

文章编号: 1000-0887(2004) 02_0197_09

变截面圆形管道粘性流动的 伽辽金_摄动杂交解*

沈新荣, 高 琪, 章本照, 张金锁

(浙江大学 力学系, 杭州 310027)

(我刊原编委吴望 推荐)

摘要: 采用伽辽金_摄动杂交法来研究壁面是正弦形状的变截面圆形管道的粘性流动, 从而避免了摄动小参数的局限性和单纯伽辽金法基函数选取的任意性的困难. 讨论了边界和雷诺数对流动的影响, 获得流动分离点和附着点的位置, 还分析了壁面剪应力和摩擦系数沿轴向的变化情况. 在小参数的情况下, 计算所获得的结果与摄动解吻合良好.

关键词: 伽辽金_摄动杂交法; 变截面圆形管道; 血管流动

中图分类号: O351 文献标识码: A

引 言

近几年的研究表明, 血管壁的不规则形状所引起的不正常的血液流动是引起动脉疾病的重要因素, 而动脉硬化, 这一动脉疾病中最常见的病症, 往往发生在壁面剪应力较小或是剪应力方向发生改变的区域(Waters & Pedley, 1999)^[1]. 因此对血液在变窄收缩血管中的流动进行研究是不容忽视的, 而在这些流动特性中, 最主要是研究壁面的剪应力和分离点、附着点的位置, 这些特性在病症分析中具有举足轻重的地位.

为了了解血液在变窄收缩血管中的流动特性, 通常是先建立理论模型和数学方程来描述这个问题. 采用数学方法研究受阻的血液动脉流动是从 Young(1968)^[2] 开始的, 他运用简单的“次数量级”法进行分析得到流动受阻的一些因素. 在此之后开展了大量的理论和实验的研究, Lee 和 Fung(1969)^[3] 运用截面投影从数学上分析这个问题, 但是数学上收敛性和稳定性的要求使得结果只适用于雷诺数小于 40 的范围. Young 和 Tasi(1973)^[4,5] 对定常和不定常的受阻血管流动进行了一系列的活体实验, 结果表明沉积物的几何特性对于产生紊流的临界雷诺数有影响, 而且他们还观测到在振荡的流动中的临界雷诺数要比在稳定流小. 为了尝试使雷诺数的适用范围变大, Daly(1976)^[6]、Chow 和 Soda(1972)^[7]、McDonald(1979)^[8]、Deshpande(1977)^[9]、Morgan 和 Young(1979)^[10] 运用了 Pohlhausen、伽辽金、Kontorovich、摄动法和有限元等方法进行数学计算. Young(1979)^[11] 根据前人的结果给出了一个非常好的关于血液在狭窄的

* 收稿日期: 2001_11_13; 修订日期: 2003_09_30

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10272096)

作者简介: 沈新荣(1969—), 男, 浙江杭州人, 副教授, 博士(联系人. Tel: 13355789661; E_mail: xinrong.shen@263.net).

血管内流动的总结。在这些前人的研究成果中,Chow 和 Soda(1972)^[7]运用了摄动法获得了变窄收缩管道的层流的摄动解,但是这个结果受到摄动解的小参数限制而只能适用于小雷诺数,它并不反映大雷诺数时的真实流动特性。本文将在 Chow 和 Soda(1972)^[7]的摄动解的基础上运用伽辽金摄动杂交法研究流动特性,这样可克服摄动解小参数局限性使结果适用于大雷诺数的情况。

1 问题简述

对于血液在变窄收缩血管流动的问题研究,我们给出了以下的模型和假设。假设流动的流质是不可压牛顿粘性流体,流动是定常的。变截面圆形管道的壁面是轴对称的正弦形状曲线(图1)。

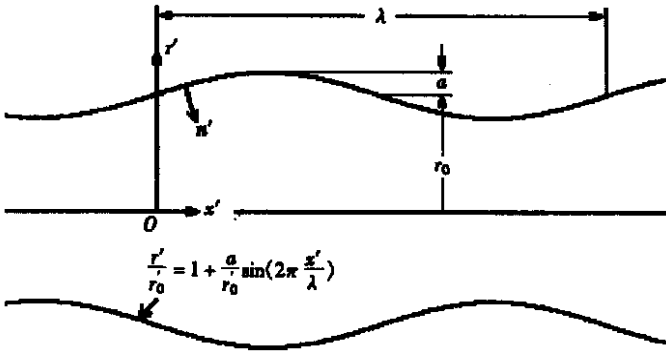


图1 正弦管壁的管道

其中管道径向坐标为 r' , 管道轴向坐标为 x' , 坐标原点在位于正弦管壁扩张段中点的中轴上, r_0 表示管道的平均半径, a 表示管壁波动振幅, λ 表示管壁波动一个周期的距离, n' 表示管壁的法向量。

对变量和坐标进行无量纲化,并引入定常不可压牛顿流体在轴对称情况下的流函数 ϕ 无量纲方程:

$$Re \delta \frac{\partial \phi}{\partial x} \left(\delta^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{2}{r} \delta^2 \phi + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) - \frac{\partial \phi}{\partial r} \delta^2 \phi - \delta^4 \phi = 0, \quad (1)$$

其中

$$Re = \frac{u_0 r_0}{\nu}, \quad x = \frac{x'}{\lambda}, \quad r = \frac{r'}{r_0}, \quad \phi = \frac{\phi'}{u_0 r_0^2}, \quad \delta = \frac{r_0}{\lambda}, \quad \varepsilon = \frac{a}{r_0},$$

$$\delta^2 = \delta^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} - r^{-1} \frac{\partial}{\partial r};$$

带下标0的变量为平均值,带上标的为有量纲变量。 u_0 表示管道特征半径下的平均流速, ν 表示运动粘性系数, ϕ' 表示流函数,无量纲后壁面沿轴向正弦曲线一个周期的坐标长度为1。

边界条件为:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0, \quad \text{在壁面上}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0, \quad \text{当 } r = 0. \quad (3)$$

体积流量不变, 即

$$\int_0^{\eta(x)} -2 \frac{\partial \phi}{\partial r} dr = Q, \quad \text{对于所有 } x, \quad (4)$$

上式中 $Q = Q' / (\pi r_0^2 u_0)$; Q' 是体积流量, $\eta(x)$ 是管壁的几何形状:

$$\eta(x) = 1 + \varepsilon \sin(2\pi x). \quad (5)$$

2 伽辽金_摄动杂交解

流函数方程(1), 在小雷诺数情况下已经得到了摄动解^[12], 我们将运用伽辽金_摄动法 (Ahmed, Noor & Chad 1984) 求解任意雷诺数的结果.

对于摄动解:

$$\phi = \phi_0 + \delta \phi_1 + \delta^2 \phi_2 + \dots, \quad (6)$$

其中零阶的摄动解 ϕ_0 满足非齐次边界条件, 而 $\phi_i (i > 0)$ 必须满足齐次边界条件. 现在不妨取摄动解 ϕ_i 作为基函数, 即假定伽辽金解的表达式为:

$$\phi = \phi_0 + a_1 \phi_1 + a_2 \phi_2 + \dots, \quad (7)$$

这里 $a_i (i = 0, 1, 2, \dots)$ 是待定系数. 将表达式(7)代入到方程(1)中:

$$L = Re \delta \frac{\partial \phi}{\partial x} \left[\dots^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{2}{r} \dots^2 \phi + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right] - \frac{\partial \phi}{\partial r} \dots^2 \phi - \dots^4 \phi, \quad (8)$$

待定系数 a_i 将通过求解方程:

$$\int_{\Omega} L \phi_i d\Omega = 0 \quad (9)$$

获得. Ω 表示流场所在区域.

2.1 流函数 ϕ

根据 Chow 和 Soda(1972)^[7] 获得的摄动解, 伽辽金表达式(7)中的基函数可取为:

$$\begin{aligned} \phi_0 &= AG, \\ \phi_1 &= \left[\left[Re \varepsilon^2 \frac{dg(x)}{dx} \right] \sqrt{\eta} \right] f(R), \\ \phi_2 &= -A \varepsilon \left[5 \varepsilon \left[\frac{dg(x)}{dx} \right]^2 - \eta \frac{d^2 g(x)}{dx^2} \right] H(R) - \\ &\quad \left[Re^2 \varepsilon^2 A^3 \left[\frac{dg(x)}{dx} \right]^2 \sqrt{\eta^2} \right] F(R); \end{aligned}$$

上述各式中:

$$\begin{aligned} G &= R^4 - 2R^2, \quad A = \frac{1}{2} Q = \frac{1}{2}, \quad f(R) = \frac{1}{9}(R^8 - 6R^6 + 9R^4 - 4R^2), \\ H(R) &= \frac{(R^2 - 1)^2 R^2}{3}, \quad F(R) = \frac{32R^{12} - 305R^{10} + 750R^8 - 713R^6 + 236R^4}{3600}, \\ g(x) &= \sin(2\pi x), \quad R = \frac{r}{\eta}. \end{aligned}$$

表达式(7)中的待定系数 a_1, a_2 可由下述伽辽金等式确定:

$$\int_{\Omega} L \phi_1 d\Omega = 0, \int_{\Omega} L \phi_2 d\Omega = 0 \quad (10)$$

表 1 给出 Re 、 δ 、 ε 等参数不同数值时, 求出的 a_1 、 a_2 值。

表 1 不同参数下的 a_1 、 a_2

$Re = 500, \delta = 0.1$			
ε	0.2	0.4	0.6
a_1	0.006 443 92	0.003 204 28	0.001 769 67
a_2	0.000 532 818	0.000 142 934	0.000 050 643 8
$\varepsilon = 0.4, \delta = 0.2$			
Re	25	500	1 000
a_1	0.001 813 12	0.002 352 65	0.001 123 34
a_2	0.007 587 59	0.000 148 348	0.000 040 231 8
$\varepsilon = 0.4, Re = 500$			
δ	0.1	0.2	
a_1	0.003 204 28	0.002 352 65	
a_2	0.000 142 934	0.000 148 348	

2.2 速度和涡量

根据流函数, 我们可给出速度 u' 、 v' 和涡量 Ω' :

$$u' = -\frac{1}{r'} \frac{\partial \phi'}{\partial r'}, \quad v' = \frac{1}{r'} \frac{\partial \phi'}{\partial x'} \quad (11)$$

$$\Omega' = \frac{1}{r'} \frac{\partial^2 \phi'}{\partial x'^2} + \frac{\partial}{\partial r'} \left(\frac{1}{r'} \frac{\partial \phi'}{\partial r'} \right) \quad (12)$$

相应的无量纲量为:

$$u(x, R) = \frac{u'}{u_0} = -\frac{1}{\Pi^2} R^{-1} \frac{\partial \phi}{\partial R} \quad (13)$$

$$v(x, R) = \frac{v'}{v_0} = \delta \Pi^{-1} \left[R^{-1} \frac{\partial \phi}{\partial x} - \Pi^{-1} \frac{d\Pi}{dx} \frac{\partial \phi}{\partial R} \right] \quad (14)$$

$$\Omega(x, r) = \frac{r'_0 \Omega'}{u_0} = \delta^2 r^{-1} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left[r^{-1} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right] \quad (15)$$

2.3 分离点和附着点

当雷诺数 Re 变大或是壁面的波动幅度增大后, 壁面的流动就会出现分离, 剪应力将变小, 而找到分离点和附着点对于分析流动特性很重要。

在分离点或附着点, 应满足:

$$\left. \frac{\partial u_s}{\partial n} \right|_{R=1} = 0 \quad (16)$$

上式中速度 $u_s = u_s(x, R)$, 是平行于 $R = 1$ 的壁面切向的速度分量, 表达式为:

$$u_s = u \cos \theta + v \sin \theta, \quad n = \frac{\eta'}{r_0} \quad (17)$$

这里 $\tan \theta$ 是壁面切向的斜率, n' 表示壁面的法向量。若由(16)式求得分离点或附着点的位置为 x_i , 则由下式可判断是分离点还是附着点:

当 $x > x_i$, $\frac{\partial u_s}{\partial n} < 0$; 则 x_i 是分离点;

当 $x > x_i$, $\frac{\partial u_s}{\partial n} > 0$; 则 x_i 是附着点·

2.4 剪应力和摩阻系数

通过速度分量的表达式, 可求出壁面剪应力:

$$\tau'_n = -\mu \frac{\partial u'_s}{\partial n}, \quad (18)$$

$$\tau_n = \frac{\tau'_n}{-\mu u_0/r_0} = \frac{\partial u_s}{\partial n}, \quad (19)$$

其中 μ 是粘性系数· 摩阻系数:

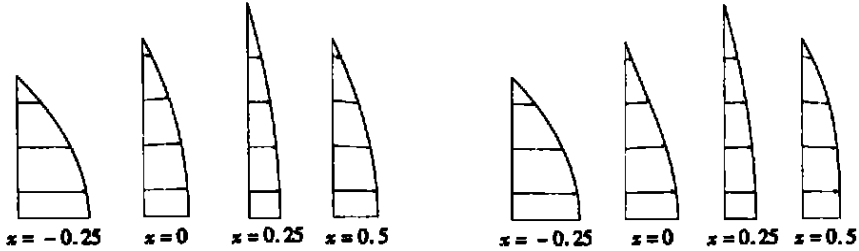
$$C_f = \left| \frac{\tau_n}{0.5\rho u_0^2} \right| = \frac{2}{Re} \frac{\partial u_s}{\partial n}. \quad (20)$$



伽辽金_摄动解的流线等值线图

摄动解的流线等值线图

图 2a 流线等值线 ($Re = 12.5$, $\delta = 0.1$, $\varepsilon = 0.2$)



伽辽金_摄动解的截面速度矢量图

摄动解的截面速度矢量图

图 2b 特征截面速度矢量图 ($Re = 12.5$, $\delta = 0.1$, $\varepsilon = 0.2$)

3 结果与讨论

3.1 小雷诺数

在小雷诺数的情况下我们将本文结果和摄动解^[12]进行比较· 从图 2a 的流线这两者的等值线图, 可以看出, 吻合很好· 图 2b 是两者特征截面上的速度矢量的比较, 这同样也显示出良好的一致性· 这表明本文的方法与结果是正确可靠的·

3.2 大雷诺数

在大雷诺数的情况下, 摄动解不能反映出真实的流场, 但是本文的结果能够体现出流场的特性· 图 3 是本文计算获得的雷诺数较大时 ($Re = 500$, $\delta = 0.1$, $\varepsilon = 0.4$) 的流线和涡量等值线图, 其中上方是流线, 下方是涡量等值线· 图中可以看出在管道的渐扩段出现了分离区·

图 4 给出了一个周期内的合成速度的分布, 根据方程(16) 我们可以求出分离点 ($x = -$

0.136 8) 和附着点($x = 0.023 01$)•

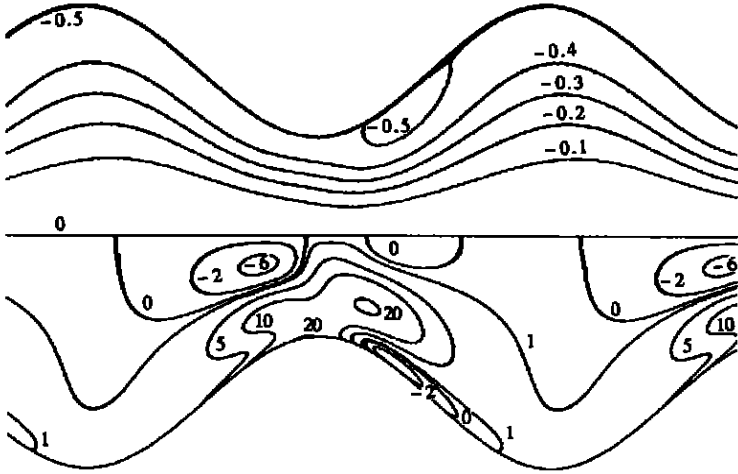


图3 流线和涡量等值线 ($Re = 500$, $\delta = 0.1$, $\varepsilon = 0.4$)

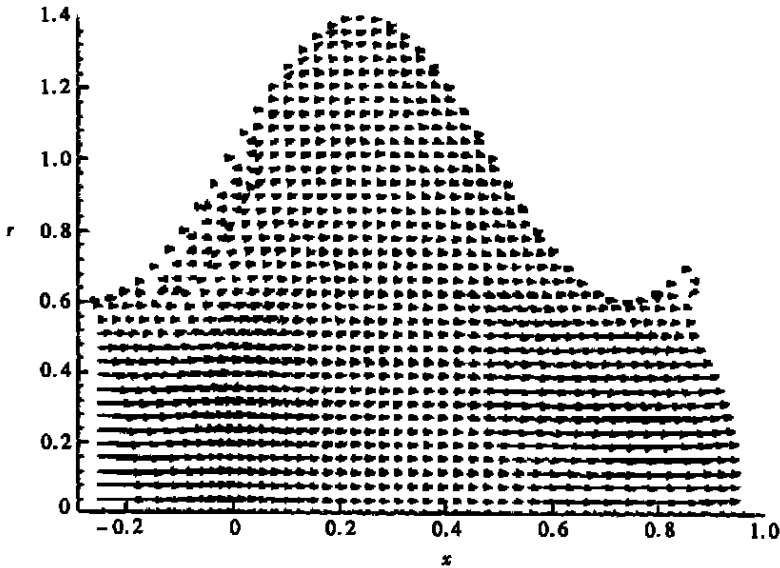


图4 速度矢量图 ($Re = 500$, $\delta = 0.1$, $\varepsilon = 0.4$)

图5给出了特征截面上的速度矢量图,很明显不同于图2b,在大雷诺数时, $x = 0$ 的截面上出现了回流的现象•

通过方程(19)和(20)可以求得壁面剪应力和摩阻系数,图6、图7分别显示沿轴的壁面剪应力和摩阻系数•在图中可以得到分离区的位置,当剪应力和摩阻系数为零时,该点就是分离点或附着点•

3.3 Re , δ , ε 对剪应力和分离区的影响

Re 、 δ 、 ε 的变化对流场的流动特性影响很大,它将直接影响分离区域的位置•表2给出了分离点和附着点的位置在不同的参数变化情况下的值•

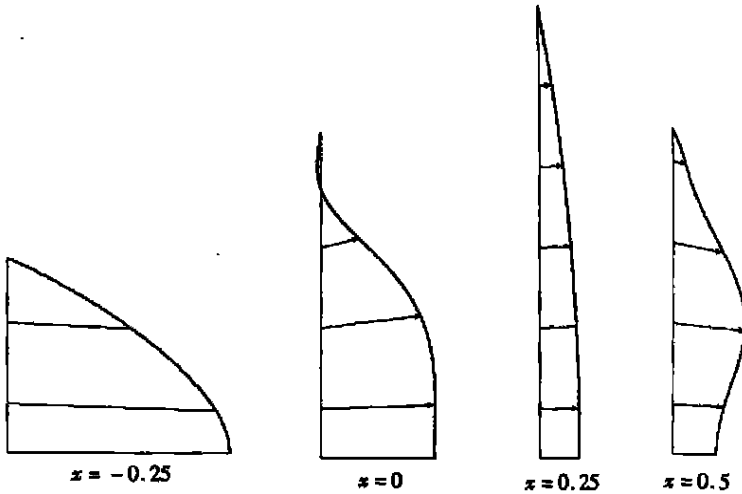


图5 伽辽金_摄动解的解面速度矢量图

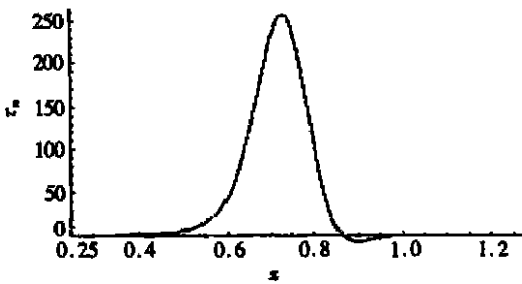
(Re = 500, $\delta = 0.1$, $\varepsilon = 0.4$)

图6 壁面剪应力分布

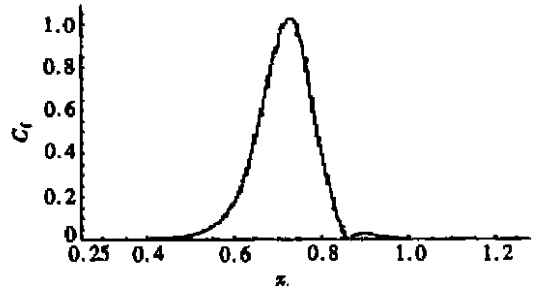
(Re = 500, $\delta = 0.1$, $\varepsilon = 0.4$)

图7 壁面摩擦系数

(Re = 500, $\delta = 0.1$, $\varepsilon = 0.4$)

表2 分离点和附着点的位置

Re = 500, $\delta = 0.1$			
ε	0.2	0.4	0.6
分离点	-0.087 62	-0.136 8	-0.160 23
附着点	0.028 137 4	0.023 01	-0.023 19
$\varepsilon = 0.4, \delta = 0.2$			
Re	500	1 000	
分离点	-0.104 31	-0.109 1	
附着点	-0.021 78	-0.016 0	

表2数据表明:

- 1) 给定 Re 、 δ 值, 当 ε 变大, 分离点的位置前移, 分离区域的范围扩大。
- 2) 给定 δ 、 ε 值, 当 Re 变大, 分离点的位置前移, 分离区域的范围扩大。

剪应力也随着 Re 、 δ 、 ε 的变化而变化。图8显示的是剪应力随着 ε 的变化而变化的情况。当 ε 变大, 剪应力的峰值也变大, 并在一定区域内, 剪应力为负值, 即为分离区。

图9显示了当 Re 变化时剪应力的变化, 从总体上来看, Re 变大使得壁面剪应力的值随之而沿着轴向提前达到峰值, 对照表2, 可见此时分离区域也随之产生并且范围扩大。

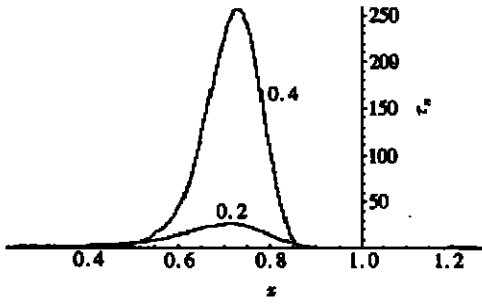
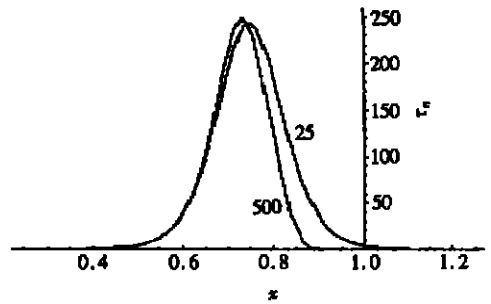
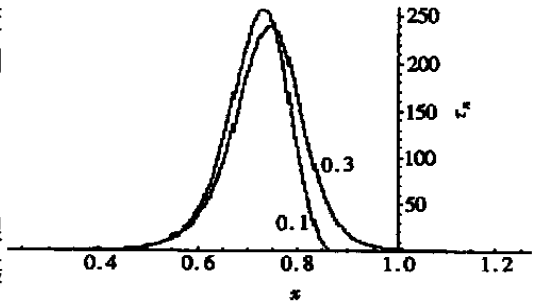
图8 ε 变化对剪应力的影响($Re = 500, \delta = 0.1$)图9 Re 变化对剪应力的影响($\delta = 0.2, \varepsilon = 0.4$)

图10显示了 δ 变化对剪应力的影响。 δ 变大使得壁面剪应力的值随之而沿着轴向延迟达到峰值,而且频率越大越不容易出现分离现象。

4 结 论

运用伽辽金-摄动杂交法,避免了小参数的限制,并且解决了伽辽金法选择基函数的困难。摄动法的结果局限于小雷诺数情况,而本文的结果不仅适用于小雷诺数,而且也适用于大雷诺数的情况。通过分析结果,可以获得以下的结论:

- 1) 随着 Re 的增大,管道的渐扩段会出现分离现象,分离区的大小、位置受 δ, ε 的影响。
- 2) 管道壁面某一点上的剪应力随着 ε 增大而增大; Re 的增大将会引起剪应力峰值的前移;而 δ 的增大反而使得剪应力的峰值推迟出现。
- 3) 在分离点和附着点上,剪应力等于零;在分离区域内,剪应力为负值并且出现回流。

图10 δ 变化对剪应力的影响($Re = 500, \varepsilon = 0.4$)

[参 考 文 献]

- [1] Waters S L, Pedley T J. Oscillatory flow in a tube of time-dependent curvature. Part 1: Perturbation to flow in a stationary curved tube[J]. J Fluid Mech, 1999, 383: 327—352.
- [2] Young D F. Effect of a time dependent stenosis on flow through a tube[J]. J Eng Industry, Trans ASME, 1968, 90: 248—252.
- [3] Lee J S, Fung Y C. Flow in locally constricted tube at low Reynolds numbers[J]. J Appl Mech, Trans ASME, 1969, 37: 9—16.
- [4] Young D F, Tasi F Y. Flow characteristics in models of arterial stenosis I—steady flow[J]. J Biomech, 1973, 6: 395—410.
- [5] Young D F, Tasi F Y. Flow characteristics in models of arterial stenosis II—unsteady flow[J]. Ibid, 1973, 6: 411—425.
- [6] Daly B J. A numerical study of pulsatile flow through stenosed canine femoral arteries[J]. J Biomech, 1976, 9: 465—475.
- [7] Chow J C F, Soda K. Laminar flow in tubes with constriction[J]. Phys Fluids, 1972, 15: 1700—1708.
- [8] McDonald D A. On steady flow through modeled vascular stenosis[J]. J Biomech, 1979, 12: 13—20.
- [9] Deshpande M D. Steady laminar and turbulent flow through vascular stenosis models[D]. Ph D Dis-

- sertation. Georgia Institute of Technology, 1977.
- [10] Morgan B E, Young D F. An integral method for the analysis of flow in arterial stenosis[J]. Bull Math Biol, 1974, **36**: 39—53.
- [11] Young D F. The fluid mechanics of arterial stenosis[J]. J Biomech Eng, Trans ASME, 1979, **101**: 157—175.
- [12] Ahmed K N, Chad D B. Hybrid perturbation/ Bubnow_Galerkin technique for nonlinear thermal analysis[J]. AIAA Journal, 1984, **22**(2): 287—294.
- [13] Joseph C F C, Kunihisea S. Laminar flow in tubes with constriction[J]. The Physics of Fluids, 1972, **15**(10): 1700—1706.
- [14] Padmanabhan N, Decanathan R. Mathematical model of an arterial stenosis, allowing for tethering [J]. Medical & Biological Engineering & Computing, 1981, **19**: 385—390.
- [15] Padmanabhan N, Jayaraman G. Flow in a curved tube with constriction—an application to the arterial system[J]. Medical & Biological Engineering & Computing, 1985, **25**: 208—215.
- [16] XUE Lei, TANG Jin_chun, SUN Bing_nan. Galerkin solutions of laminar flow in Helical elliptical pipes [J]. Acta Mchanica Sinica, 1998, **30**(6): 648—655.

Hybrid Perturbation_Galerkin Solution of the Flow in a Circular Cross_Section Tube With Constriction

SHEN Xin_rong, GAO Qi, ZHANG Ben_zhao, ZHANG Jin_suo

(Department of Mechanics, Zhejiang University,

Hangzhou 310027, P. R. China)

Abstract: Using hybrid perturbation_Galerkin technique, a circular cross_section tube model with sinusoidal wall is studied. This technique can remove the limitation of small parameters for perturbation and the difficulty of selecting good coordinate functions about Galerkin technique. The effects caused by the boundary conditions and the Reynolds number on the flow were discussed. The position of the separate and reattachment points was obtained. The tendency of the variation about the shear stress on the wall and friction factor along the axis direction were also analyzed. The results at a small parameter have good agreements with the perturbation ones.

Key words: hybrid perturbation_Galerkin technique; circular cross_section tube with constriction; blood flow