应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

Navier-Stokes问题的六面体单元的混合有限元法*

罗 振 东

（贵阳 贵州经济管理干部学院，1991年5月3日收到）

摘 要

本文，我们给出三维空间的Navier-Stokes问题的一种新的六面体单元的混合有限元格式．

关键词 Navier-Stokes问题 六面体单元 自由度 混合有限元

一、问题的提出

关于三维空间的 Navier-Stokes 问题，[1]、[2]给出了四面体单元的混合有限元格式，但所用格式的自由度较多，对实际计算产生许多困难．为此，本文给出一种新的六面体单元的混合有限元格式．

设$\Omega\subset R^3$是有界凸区域，考虑定常的 Navier-Stokes 问题的变分形式：

$$\left.\begin{array}{ll}\text{求}(u,\ p)\in X\times M\text{满足} & \\ a_0(u,\ v)+a_1(u;\ u,\ v)-b(v,\ p)=(f,\ v), & \forall v\in X\\ b(u,\ q)=0, & \forall q\in M\end{array}\right\}\tag{1.1}$$

其中$X=H_0^1(\Omega)^3$，$M=\{q\in L^2(\Omega)\,|\int_\Omega qd\sigma=0\}$，$u=(u_1,\ u_2,\ u_3)^T$是流体速度向量，$p$为压力，$f\in H^{-1}(\Omega)^3$是已知体积力密度，$a_0(u,\ v)=\gamma(\nabla u,\ \nabla v)$，$\gamma>0$是粘性常数，$a_1(w;u,v)=[((w\nabla)u,\ v)-((w\nabla)v,\ u)]/2$，$H_0^1(\Omega)$及下面用到的$H^m(\Omega)$是熟知的 Sobolev 空间，$H^m(\Omega)$的模和半模分别记为$\|\cdot\|_{m,\Omega}$，$|\cdot|_{m,\Omega}$，$H^m(\Omega)^3$的模和半模仍用同样的记号，但

$$\forall v=(v_1,\ v_2,\ v_3)^T\in H^m(\Omega)^3,\quad \|v\|_{m,\Omega}=\left[\sum_{i=1}^3\|v_i\|_{m,\Omega}^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$|v|_{m,\Omega}=\left[\sum_{i=1}^3|v_i|_{m,\Omega}^2\right]^{\frac{1}{2}},\quad b(v,\ q)=\int_\Omega q\mathrm{div}v d\sigma$$

令

$$V=\{v\in X\,|\,\mathrm{div}v=0\}$$

* 钱伟长推荐．

$$N=\sup_{u,v,w\in V}\frac{|a_1(w;u,v)|}{|w|_{1,\Omega}|u|_{1,\Omega}|v|_{1,\Omega}}$$

$$\|f\|^*=\sup_{v\in V}\frac{|(f,v)|}{|v|_{1,\Omega}}$$

假定粘性常数γ满足：$\gamma^{-2}N\|f\|^*<1$，由[3]知，当$f\in H^{-1}(\Omega)^3$时，问题(1.1)存在唯一解$(u,\ p)\in X\times M$。

对充分小的$h>0$，设$X_h\subset X$，$M_h\subset M$是有限元空间，则问题(1.1)的有限元逼近为：

$$\left.\begin{array}{l}\text{求}(u_h,\ p_h)\in X_h\times M_h\text{满足}\\ a_0(u_h,v)+a_1(u_h;u_h,v)-b(v,p_h)=(f,v),\quad \forall v\in X_h\\ b(u_h,q)=0,\qquad \forall q\in M_h\end{array}\right\}\tag{1.2}$$

令

$$V_h=\{v\in X_h|b(v,q)=0,\ \ \forall q\in M_h\}$$

$$N_h=\sup_{u,v,w\in V_h}\frac{|a_1(w;u,v)|}{|u|_{1,\Omega}|v|_{1,\Omega}|w|_{1,\Omega}}$$

$$\|f\|_h^*=\sup_{v\in V_h}\frac{|(f,v)|}{|v|_{1,\Omega}}$$

假设(H_1) 存在$\Pi_h:X\to X_h$使得$\forall v\in X$都有

$$b(v-\Pi_h v,q)=0,\qquad \forall q\in M_h\tag{1.3}$$

$$\|\Pi_h v\|_{1,\Omega}\leqslant C\|v\|_{1,\Omega}\tag{1.4}$$

且当$v\in H^{m+2}(\Omega)^3$时，有

$$\|v-\Pi_h v\|_{1,\Omega}\leqslant Ch^{m+1}\|v\|_{m+2,\Omega}\tag{1.5}$$

假设(H_2) M_h上的正交投影P_h满足

$$\|q-P_h q\|_{0,\Omega}\leqslant Ch^{m+1}\|q\|_{m+1,\Omega},\qquad \forall q\in H^{m+1}(\Omega)\cap M\tag{1.6}$$

其中$C>0$与h无关是常数.

本文凡用到与h无关的正常数均记为C，不同处出现可不等.

由[3]的p.369知，当(H_1)和(H_2)成立时，有

$$\lim_{h\to 0}\gamma^{-2}N_h\|f\|_h^*=\gamma^{-2}N\|f\|^*<1\tag{1.7}$$

于是，当$h>0$充分小时，有

$$\gamma^{-2}N_h\|f\|_h^*\leqslant 1-\delta,\qquad \delta\in(0,\ 1)\text{是常数}\tag{1.8}$$

从而，由[3]的p.369—370及定理9.20可得下面的重要结论.

定理1 若(H_1)和(H_2)都成立，则(1.2)存在唯一解$(u_h,\ p_h)\in X_h\times M_h$且当(1.1)的解$(u,\ p)\in H^{m+2}(\Omega)^3\times H^{m+1}(\Omega)$时，有

$$\|u-u_h\|_{1,\Omega}+\|p-p_h\|_{0,\Omega}\leqslant Ch^{m+1}(\|u\|_{m+2,\Omega}+\|p\|_{m+1,\Omega})\tag{1.9}$$

下一引理是显然的.

引理1 $\forall v\in X$，令$W_h\subset C^0(\bar{\Omega})^3\cap X$是分块三$m+1$次（包括不完全三$m+1$次）多项式的向量函数空间，则存在唯一的$w_h\in W_h$使得

$$(\nabla w_h,\ \nabla v_h)=(\nabla v,\ \nabla v_h),\qquad \forall v_h\in W_h\tag{1.10}$$

$$\|w_h\|_{1,\Omega}\leqslant C\|v\|_{1,\Omega}\tag{1.11}$$

且当$v\in H^s(\Omega)^3$时，有

$$\|v-w_h\|_{0,\Omega}\leqslant Ch^s\|v\|_{s,\Omega}\qquad (s=1,2,\cdots,m+2) \tag{1.12}$$

$$\|v-w_h\|_{1,\Omega}\leqslant Ch^{s-1}\|v\|_{s,\Omega}\qquad (s=1,2,\cdots,m+2) \tag{1.13}$$

本文的目的是构造有限元空间X_h，M_h及算子Π_h满足定理1的(H_1)和(H_2)。

二、六面体单元的基本理论

设J_h是$\bar{\Omega}\subset R^3$的强拟一致六面体剖分，即$\forall K\in J_h$，设$A_i=(x_i,\ y_i,\ z_i)$是K的顶点($i=1,\cdots,8$)，如图1，满足

(1) $h_K/s_K\leqslant C$，$h_K=\mathrm{diam}K$，s_K是K的最短边长度。

(2) $|\cos\theta_i|\leqslant C<1$，$\theta_i$是各面间的夹角，$i=1,\cdots,8$。

(3) $h/h_K\leqslant C$，$h=\max\{h_K|K\in J_h\}$。

(4) $$\begin{cases}\|A_2A_1-A_4A_3\|=O(h^{1+\alpha}),\ \ \|A_4A_3-A_8A_7\|=O(h^{1+\alpha}),\\ \|A_8A_7-A_6A_5\|=O(h^{1+\alpha}),\ \ \|A_5A_1-A_7A_3\|=O(h^{1+\alpha}),\\ \|A_6A_2-A_8A_4\|=O(h^{1+\alpha}).\end{cases}$$

其中α可以是任意小的固定正数。

(5) 当K是边界上的单元时，可有一些面是曲面。

再设$\hat{A}_i=(\xi_i,\ \eta_i,\ \zeta_i)$是标准正方体$\hat{K}=[-1,\ 1]^3$的顶点，如图1，则$\hat{K}$上的三线性插值基函数是：

$$N_i=(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta)(1+\zeta_i\zeta)/8\qquad (i=1,\cdots,8) \tag{2.1}$$

于是，从$\hat{K}$到K上的等参变换可取为：

$$F_K:\hat{K}\to K,\ \ 即\ (x,y,z)^T=\sum_{i=1}^{8}(x_i,y_i,z_i)^T N_i \tag{2.2}$$

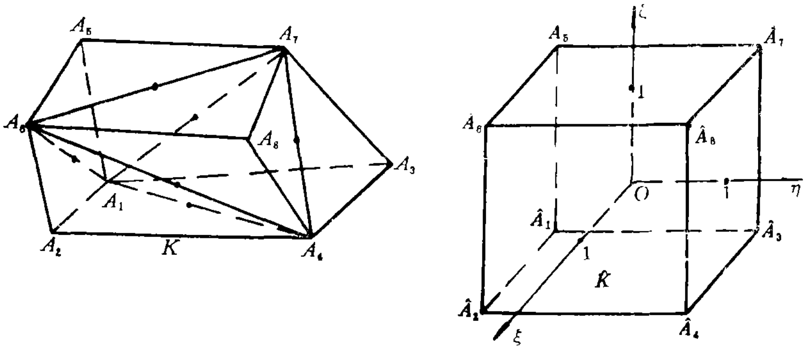

图　1

定理2　当J_h是$\bar{\Omega}$的强拟一致六面体剖分且h足够小时，(2.2)是可逆变换且有

$$\|v\|_{1,K}\leqslant Ch^{1/2}\|\hat{v}\|_{1,\hat{K}},\qquad \forall\,\hat{v}\in H^1(\hat{K})^3$$

$$\|\hat{v}\|_{1,\hat{K}}\leqslant Ch^{-1/2}\|v\|_{1,K},\qquad \forall\,v\in H^1(K)^3$$

其中$\hat{v}=v\circ F_K$。

证　先引入一些记号：DF_K是F_K的导数或是 Jacobi 矩阵，$T_K=\det DF_K$，DF_K^{-1}是F_K^{-1}的导数或是Jacobi矩阵，

$$T_K^{-1}=\det DF_K^{-1},\ \ |F_K|_{1,\infty,\hat{K}}=\sup_{\hat{K}}\|DF_K\|,\ \ |F_K^{-1}|_{1,\infty,K}=\sup_{K}\|DF_K^{-1}\|$$

$$|T_K|_{0,\infty,\hat{K}}=\sup_{\hat{K}}|T_K|,\quad |T_K^{-1}|_{0,\infty,K}=\sup_{K}|T_K^{-1}|$$

当$A=(a_{ij})_{n\times m}$时，

$$\|A\|=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\|a_{ij}\|,\ b_K=\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8}(x_i,y_i,z_i)^T$$

$$X_1=[(x_2-x_1)+(x_4-x_3)+(x_6-x_5)+(x_8-x_7)]/8$$
$$X_2=[(x_3-x_1)+(x_4-x_2)+(x_7-x_5)+(x_8-x_6)]/8$$
$$X_3=[(x_5-x_1)+(x_6-x_2)+(x_7-x_3)+(x_8-x_4)]/8$$
$$X_4=\{[(x_1-x_2)+(x_4-x_3)]+[(x_5-x_6)+(x_8-x_7)]\}/8$$
$$X_5=\{[(x_1-x_5)+(x_7-x_3)]+[(x_2-x_6)+(x_8-x_4)]\}/8$$
$$X_6=\{[(x_1-x_2)+(x_6-x_5)]+[(x_3-x_4)+(x_8-x_7)]\}/8$$
$$X_7=\{[(x_2-x_1)+(x_3-x_4)]+[(x_5-x_6)+(x_8-x_7)]\}/8$$

将x换成y，z且X换成Y，Z，下标不变，便得Y_i，Z_i。再令

$$B_K=\begin{bmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 \end{bmatrix}$$

$$E=\begin{bmatrix} X_4\eta+X_6\zeta+X_7\eta\zeta & X_4\xi+X_5\zeta+X_7\xi\zeta & X_5\eta+X_6\xi+X_7\xi\eta \\ Y_4\eta+Y_6\zeta+Y_7\eta\zeta & Y_4\xi+Y_5\zeta+Y_7\xi\zeta & Y_5\eta+Y_6\xi+Y_7\xi\eta \\ Z_4\eta+Z_6\zeta+Z_7\eta\zeta & Z_4\xi+Z_5\zeta+Z_7\xi\zeta & Z_5\eta+Z_6\xi+Z_7\xi\eta \end{bmatrix}$$

对(2.2)求导可得

$$DF_K=B_K+E \tag{2.3}$$

当J_h是强拟一致六面体剖分时，有

$$|X_i|=O(h),\ |Y_i|=O(h),\ |Z_i|=O(h)\qquad (i=1,2,3) \tag{2.4}$$

$$|X_i|=O(h^{1+\alpha}),\ |Y_i|=O(h^{1+\alpha}),\ |Z_i|=O(h^{1+\alpha})\qquad (i=4,5,6,7) \tag{2.5}$$

令$\hat{K}$到（与K有关的）$\tilde{K}$上的仿射变换为：

$$\tilde{F}_K:\hat{K}\to\tilde{K},\ 即(\tilde{x},\ \tilde{y},\ \tilde{z})^T=B_K(\xi,\ \eta,\ \zeta)^T+b_K \tag{2.6}$$

则$\tilde{K}$的顶点为$\tilde{A}_i=[b_K+B_K(\xi_i,\ \eta_i,\ \zeta_i)^T]^T$，$i=1,\cdots,8$且

$$\tilde{A}_2\tilde{A}_1=\tilde{A}_4\tilde{A}_3=\tilde{A}_6\tilde{A}_5=\tilde{A}_8\tilde{A}_7=2(X_1,\ Y_1,\ Z_1)$$
$$\tilde{A}_4\tilde{A}_2=\tilde{A}_3\tilde{A}_1=\tilde{A}_7\tilde{A}_5=\tilde{A}_8\tilde{A}_6=2(X_2,\ Y_2,\ Z_2)$$
$$\tilde{A}_5\tilde{A}_1=\tilde{A}_6\tilde{A}_2=\tilde{A}_8\tilde{A}_4=\tilde{A}_7\tilde{A}_3=2(X_3,\ Y_3,\ Z_3)$$

$$\begin{aligned}\det B_K=4[&(A_4A_1,\ A_3A_1,\ A_7A_1)+(A_4A_1,\ A_3A_1,\ A_8A_2)+(A_4A_1,\\ &A_8A_6,\ A_7A_1)+(A_4A_1,\ A_8A_8,\ A_8A_2)+(A_8A_5,\ A_8A_6,\ A_8A_2)\\ &+(A_8A_5,\ A_3A_1,\ A_7A_1)+(A_8A_5,\ A_3A_1,\ A_8A_2)+(A_8A_5,\ A_8A_6,\ A_7A_1)]\end{aligned}$$

是构成右手系的不共面向量混合积之和，即有$\det B_K>0$。由此可知(2.6)是可逆且由[4]知，当J_h是强拟一致剖分时，有

$$\|B_K\|\leqslant Ch,\ \|B_K^{-1}\|\leqslant Ch^{-1} \tag{2.7}$$

$$\det B_K\leqslant Ch^3,\ \det B_K\geqslant Ch^3 \tag{2.8}$$

由(2.5)知，$\sup\limits_{\hat{K}}\|E\|\leqslant Ch^{1+\alpha}$，从而由(2.3)及(2.7)得

$$|F_K|_{1,\infty,\hat{K}}\leqslant Ch \tag{2.9}$$

利用行列式的估计（见[5]p.140）可有

$$|T_K|\leqslant\left[\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial\eta}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial\zeta}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\cdot\left[\left(\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\eta}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\zeta}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\cdot\left[\left(\frac{\partial z}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\eta}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\zeta}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\leqslant Ch^3 \tag{2.10}$$

$$|T_K|_{0,\infty,\hat{K}}\leqslant Ch^3 \tag{2.11}$$

由(2.5)和(2.7)可得

$$\sup_{\hat{K}}\|B_K^{-1}E\|\leqslant Ch^a \tag{2.12}$$

从而对 $\varepsilon\in(0,1)$，存在$h_0=(\varepsilon C^{-1})^{1/a}$使得当$h\leqslant h_0$时，$\|B_K^{-1}E\|\leqslant\varepsilon<1$。则由算子理论及矩阵知识 知$I+B_K^{-1}E$可逆（$I$是三阶单位矩阵）且有$\sup\limits_{\hat{K}}\|(I+B_K^{-1}E)^{-1}\|\leqslant(1-\varepsilon)^{-1}$。于是$DF_K=B_K(I+B_K^{-1}E)$可逆，即(2.2)是可逆变 换。据反函数的存在定理得 $DF_K^{-1}=(DF_K)^{-1}=(I+B_K^{-1}E)^{-1}B_K^{-1}$，故有

$$|F_K^{-1}|_{1,\infty,K}\leqslant\sup_K\|B_K^{-1}\|\cdot\|(I+B_K^{-1}E)^{-1}\|\leqslant Ch^{-1} \tag{2.13}$$

因$(I+B_K^{-1}E)^{-1}$的任一元$\leqslant(1-\varepsilon)^{-1}$，与(2.10)同理可得：

$$|\det(I+B_K^{-1}E)^{-1}|\leqslant(1-\varepsilon)^{-3}$$

从而有

$$|\det B_K|=|T_K|\cdot|\det(I+B_K^{-1}E)^{-1}|\leqslant(1-\varepsilon)^{-3}|T_K|$$

故有

$$|T_K^{-1}|_{0,\infty,K}\leqslant Ch^{-3} \tag{2.14}$$

由(2.9)、(2.11)、(2.13)、(2.14)及[4]的定理4.3.2即得定理 2 的两不等式。证毕。

注 现有的有限元书刊在使用(2.2)时，都没有对其可逆性作出论证，定理 2 是一个有益的补充。

三、混合有限元格式

令 $Q_j(K)=\{g\,|\,g=\hat{g}\circ F_K^{-1},\ \hat{g}\in Q_j(\hat{K})\}$，$Q_j(\hat{K})$是$\hat{K}$上的三$j$次（包括不完全三 j 次）多项式空间。有限元空间取为：

$$M_h=\{q\in M\cap C^0(\bar{\Omega})\,|\,q|_K\in Q_m(K),\quad\forall K\in J_h\} \tag{3.1}$$

$$X_h=\{v\in X\cap C^0(\bar{\Omega})^3\,|\,v|_K\in Q_{m+1}(K)^3,\quad\forall K\in J_h\} \tag{3.2}$$

其中$m\geqslant1$。则$M_h\subset H^1(\Omega)$。

为构造Π_h，需引入下一引理，其是[6]p.37的直接结果。

引理2 $\forall v\in X$及$\forall q\in M_h$有

$$(q,\ \operatorname{div}v)=-(\nabla q,\ v)$$

定理3 存在Π_h满足定理 1 的(H$_1$)。

证 $\forall v=(v_1,\ v_2,\ v_3)^T\in X$，令$\hat{\Pi}\hat{v}_i$是$\hat{v}_i=v_i\circ F_K$在$Q_{m+1}(\hat{K})$中的$L^2$投影

$$\int_{\hat{K}}(\hat{v}_i-\hat{\Pi}\hat{v}_i)\hat{w}\,d\hat{\sigma}=0,\qquad\forall\hat{w}\in Q_{m+1}(\hat{K}) \tag{3.3}$$

由(2.3)易知，当$\hat{q}\in Q_m(\hat{K})$时，$\nabla\hat{q}DF_K^{-1}\cdot T_K\in Q_{m+1}(\hat{K})^3$，从而由(3.3)得

$$\int_{\hat{K}}(\hat{v}-\hat{\Pi}\hat{v})\nabla\hat{q}DF_K^{-1}\cdot T_K\,d\hat{\sigma}=0,\qquad\forall\hat{q}\in Q_m(\hat{K}) \tag{3.4}$$

其中 $\hat{v}=(\hat{v}_1,\ \hat{v}_2,\ \hat{v}_3)^T$，$\hat{\Pi}\hat{v}=(\hat{\Pi}\hat{v}_1,\ \hat{\Pi}\hat{v}_2,\ \hat{\Pi}\hat{v}_3)^T$

定义$\Pi_h:X\to X_h$使得$\forall v\in X$满足

$$\Pi_h v|_K=\hat{\Pi}\hat{v}\circ F_K^{-1},\qquad \forall K\in J_h \tag{3.5}$$

由(2.2)及(3.4)得

$$\int_K (v-\Pi_h v)\nabla q d\sigma=\int_{\hat{K}}(\hat{v}-\hat{\Pi}\hat{v})\nabla\hat{q}DF_K^{-1}\cdot T_K d\hat{\sigma}=0,\qquad \forall q\in Q_m(K) \tag{3.6}$$

对(3.6)求和且由引理 2 得(1.3)。

由(3.3)及[7]中p.104的推论 2 可得

$$\|\hat{\Pi}\hat{v}\|_{1,\hat{K}}\leqslant C\|\hat{v}\|_{1,\hat{K}} \tag{3.7}$$

$$\|\hat{v}-\hat{\Pi}\hat{v}\|_{1,\hat{K}}\leqslant C\|\hat{v}-\hat{w}_h\|_{1,\hat{K}} \tag{3.8}$$

其中w_h是引理 1 所给。由定理 2 和引理 1 可得(1.4)～(1.5)。即(H_1)成立。证毕。

因定理 1 的(H_2)是显然的。由上述讨论得下结论。

定理4 对于(3.1)～(3.2)定义的有限元空间及(3.5)定义的Π_h，问题(1.2)存在唯一解$(u_h,\ p_h)\in X_h\times M_h$且当(1.1)的解$(u,\ p)\in H^{m+2}(\Omega)^3\times H^{m+1}_{\sim}(\Omega)$时，有

$$\|u-u_h\|_{1,\Omega}+\|p-p_h\|_{0,\Omega}\leqslant Ch^{m+1}(\|u\|_{m+2,\Omega}+\|p\|_{m+1,\Omega})$$

附注1 当$m=1$时，M_h的自由度可取为q在六面体K的顶点的值，X_h的自由度可取为v在六面体K的顶点和各边中点的值，则在K上的总自由度为68个。若将K分成 5 个四面体（如图1），按[1]中的四面体单元格式，自由度取为q在四面体的顶点的值，v在四面体的顶点、各边中点及$\int_{K_i}vd\sigma$的值($i=1,\cdots,5$)，则在每个六面体K上需 101 个自由度。因此，在每个六面体K上多需 33 个自由度。若按[2]中的四面体剖分的二阶格式，也易知在K上需83个自由度，但由[2]中(3.22)～(3.24)知，[2]中的离散方程多一个方程组，实际解题时工作量更多。因此，本文的二阶格式较[1]、[2]的二阶格式都节省自由度，从而能大大地减少计算量。类似地可算出当$m\geqslant 2$时也较[2]的格式节省自由度。

附注2 由于三m次多项式较单m次多项式多一些高次项，因此，实际算题时，六面体单元格式得到的有限元解对真解的逼近较四面体单元的有限元解对真解的逼近更好。另外，虽然四面体单元简单，剖分却十分不简单，一个六面体可分成五个四面体，也可分成六个四面体，其间的相互关系也很不直观，数据的准备工作和计算结果的整理都很繁杂（见[8]第二章§5）。采用六面体剖分就可克服这些困难。其次，因三线性等参变换(2.2)可将曲面的六面体变成标准正方体$\hat{K}$，因此，我们的格式能较好地适应曲面区域的问题。这就充分显示出六面体单元的优越性。

参 考 文 献

[1] 罗振东，三维空间的Navier-Stokes问题的混合有限元分析，贵州工学院学报，20(1)(1991)，37—41。

[2] Girault, V., Incompressible finite element methods for Navier-Stokes equation with nonstandard boundary condition in R^3, *Comp. Math.*, 51(183)(1988), 55—74.

[3] 李开泰、黄艾香，《有限元方法及其应用》(Ⅰ)，西安交通大学出版社，西安 (1987)。

[4] Ciarlet, P. G., *The Finite Element Methods for Elliptic Problems*, North-Holland, Amsterdam (1978).

[5] 吉林大学数学系，《数学分析》（下册），人民教育出版社，北京 (1979)。

[6] Showalter, R. E., *Hilbert Space Methods for Partial Differential Equations*, University of Texas at Austin (1977).

[7] 朱起定、林群，《有限元超收敛理论》，湖南科学技术出版社 (1987)。

[8] 姜礼尚、庞之垣，《有限元法及其理论基础》，人民教育出版社，北京 (1980)。

Mixed Finite Element Method of Hexahedral Elements for Navier-Stokes Problem

Luo Zhen-dong

(Guizhou Economic Management Cadres Institute, Guiyang)

Abstract

In this paper, we derive a new mixed element format of hexahedral elements for Navier-Stokes problem in the three-dimensional space.

Key words Navier-Stokes problem, hexahedral element, degrees of freedom, mixed finite element