\ 0\leqslant\lambda'(t)\leqslant\psi'(\alpha),$ (2.3b)

(3) $\psi''(\alpha)=M\varepsilon^{-1}.$ (2.3c)

记$h_i=x_{i+1}-x_i$，$x_{i+1/2}=x_i+h_i/2$.

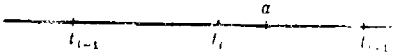
引理2 $0\leqslant h_i-h_{i-1}\leqslant M\varepsilon^{-1}h^2$.

证明 $h_i-h_{i-1}\geqslant0$是显然的. 由于$\lambda(t)$在区间$[0,\ \alpha)$和$(\alpha,\ 1]$上二次连续可微，因此当$t_{i-1}\geqslant\alpha$或$t_{i+1}\leqslant\alpha$时，有

$$h_i-h_{i-1}=h^2\lambda''(\widehat{t_{i-1},\ t_{i+1}})\leqslant h^2\psi''(\alpha)$$

$$\leqslant M\varepsilon^{-1}h^2,$$

这里$\widehat{x,\ y}$表示x与y之间的某一点．若$\alpha\in(t_{i-1},\ t_{i+1})$，不妨设$\alpha\geqslant t_i$（对于情形$t_{i-1}<\alpha<t_i$，类似可证），则



$$\begin{aligned} h_i-h_{i-1} &= \psi(\alpha)+\psi'(\alpha)(t_{i+1}-\alpha)+\psi(t_{i-1})-2\psi(t_i) \\ &= (\alpha-t_i)\psi'(\widehat{\alpha,\ t_i})-h\psi'(\widehat{t_{i-1},t_i})+\psi'(\alpha)(t_{i+1}-\alpha) \\ &= (\alpha-t_i)[\psi'(\widehat{\alpha,t_i})-\psi'(\alpha)]+h[\psi'(\alpha)-\psi'(\widehat{t_{i-1},t_i})] \\ &\leqslant Mh^2\psi''(\alpha)\leqslant M\varepsilon^{-1}h^2. \end{aligned}$$

引理证毕．

令$\{u_i\}$是非均匀网格I_h上的网格函数，引进以下离散算子

$$D''_c u_i=2[h_i u_{i-1}-(h_i+h_{i-1})u_i+h_{i-1}u_{i+1}]/[h_i h_{i-1}(h_i+h_{i-1})],$$

$$D'_+ u_i=(u_{i+1}-u_i)/h_i,$$

$$D'_0 u_i=(u_{i+1}-u_{i-1})/(h_i+h_{i-1}),$$

$$D^0_M u_{i+1/2}=\frac{1}{2}(u_{i+1}+u_i).$$

首先在非均匀网格I_h上给出以下二个格式：

中心差格式

$$L^h_c u_i=\varepsilon D''_c u_i+b_i D'_0 u_i-c_i u_i=f_i,$$

A-格式

$$L^h_A u_i=\varepsilon D''_c u_i+b_{i+1/2}D'_+ u_i-c_{i+1/2}D^0_M u_{i+1/2}=f_{i+1/2},$$

其中　$b_i=b(x_i)$，$b_{i+1/2}=b(x_{i+1/2})$，等等．不难证明，存在某个正常数$h_0>0$使得，当$0<h\leqslant h_0$时A-格式的系数矩阵是M-矩阵．在以下的讨论中，我们均假设$0<h\leqslant h_0$，不再重复．因此A-格式是稳定的，但对固定的ε，它只有一阶精度．而中心差格式虽有二阶精度，但它是个不稳定的差分格式．

我们希望通过利用以上两个格式的优点，来构造二阶一致收敛的差分格式，故考察以下的耦合差分格式

$$L^h u_i:=\begin{cases} L^h_c u_i=f_i, & \text{如果}\rho_i:=h_{i-1}\ b_i/2\varepsilon\leqslant 1 \\ L^h_A u_i=f_{i+1/2}, & \text{如果}\rho_i>1 \end{cases} \tag{2.4}$$

$$u_0=\mu_0,\quad u_N=\mu_1.$$

从以后定理的证明可以看出，当$\rho_i>1$时，A-格式是二阶一致收敛的，而当$\rho_i\leqslant 1$时，中心差格式是稳定的，因此以上耦合格式（2.4）有希望是二阶一致收敛的．由于格式（2.4）的系数矩阵是M-矩阵，故易证

引理3　令$\{u_i\}$是网格I_h上的网格函数．

若$u_0\geqslant 0$，$u_N\geqslant 0$，且

$$L^h u_i\leqslant 0,\quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ N-1)$$

则对一切i有$u_i\geqslant 0$．

引理4　令$r_0=1$，

$$r_\lambda=\prod_{j=0}^{i-1}\varepsilon/(\varepsilon+\beta h_j) \qquad (i=1,2,\cdots,\ N)$$

则以下不等式成立

$$L^h r_i \leqslant -\frac{M}{\max(\varepsilon,\ h_i)} r_i \qquad (i=1,\ 2,\ ,\ \cdots,\ N-1)$$

证明 通过简单的代数运算，可得

$$L_c^h r_i = -\frac{\beta}{\varepsilon+\beta h_i}\left[b_i-\frac{2h_i\beta}{h_i+h_{i-1}}\right]r_i-\frac{b_i\beta^2 h_i h_{i-1}}{\varepsilon(\varepsilon+\beta h_i)(h_i+h_{i-1})}r_i-c_i r_i$$

$$\leqslant -\frac{\beta}{\varepsilon+\beta h_i}\left[b_i-\frac{2h_i\beta}{h_i+h_{i-1}}\right]r_i,$$

$$L_A^h r_i = -\frac{\beta}{\varepsilon+\beta h_i}\left[\ b_{i+1/2}-\frac{2h_i\beta}{h_i+h_{i-1}}\right]r_i-c_{i+1/2}(r_{i+1}+r_i)/2$$

$$\leqslant -\frac{\beta}{\varepsilon+\beta h_i}\left[\ b_{i+1/2}-\frac{2h_i\beta}{h_i+h_{i-1}}\right]r_i.$$

利用条件（1.2）和不等式$h_i/(h_i+h_{i-1})<1$可知，存在不依赖于ε和h的常数M使得

$$L^h r_i \leqslant -\frac{M}{\varepsilon+\beta h_i} r_i$$

$$\leqslant -\frac{M}{\max(\varepsilon,\ h_i)} r_i,\ (i=1,\ 2\cdots,\ N-1)$$

引理得证.

本文的主要结论是

定理1 设网格I_h由（2.1）给出，且选取常数a使得$a\beta\geqslant 2$.令$\{u_i\}$是差分格式（2.4）的解，$u_\varepsilon(x)$是原方程（1.1）的解，则

$$|u_\varepsilon(x_i)-u_i|\leqslant Mh^2 \qquad (i=0,\ 1,\ \cdots,\ N) \tag{2.5}$$

三、定 理 的 证 明

为证（2.5），需对差分格式（2.4）的截断误差作出估计，为此首先分析中心差格式和A-格式的截断误差：

$$\tau_i^c=\tau_i^c(u_\varepsilon)=L_c^h u_\varepsilon(x_i)-(Lu_\varepsilon)(x_i),$$

和

$$\tau_i^A=\tau_i^A(u_\varepsilon)=L_A^h u_\varepsilon(x_i)-(Lu_\varepsilon)(x_{i+1/2})$$

显然

$$\tau_i^c(u_\varepsilon)=\tau_i^c(m)+\tau_i^c(y_\varepsilon),\ \ \tau_i^A(u_\varepsilon)=\tau_i^A(m)+\tau_i^A(y_\varepsilon), \tag{3.1}$$
$$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ N-1).$$

根据（1.4a）易证

$$|\tau_i^c(m)|\leqslant Mh^2, \tag{3.2a}$$

$$|\tau_i^A(m)|\leqslant Mh^2+M\varepsilon h\leqslant Mh^2,\ \text{当}\rho_i>1\text{时}, \tag{3.2b}$$
$$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ N-1)$$

因此，以下只需估计$\tau_i^c(u_\varepsilon)$和$\tau_i^A(y_\varepsilon)$.

利用泰勒展开式和导数估计（1.4b）可得

$$|\tau_i^c(y_\varepsilon)|\leqslant M\varepsilon[h_i-h_{i-1})y_\varepsilon^{(3)}(x_i)+h_i^2y_\varepsilon^{(4)}(\theta^+)+h_{i-1}^2y_\varepsilon^{(4)}(\theta^-)]$$
$$+M[(h_i-h_{i-1})y_\varepsilon^{(2)}(x_i)+h_i^2y_\varepsilon^{(3)}(\theta^0)]$$
$$\leqslant M[(h_i-h_{i-1})\varepsilon^{-2}V_\varepsilon(2x_i)+\varepsilon^{-3}h_i^2V_\varepsilon(2x_{i-1})] \tag{3.3a}$$

$$|\tau_i^A(y_\varepsilon)|\leqslant\varepsilon|y_\varepsilon''(x_{i+1/2})-y_\varepsilon''(x_i)|+M\varepsilon[(h_i-h_{i-1})y_\varepsilon^{(3)}(x_i)$$
$$+h_i^2y_\varepsilon^{(4)}(\theta^+)+h_{i-1}^2y_\varepsilon^{(4)}(\theta^-)]+M[h_i^2y_\varepsilon^{(3)}(\xi^+)+h_i^2y_\varepsilon^{(2)}(\eta^+)]$$
$$\leqslant Mh_i\varepsilon^{-2}V_\varepsilon(2x_i)+M[(h_i-h_{i-1})\varepsilon^{-2}V_\varepsilon(2x_i)+h_i^2\varepsilon^{-3}V_\varepsilon(2x_{i-1})],$$

其中 $V_\varepsilon(t)=\exp(-\beta t/\varepsilon)$；$\theta^+$，$\xi^+$，$\eta^+\in(x_i,\ x_{i+1})$；$\theta^-\in(x_{i-1},\ x_i)$，$\theta^0\in(x_{i-1},\ x_{i+1})$。

由于A-格式是在条件 $\rho_\lambda=\dfrac{b_ih_{i-1}}{2\varepsilon}>1$（即$\varepsilon\leqslant Mh_{i-1}\leqslant Mh_i$）满足时才用到，故

$$|\tau_i^A(y_\varepsilon)|\leqslant M[h_i-h_{i-1})\varepsilon^{-2}V_\varepsilon(2x_i)+h_i^2\varepsilon^{-3}V_\varepsilon(2x_{i-1})] \tag{3.3b}$$

为了证明二阶一致收敛性，还需用到另一个关于$\tau_i^A(y_\varepsilon)$和$\tau_i^c(y_\varepsilon)$的估计式．由于y_ε满足方程(1.6)，所以由中值定理和（1.4b）可得

$$|\tau_i^c(y_\varepsilon)|=|L_\varepsilon^hy_\varepsilon(x_i)-(Ly_\varepsilon)(x_\varepsilon)|$$
$$=\left|2\varepsilon\frac{y_\varepsilon'(x^+)-y_\varepsilon'(x^-)}{h_i+h_{i-1}}+b_i\frac{y_\varepsilon(x_{i+1})-y_\varepsilon(x_{i-1})}{h_i+h_{i-1}}-c_iy_\varepsilon(x_i)\right|$$
$$\leqslant MV_\varepsilon(2x_{i-1})/h_i \tag{3.4a}$$

其中 $x^+\in(x_i,\ x_{i+1})$，$x^-\in(x_{i-1},\ x_i)$．同理可证

$$|\tau_i^A(y_\varepsilon)|\leqslant MV_\varepsilon(2x_{i-1})/h_i \tag{3.4b}$$

注意到（3.3a）和(3.3b)、(3.4a)和(3.4b)的右端都是一致的，即中心差格式和A-格式（当$\rho_i>1$时）的截断误差是相同量级的．因此下面我们只对$\tau_i^c(y_\varepsilon)$进行估计．

情形1° 令$t_{i-1}\geqslant\alpha$．利用（2.3a）可证

$$V_\varepsilon(x_{i-1})\leqslant V_\varepsilon(\lambda(|\alpha|))=\exp\left|a\beta\ln\left(1-\frac{\alpha}{q}\right)\right|$$
$$=\left(1-\frac{\alpha}{q}\right)^{a\beta}\leqslant M\varepsilon^2.$$

根据引理2和非均匀网格I_h的性质(2.3b)，利用（3.3a）易得

$$|\tau_i^c(y_\varepsilon)|\leqslant Mh^2\varepsilon^{-3}\cdot\varepsilon^4\leqslant Mh^2 \tag{3.5}$$

情形2° 令$t_{i-1}\leqslant q-3h$，$t_{i-1}<\alpha$，$t_{i+1}\leqslant q-h$．此时，

$$q-t_{i+1}\geqslant\frac{1}{3}(q-t_{i-1}). \tag{3.6}$$

由于$\psi'(t)=a\varepsilon/(q-t)$，

$$h_{i-1}=\lambda(t_i)-\lambda(t_{i-1})\leqslant\psi(t_i)-\psi(t_{i-1})$$
$$\leqslant h\psi'(t_i)\leqslant\frac{1}{2}a\varepsilon \tag{3.7}$$

故$V_\varepsilon(2x_{i-1})\leqslant MV_i(2x_i)$．同理可证

$$h_i\leqslant a\varepsilon. \tag{3.8}$$

利用不等式 $\psi''(t)>0$ $(0\leqslant t<q)$，可以证明

$$h_i - h_{i-1} = \lambda(t_{i+1}) - 2\lambda(t_i) + \lambda(t_{i-1})$$
$$\leqslant \psi(t_{i+1}) - 2\psi(t_i) + \psi(t_{i-1})$$
$$\leqslant h^2\psi''(t_{i+1}) \tag{3.9}$$

因此由 (3.3) 式得

$$|\tau_i^c(y_\varepsilon)| \leqslant Mh^2[\varepsilon^{-2}\psi''(t_{i+1})V_\varepsilon(2x_i) + \psi'(t_{i+1})^2\varepsilon^{-3}V_\varepsilon(2x_i)] \tag{3.10}$$

根据 (3.6) 式，得

$$\varepsilon^{-1}\psi''(t_{i+1})V_\varepsilon(x_i) = a\cdot(q - t_{i+1})^{-2}\exp\left(a\beta\ln\left(1 - \frac{x_i}{q}\right)\right)$$
$$= a(q - t_{i+1})^{-2}\cdot\left(1 - \frac{x_i}{q}\right)^{a\beta}$$
$$\leqslant M,$$
$$\varepsilon^{-2}\psi'(t_{i+1})^2V_\varepsilon(x_i) = a^2(q - t_{i+1})^{-2}\exp\left(a\beta\ln\left(1 - \frac{x_i}{q}\right)\right)$$
$$\leqslant M.$$

所以

$$|\tau_i^c(y_\varepsilon)| \leqslant Mh^2\varepsilon^{-1}V_\varepsilon(x_i) \tag{3.11}$$

再注意到 (3.8) 式，(3.11)即为

$$|\tau_i^c(y_\varepsilon)| \leqslant \frac{Mh^2}{\max(\varepsilon,\ h_i)}V_\varepsilon(x_i) \tag{3.12}$$

情形3° 令$q - 3h < t_{i-1} < \alpha$。此时根据 (2.3a) 知$\varepsilon \leqslant Mh$,

$$V_\varepsilon(x_{i-1}) = \exp\left(a\beta\ln\left(1 - \frac{t_{i-1}}{q}\right)\right) \leqslant M(q - t_{i-1})^2 \leqslant Mh^2 \tag{3.13}$$

从 (3.4) 和 (3.13) 可以看出，若$h_i \geqslant Mh$，则有

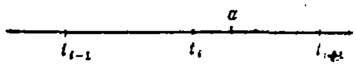
$$|\tau_i^c(y_\varepsilon)| \leqslant Mh^4/h \leqslant Mh^2 \tag{3.14}$$

若$h_{i-1} \leqslant M\varepsilon$，则

$$|\tau_i^c(y_\varepsilon)| \leqslant Mh^2\cdot h_i^{-1}V_\varepsilon(x_i). \tag{3.15}$$

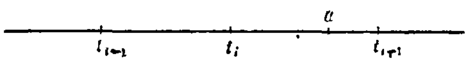
下面我们来证明不等式$h_i \geqslant Mh$和$h_{i-1} \leqslant M\varepsilon$必有一个成立.

事实上，若 $\alpha \leqslant \frac{1}{2}(t_i + t_{i+1})$，则



$$h_i = \lambda(t_{i+1}) - \lambda(t_i) \geqslant \lambda(t_{i+1}) - \lambda\left(t_{i+1} - \frac{1}{2}h\right)$$
$$= \frac{1}{2}h\psi'(\alpha) \geqslant \frac{1}{2}h\ (\geqslant M\varepsilon).$$

若 $\alpha \geqslant \frac{1}{2}(t_i + t_{i+1})$，则 $q - t_i \geqslant \frac{1}{2}h$，且



$$h_{i-1}=\lambda(t_i)-\lambda(t_{i-1})\leqslant h\lambda'(t_i)\leqslant h\psi'(t_i)$$
$$=h\frac{a\varepsilon}{q-t_i}\leqslant 2a\varepsilon,$$

同时，利用$q-t_i\leqslant 2h$可证

$$h_i\geqslant h_{i-1}=\psi(t_i)-\psi(t_{i-1})$$
$$=a\varepsilon\ln\left(1+\frac{h}{q-t_i}\right)\geqslant M\varepsilon.$$

因此若$\tau_i^c(y_e)$不满足(3.14)，则必定满足(3.15)。再注意到对于情形3°，总有$h_i\geqslant M\varepsilon$，所以结合(3.14)和(3.15)可得

$$|\tau_i^c(y_e)|\leqslant Mh^2\left[1+\frac{1}{\max(\varepsilon,h_i)}V_\varepsilon(x_i)\right] \tag{3.16}$$

综上所述，差分格式(2.4)的截断误差$\tau_i=L^h(u_\varepsilon(x_i)-u_i)$满足

$$|\tau_i|\,|L^h(u_\varepsilon(x_i)-u_i)|\leqslant Mh^2\left[1+\frac{1}{\max(\varepsilon,h_i)}V_\varepsilon(x_i)\right]$$
$$\leqslant Mh^2\left[1+\frac{1}{\max(\varepsilon,h_i)}r_i\right]$$

作闸函数$\phi_i=Mh^2[(2-x_i)+r_i]$，由引理3和4可得(2.5)式。定理证毕。

四、数 值 结 果

本节运用差分格式(2.4)对以下奇异摄动问题

$$\varepsilon u''+u'=f(x)\qquad(0<x<1)$$
$$u(0)=A,\ u(1)=B,$$

进行数值计算，其中右端$f(x)$和边界条件A、B由方程的精确解

$$u_\varepsilon(x)=\sin x+\left(\exp\left[-\frac{x}{\varepsilon}\right]-\exp\left[-\frac{1}{\varepsilon}\right]\right)\left(\left(1-\exp\left[-\frac{1}{\varepsilon}\right]\right)\right)$$

确定。取非均匀网格I_h中的参数$a=4$。我们对一系列的ε和h进行了计算。在下表中，列出了最大值误差$E_\infty:=\max\limits_{0\leqslant i\leqslant N}|u_i-u_\varepsilon(x_i)|$和数值收敛阶$p:=(\ln E_\infty^2-\ln E_\infty^1)/\ln 2$，其中$E_\infty^1$，$E_\infty^2$分别表示在非均匀网格$I_h$、$I_{2h}$上近似解的最大值误差。计算结果表明，差分格式(2.4)的数值收敛阶是二阶，与定理1的结论一致。

	$\varepsilon=10^{-1}$		$\varepsilon=10^{-2}$		$\varepsilon=10^{-3}$		$\varepsilon=10^{-4}$		$\varepsilon=10^{-5}$		$\varepsilon=10^{-6}$	
h	E_∞	p	E_∞	p	E_∞	p	E_∞	p	E_∞	p	E_∞	p
1/32	1.8E-3		4.1E-3		5.0E-3		5.1E-3		5.2E-3		5.2E-3	
		2.01		2.68		2.95		2.95		2.96		2.96
1/64	4.5E-4		6.5E-4		6.5E-4		6.6E-4		6.7E-4		6.7E-4	
		2.00		1.33		1.59		1.58		1.58		1.58
1/128	1.1E-4		2.6E-4		2.2E-4		2.2E-4		2.2E-4		2.2E-4	
		2.00		2.00		1.93		1.90		1.89		1.89
1/256	2.8E-5		6.4E-5		5.7E-5		6.0E-5		6.0E-5		6.0E-5	
		2.00		2.00		2.07		2.01		2.00		2.00
1/512	7.0E-6		1.6E-5		1.4E-5		1.5E-5		1.5E-5		1.5E-5	

参考文献

[1] Farrall, P. A., Sufficient conditions for the uniform convergence of a difference scheme for a singularly perturbed turning point problem, *SIAM J. Numer. Anal.*, 25 (1988), 618—643.

[2] Kellogg, R. B. and A. Tsan, Analysis of some difference approximation for a singular perturbation problem without turning points, *Math. Comp.* 32 (1978), 1025—1039.

[3] Vulanovic, R., On a numerical solution of a type of singularly perturbed boundary value problem by using a special discretization mesh, *Zb. rad. Prir.*, —Mat. Fak. Univ. Novom. Sadu., Ser. Mat., 13 (1983), 187—201.

[4] 苏煜城，关于奇异摄动问题数值方法的若干进展，1991年全国计算数学年会会议资料.

A Coupling Difference Scheme for the Numerical Solution of a Singular Perturbation Problem

Sun Xiao-di Wu Qi-guang

(*Nanjing University, Nanjing*)

Abstract

In this paper, we consider a singularly perturbed problem without turning points. On a special discretization mesh, a coupling difference scheme, resulting from central difference scheme and Abrahamsson-Keller-Kreiss box scheme, is proposed and the second order convergence, uniform in the small parameter, is proved. Finally, numerical results are provided.

Key words singularly perturbed problem, coupling difference scheme, nonuniform mesh