应用数学和力学，第13卷第12期（1992年12月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社 出版

在非均匀网格上解椭圆—双曲型偏微分方程奇异摄动问题

吴启光　　孙晓弟

（南京大学数学系，1991年10月18日收到）

摘　　要

本文考察了椭圆—双曲型偏微分方程奇异摄动问题(1.1)，证明了迎风差分格式在一特殊的非均匀网格上是一阶一致收敛的．最后给出了一些数值结果．

关键词　偏微分方程　奇异摄动问题　迎风差分格式　非均匀网格

一、引　　言

本文在正方形区域$\Omega(0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1)$内考虑椭圆型方程第一边值问题：

$$L_\varepsilon u\equiv\varepsilon\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}-c(x,y)u=f(x,y) \tag{1.1a}$$

$$u|_\Gamma=0 \tag{1.1b}$$

这里ε是$(0,1]$中的参数，Γ是区域Ω的边界，函数$a(x,y)$，$b(x,y)$，$c(x,y)$和$f(x,y)$充分光滑且满足

$$a(x,y)>2\alpha>0,\ b(x,y)>2\beta>0,\ c(x,y)>\delta>0 \tag{1.2}$$

我们还假设方程的右端和系数满足一定的相容性条件（即[1]中的(2.3)～(2.7)式），则由[2]可知，方程(1.1)存在唯一解$u_\varepsilon(x,y)\in C^3(\Omega)$满足

$$\left|\frac{\partial^i u}{\partial x^i}\right|\leqslant M\left[1+\varepsilon^{-i}\exp\left(-\frac{2\alpha x}{\varepsilon}\right)\right],\qquad(i=0,1,2,3) \tag{1.3a}$$

$$\left|\frac{\partial^j u}{\partial y^j}\right|\leqslant M\left[1+\varepsilon^{-j}\exp\left(-\frac{2\beta y}{\varepsilon}\right)\right],\qquad(j=0,1,2,3) \tag{1.3b}$$

且有渐近展开式

$$u_\varepsilon(x,y)=w(x,y)+v_0^{(1)}(x,y)+v_0^{(2)}(x,y)+v_0^{(3)}(x,y)+O(\varepsilon) \tag{1.4}$$

其中$w(x,y)\in C^2(\Omega)$是退化问题

$$\left.\begin{aligned}&L_0 w\equiv a(x,y)\frac{\partial w}{\partial x}+b(x,y)\frac{\partial w}{\partial y}-c(x,y)w=f(x,y)\\&w(1,y)=0,\ \ w(x,1)=0\end{aligned}\right\} \tag{1.5}$$

的解，

$$v_0^{(1)}(x,y)=-w(0,y)\exp[-a(0,y)x/\varepsilon]$$

$$v_0^{(2)}(x,y)=-w(x,0)\exp[-b(x,0)y/\varepsilon]$$

$$v_0^{(3)}(x,y)=w(0,0)\exp[-a(0,0)x/\varepsilon-b(0,0)y/\varepsilon]$$

文[2]还在均匀网格上对方程(1.1)建立了一族一致收敛的差分格式，并给出了差分格式离散化的一致误差界 $O(h^{\frac{1}{2}}+\tau^{\frac{1}{2}})$. 本文将在一特殊的非均匀网格上，考察方程(1.1)的迎风差分格式，并证明了该格式关于x和y方向的步长均是一阶一致收敛的，改进了文[1]和[2]的一致收敛阶. 最后给出了一些数值例子.

本文记M，M_1，…为不依赖于ε和离散网格的某些正常数，在不同的地方可表示不同的值.

二、网格和格式

非均匀网格 $I_{h,\tau}=\{(x_i,y_j):i=0,1,\cdots,N;\ j=0,1,\cdots,M\}$ 是通过网格产生函数 $\lambda(t)$ 得到，即

$$x_i=\lambda(t_i);\ t_i=ih;\ i=0,1,\cdots,N;\ h=1/N \tag{2.1a}$$

$$y_j=\lambda(s_j);\ s_j=j\tau;\ j=0,1,\cdots,M;\ \tau=1/M \tag{2.1b}$$

取

$$\lambda(t)=\begin{cases}\psi(t)\equiv-A\varepsilon\ln(1-t/q), & t\in[0,\alpha]\\ \pi(t)\equiv\psi(\alpha)+\psi'(\alpha)(t-\alpha), & t\in(\alpha,1]\end{cases} \tag{2.2}$$

其中$q\in(0,1)$，$A\in(0,q/\varepsilon)$为固定正数，而α由下式确定

$$\psi(\alpha)+\psi'(\alpha)(1-\alpha)=1$$

即$\lambda(1)=1$. 不难证明$\alpha\in(0,q)$存在唯一，且有以下性质：

（1） $q-\alpha=M\varepsilon$，$\psi(\alpha)=-A\varepsilon\ln(1-\alpha/q)=-M\varepsilon\ln\varepsilon$ (2.3a)

（2） $1\leqslant\psi'(\alpha)\leqslant(1-q)^{-1}$，$0\leqslant\lambda'(t)\leqslant\psi'(\alpha)$ (2.3b)

（3） $\psi''(\alpha)=M\varepsilon^{-1}$ (2.3c)

记 $h_i=x_{i+1}-x_i$，$\tau_j=y_{j+1}-y_j$.

现在非均匀网格 $I_{h,\tau}$ 上对方程(1.1)构造如下迎风差分格式

$$\left.\begin{aligned}L_\varepsilon^{(h,\tau)}u_{ij}^{(h,\tau)}=\varepsilon(D''_{x\bar{x}}u_{ij}^{(h,\tau)}+D''_{y\bar{y}}u_{ij}^{(h,\tau)})+a_{ij}D'_xu_{ij}^{(h,\tau)}\\+b_{ij}D'_yu_{ij}^{(h,\tau)}-c_{ij}u_{ij}^{(h,\tau)}=f_{ij}\\ u^{(h,\tau)}|_{\Gamma_{h,\tau}}=0\end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

其中

$$D''_{x\bar{x}}u_{ij}^{(h,\tau)}=2[h_iu_{i-1\,j}^{(h,\tau)}-(h_i+h_{i-1})u_{ij}^{(h,\tau)}+h_{i-1}u_{i+1\,j}^{(h,\tau)}]/[h_ih_{i-1}(h_i+h_{i-1})]$$

$$D''_{y\bar{y}}u_{ij}^{(h,\tau)}=2[\tau_ju_{i\,j-1}^{(h,\tau)}-(\tau_j+\tau_{j-1})u_{ij}^{(h,\tau)}+\tau_{j-1}u_{i\,j+1}^{(h,\tau)}]/[\tau_j\tau_{j-1}(\tau_j+\tau_{j-1})]$$

$$D'_xu_{ij}^{(h,\tau)}=[u_{i+1\,j}^{(h,\tau)}-u_{ij}^{(h,\tau)}]/h_i$$

$$D'_yu_{ij}^{(h,\tau)}=[u_{i\,j+1}^{(h,\tau)}-u_{ij}^{(h,\tau)}]/\tau_j$$

$\Gamma_{h,\tau}=\Gamma\cap I_{h,\tau}$，$a_{ij}=a(x_i,y_j)$，$b_{ij}$，$c_{ij}$和$f_{ij}$类似定义.

为了分析格式(2.4)的收敛性，需要以下引理.

引理1 设$\{u_{ij}^{(h,\tau)}\}$是非均匀网格$I_{h,\tau}$上的网格函数. 若 $u^{(h,\tau)}|_{\Gamma_{h,\tau}}\geqslant0$，且

$$L_\varepsilon^{(h,\tau)}u_{ij}^{(h,\tau)}\leqslant0,\qquad(i=1,2,\cdots,N-1;\ j=1,2,\cdots,M-1)$$

则对一切i和j有$u_{ij}^{(h,\tau)}\geqslant 0$.

引理2 令

$$r_i'=\prod_{k=0}^{i-1}\varepsilon/(\varepsilon+\alpha h_k),\quad r_j''=\prod_{k=0}^{j-1}\varepsilon/(\varepsilon+\beta\tau_k)$$

$$r_{ij}=r_i'+r_j'',\qquad (i=0,1,\cdots,N;\ j=0,1,\cdots,M)$$

其中设$\prod_{k=0}^{-1}(\cdot)=1$，则以下不等式成立

$$L_\varepsilon^{(h,\tau)}r_{ij}\leqslant -M[r_i'/\max(\varepsilon,h_i)+r_j''/\max(\varepsilon,\tau_j)]$$
$$(i=1,2,\cdots,N-1;\ j=1,2,\cdots,M-1)$$

证明 通过简单的代数运算可得

$$L_\varepsilon^{(h,\tau)}r_{ij}=-\frac{\alpha}{\varepsilon+\alpha h_i}\left[a_{ij}-\frac{2h_i\alpha}{h_i+h_{i-1}}\right]r_i'$$
$$-\frac{\beta}{\varepsilon+\beta\tau_j}\left[b_{ij}-\frac{2\tau_j\beta}{\tau_j+\tau_{j-1}}\right]r_j''-c_{ij}r_{ij}$$

由于$a(x,y)>2\alpha>0$，$b(x,y)>2\beta>0$，故存在不依赖于ε，h和τ的正常数M_1和M使得

$$L_\varepsilon^{(h,\tau)}r_{ij}\leqslant -M_1\left(\frac{1}{\varepsilon+\alpha h_i}r_i'+\frac{1}{\varepsilon+\beta\tau_j}r_j''\right)$$
$$\leqslant -M[r_i'/\max(\varepsilon,h_i)+r_j''/\max(\varepsilon,\tau_j)]$$

引理证毕.

本文的主要结论是

定理1 设网格$I_{h,\tau}$由(2.1)给出，且选取常数A使得$A\min(\alpha,\beta)\geqslant 1$. 令$\{u_{ij}^{(h,\tau)}\}$是差分格式(2.4)的解，$u_\varepsilon(x,y)$是原方程(1.1)的解，则

$$|u_{ij}^{(h,\tau)}-u_\varepsilon(x_i,y_j)|\leqslant M(h+\tau),\qquad (i=0,1,\cdots,N;\ j=0,1,\cdots,M)\tag{2.5}$$

三、定 理 1 的 证 明

差分格式(2.4)的截断误差为

$$R_{ij}=L_\varepsilon^{(h,\tau)}u_\varepsilon(x_i,y_j)-(L_\varepsilon u_\varepsilon)(x_i,y_j),$$
$$(i=1,2,\cdots,N-1;\ j=1,2,\cdots,M-1)\tag{3.1}$$

我们将分两种情形来证明定理1.

情形1° 假设$\varepsilon\geqslant\max(M_1h,M_2\tau)$，其中正常数$M_1$和$M_2$由以下的(3.11)和(3.13)式确定. 利用泰勒展开易得

$$|R_{ij}|\leqslant M\varepsilon\left[h_i\left|\frac{\partial^3u_\varepsilon(\theta_i^1,y_j)}{\partial x^3}\right|+\tau_j\left|\frac{\partial^3u_\varepsilon(x_i,\theta_j^2)}{\partial y^3}\right|\right]$$
$$+M\left[h_i\left|\frac{\partial^2u_\varepsilon(\theta_i^3,y_j)}{\partial x^2}\right|+\tau_j\left|\frac{\partial^2u_\varepsilon(x_i,\theta_j^4)}{\partial y^2}\right|\right]\tag{3.2}$$

其中θ_i^1，$\theta_i^3\in(x_{i-1},x_{i+1})$，$\theta_j^2$，$\theta_j^4\in(y_{j-1},y_{j+1})$. 注意到

$$h_i=\lambda(t_{i+1})-\lambda(t_i)\leqslant h\lambda'(t_{i+1})\leqslant Mh\tag{3.3a}$$

$$\tau_j=\lambda(s_{j+1})-\lambda(s_j)\leqslant\tau\lambda'(s_{j+1})\leqslant M\tau\tag{3.3b}$$

再利用导数估计(1.3)，得

$$|R_{ij}|\leqslant M(h+\tau)+Mh\lambda'(t_{i+1})V_{1\varepsilon}(2x_{i-1})/\varepsilon^2 \\ +M\tau\lambda'(s_{j+1})V_{2\varepsilon}(2y_{j-1})/\varepsilon^2 \tag{3.4}$$

其中 $V_{1\varepsilon}(t)=\exp[-\alpha t/\varepsilon]$，$V_{2\varepsilon}(t)=\exp[-\beta t/\varepsilon]$

首先估计$R_i'\equiv\lambda'(t_{i+1})V_{1\varepsilon}(2x_{i-1})/\varepsilon^2$.

情形1°1 令$t_{i-1}\geqslant a$. 由于$|\lambda'(t)|\leqslant M$,

$$V_{1\varepsilon}(x_{i-1})\leqslant V_{1\varepsilon}(\lambda(a))=\exp[A\alpha\ln(1-a/q)]=(1-a/q)^{A\alpha} \\ =[1-(q-M\varepsilon)/q]^{A\alpha}\leqslant M\varepsilon$$

因此

$$R_i'\leqslant M \tag{3.5}$$

情形1°2 令$t_{i-1}\leqslant q-3h$, $t_{i-1}<a$, $t_{i+1}\leqslant q-h$. 此时不难验证

$$q-t_{i+1}\geqslant(q-t_{i-1})/3 \tag{3.6}$$

由于

$$\varepsilon^{-1}\lambda'(t_{i+1})V_{1\varepsilon}(x_{i-1})\leqslant\varepsilon^{-1}\psi'(t_{i+1})V_{1\varepsilon}(x_{i-1})=A(q-t_{i+1})^{-1}\exp[A\alpha\ln(1-t_{i-1}/q)] \\ \leqslant M(q-t_{i+1})^{-1}(q-t_{i-1})\leqslant M$$

所以

$$R_i'\leqslant MV_{1\varepsilon}(x_{i-1})/\varepsilon \tag{3.7}$$

又由于 $\psi'(t)=A\varepsilon/(q-t)$

$$h_{i-1}=\lambda(t_i)-\lambda(t_{i-1})\leqslant\psi(t_i)-\psi(t_{i-1})\leqslant h\psi'(t_i)\leqslant A\varepsilon/2 \tag{3.8}$$

故$V_{1\varepsilon}(x_{i-1})\leqslant MV_{1\varepsilon}(x_i)$. 同理可证

$$h_i\leqslant A\varepsilon \tag{3.9}$$

因此(3.7)式可表示成

$$R_i'\leqslant MV_{1\varepsilon}(x_i)/\max(\varepsilon,h_i) \tag{3.10}$$

情形1°3 令$q-3h<t_{i-1}<a$. 因$a=q-M\varepsilon$，故此时有

$$\varepsilon<M_1h \tag{3.11}$$

由于情形1°仅讨论$\varepsilon\geqslant\max(M_1h,M_2\tau)\geqslant M_1h$，故情形1°3不会出现.

结合情形1°1～1°3可知，若$\varepsilon\geqslant M_1h$ 则

$$R_i'\leqslant M[1+V_{1\varepsilon}(x_i)/\max(\varepsilon,h_i)],\qquad (i=1,2,\cdots,N-1) \tag{3.12}$$

类似于上式可证，存在不依赖于ε和$I_{h,\tau}$的正常数M_2使得当

$$\varepsilon\geqslant M_2\tau \tag{3.13}$$

时，$R_j''\equiv\lambda'(s_{j+1})V_{2\varepsilon}(2y_{j-1})/\varepsilon^2$满足

$$R_j''\leqslant M[1+V_{2\varepsilon}(y_j)/\max(\varepsilon,\tau_j)],\qquad (j=1,2,\cdots,M-1)$$

因此对于情形1°有

$$|R_{ij}|\leqslant M(h+\tau)+MhR_i'+M\tau R_j'' \\ \leqslant M[h+\tau+hV_{1\varepsilon}(x_i)/\max(\varepsilon,h_i)+\tau V_{2\varepsilon}(y_j)/\max(\varepsilon,\tau_j)] \\ \leqslant M[h+\tau+hr_i'/\max(\varepsilon,h_i)+\tau r_j''/\max(\varepsilon,\tau_j)] \\ (i=1,2,\cdots,N-1;\ j=1,2,\cdots,M-1)$$

作闸函数

$$\phi_{ij}=M_3[h(2-x_i)+\tau(2-y_j)+(h+\tau)r_{ij}]$$

利用引理1和2可证，若选取M_3适当大，则

$$|u_{ij}^{(h,\tau)}-u_\varepsilon(x_i,y_j)|\leqslant\phi_{ij}\leqslant M(h+\tau),\qquad (i=0,1,\cdots,N;\ j=0,1,\cdots,M)$$

情形2° 假设$\varepsilon<\max(M_1h,M_2\tau)$。为简单起见，记

$$l_1u\equiv\varepsilon\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{2}c(x,y)u$$

$$l_2u\equiv\varepsilon\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+b(x,y)\frac{\partial y}{\partial y}-\frac{1}{2}c(x,y)u$$

$$l_1^{(h,\tau)}u_{ij}^{(h,\tau)}=\varepsilon D''_{x\bar{x}}u_{ij}^{(h,\tau)}+a_{ij}D'_xu_{ij}^{(h,\tau)}-\frac{1}{2}c_{ij}u_{ij}^{(h,\tau)}$$

$$l_2^{(h,\tau)}u_{ij}^{(h,\tau)}=\varepsilon D''_{y\bar{y}}u_{ij}^{(h,\tau)}+b_{ij}D'_yu_{ij}^{(h,\tau)}-\frac{1}{2}c_{ij}u_{ij}^{(h,\tau)}$$

显然$L_\varepsilon=l_1+l_2$，$L_\varepsilon^{(h,\tau)}=l_1^{(h,\tau)}+l_2^{(h,\tau)}$。为证(2.5)，先估计差

$$e_{ij}^{(h,\tau)}\equiv u_{ij}^{(h,\tau)}-\left[w(x_i,y_j)+\sum_{k=1}^{3}v_0^{(k)}(x_i,y_j)\right]\tag{3.14}$$

注意到$w\in C^2[\Omega]$，

$$L_\varepsilon^{(h,\tau)}(u_{ij}^{(h,\tau)}-w(x_i,y_j))=f_{ij}-L_0^{(h,\tau)}w(x_i,y_j)-\varepsilon\left[\frac{\partial^2w}{\partial x^2}(\xi_i,y_j)+\frac{\partial^2w}{\partial y^2}(x_i,\eta_j)\right]$$

$$=O(\varepsilon+h+\tau),\qquad \xi_i\in(x_{i-1},x_{i+1}),\ \eta_j\in(y_{j-1},y_{j+1})\tag{3.15}$$

故以 $L_\varepsilon^{(h,\tau)}$作用于(3.14)得

$$L_\varepsilon^{(h,\tau)}e_{ij}^{(h,\tau)}=O(h+\tau+\varepsilon)-L_\varepsilon^{(h,\tau)}\left(\sum_{k=1}^{3}v_0^{(k)}\right)(x_i,y_j)\tag{3.16}$$

下面来估计$L_\varepsilon^{(h,\tau)}v_0^{(k)}(x_i,y_j)$，$(k=1,2,3)$。

首先估计$L_\varepsilon^{(h,\tau)}v_0^{(1)}(x_i,y_j)$。由于$v_0^{(1)}(x_i,y_j)$关于变量$y$是二次连续可微，且其导数关于$\varepsilon$一致有界，故类似于(3.15)可证

$$l_2^{(h,\tau)}v_0^{(1)}(x_i,y_j)-l_2v_0^{(1)}(x_i,y_j)=O(\varepsilon+\tau),$$
$$(i=1,2,\cdots,N-1;\ j=1,2,\cdots,M-1)\tag{3.17}$$

又由于$v_0^{(1)}(x,y)$关于x的导数估计满足(1.3a)，再注意到(3.5)和(3.10)式对一切$\varepsilon\in(0,1]$和$h>0$均成立，所以类似于情形1°可证，对于情形2°1($t_{i-1}\geqslant\alpha$)和情形2°2($t_{i-1}\leqslant q-3h$，$t_{i-1}<\alpha$)，有

$$I_{ij}^{(1)}\equiv|l_1^{(h,\tau)}v_0^{(1)}(x_i,y_j)-l_1v_0^{(1)}(x_i,y_j)|\leqslant Mh[1+r_i'/\max(\varepsilon,h_i)]\tag{3.18}$$

对于情形2°3($q-3h<t_{i-1}<\alpha$)，由于此时

$$V_{1\varepsilon}(x_{i-1})=\exp(A\alpha\ln(1-t_{i-1}/q))=(1-t_{i-1}/q)^{A\alpha}\leqslant Mh\tag{3.19}$$

故利用中值定理得

$$I_{ij}^{(1)}=\left|2\varepsilon\left[\frac{\partial v_0^{(1)}(x_i^+,y_j)}{\partial x}-\frac{\partial v_0^{(1)}(x_i^-,y_j)}{\partial x}\right]\Big/(h_i+h_{i-1})+a_{ij}\frac{v_0^{(1)}(x_{i+1},y_j)-v_0^{(1)}(x_i,y_j)}{h_i}\right.$$
$$\left.+w(0,y_j)a(0,y_j)\cdot\frac{a(0,y_j)-a(x_i,y_j)}{\varepsilon}v_0^{(1)}(x_i,y_j)\right|$$
$$\leqslant MV_{1\varepsilon}(2x_{i-1})/h_i+MV_{1\varepsilon}(x_i)$$
$$\leqslant MV_{1\varepsilon}(2x_{i-1})/h_i+Mh\tag{3.20}$$

其中$x_i^-\in(x_{i-1},x_i)$，$x_i^+\in(x_i,x_{i+1})$。若$h_i\geqslant Mh$，则由(3.19)和(3.20)得

$$I_{ij}^{(1)}\leqslant Mh \tag{3.21}$$

若$h_{i-1}\leqslant M\varepsilon$，则同样由(3.19)和(3.20)得

$$I_{ij}^{(1)}\leqslant MhV_{1\varepsilon}(x_i)/h_i+Mh \tag{3.22}$$

因此根据以下的命题1，对于情形2°3有

$$\begin{aligned}I_{ij}^{(1)}&\leqslant Mh[1+V_{1\varepsilon}(x_i)/\max(\varepsilon,h_i)]\\&\leqslant Mh[1+r_i'/\max(\varepsilon,h_i)]\end{aligned} \tag{3.23}$$

现在估计 $L_\varepsilon^{(h,\tau)}v_0^{(k)}(x_i,y_j)$，$k=2$，3．由于$v_0^{(2)}(x,y)$关于变量$x$是二次连续可微，且其导数关于$\varepsilon$一致有界，而关于变量$y$的导数估计满足(1.3b)，故类似于(3.17)、(3.18)和(3.23)可得

$$|l_1^{(h,\tau)}v_0^{(2)}(x_i,y_j)-l_1v_0^{(2)}(x_i,y_j)|\leqslant M(\varepsilon+h) \tag{3.24}$$

$$|l_2^{(h,\tau)}v_0^{(2)}(x_i,y_j)-l_2v_0^{(2)}(x_i,y_j)|\leqslant M\tau[1+r_j''/\max(\varepsilon,\tau_j)] \tag{3.25}$$

$$(i=1,2,\cdots,N-1;\ j=1,2,\cdots,M-1)$$

又由于$v_0^{(3)}(x,y)$关于x和y的导数估计满足(1.3a) 和 (1.3b)，故类似于 (3.18)、(3.23)和(3.25)可证，

$$|l_1^{(h,\tau)}v_0^{(3)}(x_i,y_j)-l_1v_0^{(3)}(x_i,y_j)|\leqslant Mh[1+r_i'/\max(\varepsilon,h_i)] \tag{3.26}$$

$$|l_2^{(h,\tau)}v_0^{(3)}(x_i,y_j)-l_2v_0^{(3)}(x_i,y_j)|\leqslant M\tau[1+r_j''/\max(\varepsilon,\tau_j)] \tag{3.27}$$

$$(i=1,2,\cdots,N-1;\ j=1,2,\cdots,M-1)$$

综合(3.17)～(3.18)、(3.23)～(3.27)可得

$$\begin{aligned}&\left|L_\varepsilon^{(h,\tau)}\left(\sum_{k=1}^3 v_0^{(k)}(x_i,y_j)\right)-L_\varepsilon\left(\sum_{k=1}^3 v_0^{(k)}\right)(x_i,y_j)\right|\\&\leqslant M(h+\tau+\varepsilon)+M[hr_i'/\max(\varepsilon,h_i)+\tau r_j''/\max(\varepsilon,\tau_j)]\\&(i=1,2,\cdots,N-1;\ j=1,2,\cdots,M-1)\end{aligned} \tag{3.28}$$

又由于

$$\left|\frac{\partial^j v_0^{(1)}(x,y)}{\partial y^j}\right|\leqslant M\exp\left[-\frac{\alpha x}{\varepsilon}\right]=MV_{1\varepsilon}(x),\qquad (j=0,1,2)$$

$$\left|\frac{\partial^i v_0^{(2)}(x,y)}{\partial x^i}\right|\leqslant M\exp\left[-\frac{\beta y}{\varepsilon}\right]=MV_{2\varepsilon}(y),\qquad (i=0,1,2)$$

即有$l_2v_0^{(1)}(x,y)\leqslant MV_{1\varepsilon}(x)$，$l_1v_0^{(2)}(x,y)\leqslant MV_{2\varepsilon}(y)$，故

$$\begin{aligned}\left|L_\varepsilon\left(\sum_{k=1}^3 v_0^{(k)}\right)(x,y)\right|&=|\varepsilon^{-1}a(0,y)[a(0,y)-a(x,y)]v_0^{(1)}(x,y)-\frac{1}{2}c(x,y)v_0^{(1)}(x,y)\\&+l_2v_0^{(1)}(x,y)+l_1v_0^{(2)}(x,y)+\varepsilon^{-1}b(x,0)[b(x,0)-b(x,y)]v_0^{(2)}(x,y)\\&-\frac{1}{2}c(x,y)v_0^{(2)}(x,y)+\varepsilon^{-1}a(0,0)[a(0,0)-a(x,y)]v_0^{(3)}(x,y)\\&+\varepsilon^{-1}b(0,0)[b(0,0)-b(x,y)]v_0^{(3)}(x,y)-c(x,y)v_0^{(3)}(x,y)|\\&\leqslant M[V_{1\varepsilon}(x)+V_{2\varepsilon}(y)]\end{aligned} \tag{3.29}$$

所以由(3.16)、(3.28)和(3.29)得

$$\begin{aligned}|L_\varepsilon^{(h,\tau)}e_{ij}^{(h,\tau)}|&\leqslant M(\varepsilon+h+\tau)+M[hr_i'/\max(\varepsilon,h_i)+\tau r_j''/\max(\varepsilon,\tau_j)]\\&+M(r_i'+r_j''),\qquad (i=1,2,\cdots,N-1;\ j=1,2,\cdots,M-1)\end{aligned}$$

作闸函数

$$\phi_{ij}=M(\varepsilon+h+\tau)[(3-x_i-y_j)+r_{ij}]$$

利用引理1和2易得

$$|e_{ij}^{(h,\tau)}|\leqslant\phi_{ij}\leqslant M(\varepsilon+h+\tau)$$

再根据渐近展开式(1.4)和情形2°的假设$\varepsilon<\max(M_1h,M_2\tau)$知

$$|u_{ij}^{(h,\tau)}-u_\varepsilon(x_i,y_j)|\leqslant M(h+\tau+\varepsilon)+M\varepsilon\leqslant M(h+\tau)$$

即对于情形2°，(2.5)式也成立。

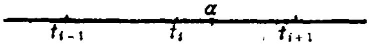
定理证毕。

命题1 对于情形2°3，以下结论成立：

(1) 不等式$h_i\geqslant Mh$和$h_{i-1}\leqslant M\varepsilon$必有一个成立；

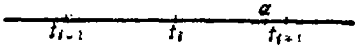
(2) $h_i\geqslant M\varepsilon$。

证明 若 $a\leqslant(t_i+t_{i+1})/2$，则



$$h_i=\lambda(t_{i+1})-\lambda(t_i)\geqslant\lambda(t_{i+1})-\lambda(t_{i+1}-h/2)=h\psi'(a)/2\geqslant h/2\quad(\geqslant M\varepsilon)$$

若 $a\geqslant(t_i+t_{i+1})/2$，则$q-t_i\geqslant h/2$，且



$$h_{i-1}=\lambda(t_i)-\lambda(t_{i-1})\leqslant h\lambda'(t_i)\leqslant h\psi'(t_i)=hA\varepsilon/(q-t_i)\leqslant 2A\varepsilon$$

同时利用条件 $q-t_i\leqslant 2h$可证

$$h_i\geqslant h_{i-1}=\psi(t_i)-\psi(t_{i-1})=A\varepsilon\ln(1+h/(q-t_i))\geqslant M\varepsilon$$

命题得证。

四、数 值 结 果

本节运用差分格式(2.4)对以下奇异摄动问题

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon(u_{xx}+u_{yy})+u_x+u_y=f(x,y)\\&u|_\Gamma=g(x,y)\end{aligned}\right\}\tag{4.1}$$

进行数值计算，其中右端$f(x,y)$和边界条件$g(x,y)$由方程的精确解$u_\varepsilon(x,y)=\sin(x+y)+(\exp[-x/\varepsilon]+\exp[-y/\varepsilon]-2\exp[-1/\varepsilon])/(1-\exp[-1/\varepsilon])$确定。在数值计算中，我们始终取 $h=\tau$，$\varepsilon=10^{-s}(s=1,2,\cdots,6)$。在表1中，列出了最大值误差 $E_\infty\equiv\mathop{\mathrm{man}}\limits_{i,j}|u_{ij}^{(h,h)}-u_\varepsilon(x_i,y_j)|$和数值收敛阶 $p\equiv(\ln E_\infty^2-\ln E_\infty^1)/\ln 2$，其中 E_∞^1，E_∞^2 分别是非均匀网格 $I_{h,h}$，

表 1

	$\varepsilon=10^{-1}$		$\varepsilon=10^{-2}$		$\varepsilon=10^{-3}$		$\varepsilon=10^{-4}$		$\varepsilon=10^{-5}$		$\varepsilon=10^{-6}$	
h	E_∞	p	E_∞	p	E_∞	p	E_∞	p	E_∞	p	E_∞	p
1/8	1.6E−1		2.9E−1		3.2E−1		3.3E−1		3.4E−1		3.4E−1	
1/16	1.1E−1	0.67	2.3E−1	0.34	2.6E−1	0.26	2.8E−1	0.25	2.8E−1	0.25	2.8E−1	0.26
1/32	6.0E−2	0.81	1.4E−1	0.70	1.7E−1	0.61	1.8E−1	0.58	1.9E−1	0.57	1.9E−1	0.57
1/64	3.1E−2	0.95	7.2E−2	0.97	9.7E−2	0.84	1.1E−1	0.81	1.1E−1	0.81	1.1E−1	0.81

$I_{2h,2h}$上近似解的最大值误差。计算结果表明，差分格式（2.4）的数值收敛阶是一阶，与定理1的结论一致。

参考文献

[1] 王国英，二阶椭圆型偏微分方程奇异摄动问题的差分解法，高等学校计算数学学报，7(2)(1985)，151—160.

[2] 王国英，二阶椭圆型偏微分方程奇异摄动问题的一族一致收敛差分格式，南京大学数学半年刊，2(1)(1988)，102—106.

Numerical Solution of a Singularly Perturbed Elliptic-Hyperbolic Partial Differential Equation on a Nonuniform Discretization Mesh

Wu Qi-guang Sun Xiao-di
(Nanjing University, Nanjing)

Abstract

In this paper, we consider the upwind difference scheme for singular perturbation problem (1.1). On a special discretization mesh, it is proved that the solution of upwind difference scheme is first order convergent, uniformly in the small parameter ε, to the solution of problem (1.1). Numerical results are finally provided.

Key words partial differential equation, singular perturbation problem, upwind difference scheme, nonuniform discretization mesh