应用数学和力学，第13卷第12期（1992年12月）
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

复合材料力学的Hamilton体系和辛几何方法(Ⅱ)——平面问题

钟万勰　欧阳华江

（大连理工大学工程力学研究所，1991年8月2日收到）

摘　要

把在本文第（Ⅰ）部分[8]中讲述的基本原理和方法用于求解各向异性平面问题．先建立可进入Hamilton体系的广义变分原理，求出Hamilton微分算子矩阵，再求解横向本征解，可得到矩形域各向异性线性弹性平面问题的级数解和半解析解．

关键词　各向异性　线弹性力学　Hamilton矩阵　解析解　半解析解/辛几何

一、问　题　简　述

在本文第(Ⅰ)部分，提出了求解弹性力学中偏微分方程的一套新方法：(1) 针对具体的控制方程，建立起对应的可进入Hamilton体系的广义变分原理，求出Hamilton微分算子矩阵；(2) 求出该Hamilton阵的横向本征解，构造分离变量形式的级数解；(3) 根据纵向两端边界条件，求解两点边值问题，确定级数系数，从而获得解答．

已对正交异性矩形弹性薄板给出了求级数解的过程，该方法对对称角铺设层和板乃至一般的各向异性板也是有效的，这将在另文中阐述．下面针对各向异性平面问题的求解进行探讨．

二、可进入 Hamilton 体系的广义变分原理

作者发现，对一个具体的控制方程，可有三种途径进入Hamilton体系：(1) 象最优控制论中的状态空间法那样，从控制方程中直接导出[1]；(2) 在控制方程所对应的最小势能原理中，引入Lagrange乘子，构造一个恰当的混合能型的广义变分原理，通过变分进入[1]；(3)通过Legendre变换，构造Hamilton函数及其广义变分原理，通过变分进入[2]．作者发现，最后一种途径是最好的，可得到三维各向异性线弹性力学中可进入Hamilton体系的广义变分原理和Hamilton微分算子矩阵的一般公式，此不赘述．不过下面的推导已说明了推导的整个过程．

考虑各向异性弹性平面应力问题

$$\boldsymbol{\sigma}=\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{2.1}$$

令 $\boldsymbol{q}=\{u,\ v\}^T$，$\boldsymbol{p}=\{\sigma,\ \tau\}^T$，$\sigma=\sigma_x$，$\tau=\tau_{xy}$，$\dot{\boldsymbol{q}}=\partial\boldsymbol{q}/\partial x$，从应力应变关系（2.1）中解

$$\left.\begin{aligned} &\dot{u}=D_{66}\sigma/\theta-D_{16}\tau/\theta+\alpha\,\partial v/\partial y;\quad \dot{v}=D_{11}\tau/\theta-D_{16}\sigma/\theta+\beta\,\partial v/\partial y-\partial u/\partial y \\ &\alpha=(D_{16}D_{26}-D_{12}D_{66})/\theta;\quad \beta=(D_{16}D_{12}-D_{11}D_{26})/\theta;\quad \theta=D_{11}D_{66}-D_{16}^2 \end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

得到应变能密度

$$\begin{aligned} U(\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{q})&=(\sigma\dot{u}+\tau\dot{v}+\tau\partial u/\partial y+\sigma_y\varepsilon_y)/2 \\ &=D_{66}\sigma^2/2\theta+D_{11}\tau^2/2\theta-D_{16}\sigma\tau/\theta+\gamma(\partial v/\partial y)^2/2 \end{aligned} \tag{2.3}$$

通过Legendre变换[3]，构造Hamilton函数

$$\begin{aligned} H(\boldsymbol{q},\ \boldsymbol{p})=\boldsymbol{p}^T\dot{\boldsymbol{q}}-U(\boldsymbol{q},\ \boldsymbol{p})&=D_{66}\sigma^2/2\theta+\alpha\sigma\partial v/\partial y+D_{11}\tau^2/2\theta \\ &-D_{16}\sigma\tau/\theta+\beta\tau\partial v/\partial y-\tau\partial u/\partial y-\gamma(\partial v/\partial y)^2/2 \end{aligned} \tag{2.4}$$

就得到可进入Hamilton体系的广义变分原理

$$\Pi=\iint[\boldsymbol{p}^T\dot{\boldsymbol{q}}-H(\boldsymbol{q},\ \boldsymbol{p})]dxdy+\Gamma \tag{2.5}$$

这里$\gamma=D_{12}\alpha+D_{26}\beta+D_{22}$，$\Gamma$是外力势能．

三、Hamilton 矩阵及其横向本征解

由$\delta\Pi=0$可推出Hamilton微分算子矩阵

$$\mathbf{H}=\begin{bmatrix} 0 & \alpha\partial/\partial y & D_{66}/\theta & -D_{16}/\theta \\ -\partial/\partial y & \beta\partial/\partial y & -D_{16}/\theta & D_{11}/\theta \\ 0 & 0 & 0 & -\partial/\partial y \\ 0 & -\gamma\partial^2/\partial y^2 & \alpha\partial/\partial y & \beta\partial/\partial y \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

对于正交异性板，(3.1)退化为

$$\mathbf{H}=\begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{D_{12}}{D_{11}}\dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{1}{D_{11}} & 0 \\ -\dfrac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & \dfrac{1}{D_{66}} \\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \dfrac{D_{12}^2-D_{11}D_{22}}{D_{11}}\dfrac{\partial^2}{\partial y^2} & -\dfrac{D_{12}}{D_{11}}\dfrac{\partial}{\partial y} & 0 \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

求解$\mathbf{H}$的本征问题

$$\mathbf{H}\boldsymbol{Y}=\mu\boldsymbol{Y} \tag{3.3}$$

这时$\mathbf{H}$中的偏导数就是导数．把$\boldsymbol{Y}=e^{\lambda y}\boldsymbol{Z}$代入(3.3)，可以推出一个关于$\lambda$的特征多项式

$$\begin{vmatrix} -\mu & -D_{12}\lambda/D_{11} & 1/D_{11} & 0 \\ -\lambda & -\mu & 0 & 1/D_{66} \\ 0 & 0 & -\mu & -\lambda \\ 0 & (D_{12}^2-D_{11}D_{22})\lambda^2/D_{11} & -D_{12}\lambda/D_{11} & -\mu \end{vmatrix}=0 \tag{3.4}$$

由此可推出四个特征根$\xi\mu$，$\bar{\xi}\mu$，$\eta\mu$，$\bar{\eta}\mu$. 按根的类型可分为三种情况[4]：(1)$\xi=\eta=$虚数；(2)ξ，η是不等虚数；(3)ξ，η是复数.

对具体材料，根据D_{ij}可求出ξ，η，确定$\mathbf{Y}$的具体形式. 比如对第3种情况，横向本征函数为

$$\mathbf{Y}=\begin{cases} \exp[s_1\mu y](A_u\sin t_1\mu y+B_u\cos t_1\mu y) \\ \quad +\exp[s_2\mu y](C_u\sin t_2\mu y+D_u\cos t_2\mu y) \\ \exp[s_1\mu y](A_v\sin t_1\mu y+B_v\cos t_1\mu y) \\ \quad +\exp[s_2\mu y](C_v\sin t_2\mu y+D_v\cos t_2\mu y) \\ \exp[s_1\mu y](A_\sigma\sin t_1\mu y+B_\sigma\cos t_1\mu y) \\ \quad +\exp[s_2\mu y](C_\sigma\sin t_2\mu y+D_\sigma\cos t_2\mu y) \\ \exp[s_1\mu y](A_\tau\sin t_1\mu y+B_\tau\cos t_1\mu y) \\ \quad +\exp[s_2\mu y](C_\tau\sin t_2\mu y+D_\tau\cos t_2\mu y) \end{cases} \tag{3.5}$$

这里$s_1+t_1 i=\xi$，$s_2+t_2 i=\eta$.
把$\mathbf{Y}$代回(3.3)，结合y方向两边的边界条件，可以确定系统的本征值μ和(3.5)中16个常数中的15个，只剩下一个常数待定，这样的$\mathbf{Y}$称为$\mathbf{Y}_{ai}$；在$\mathbf{Y}_{ai}$中的μ_i都换成$-\mu_i$，就生成了$\mathbf{Y}_{bi}$，也有一个待定参数，则系统分离变量形式的解为

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{q} \\ \boldsymbol{p} \end{Bmatrix}=\sum_{i=1}^{\infty}(a_i\exp[\mu_i x]\mathbf{Y}_{ai}+b_i\exp[-\mu_i x]\mathbf{Y}_{bi})+\text{特解} \tag{3.6}$$

常数a_i和b_i由x方向两边的边界条件确定.

四、两点边值问题

有了级数解 (3.6)，自然联想到边值问题的传统解法：把已知的边界条件用基底函数展开为级数，比较级数的系数，就可定出级数解中的待定常数[5].

传统解法是Euclid空间中的概念，其状态函数是同一类型，或者是$\boldsymbol{q}$，或者是$\boldsymbol{p}$，与最小势能或最小余能原理相对应. 现在进入了Hamilton体系，所在的空间具有辛几何结构[6]，必须换一个新角度看问题. 在辛空间里，状态向量是两种类型，$\boldsymbol{q}$ 和 $\boldsymbol{p}$，与广义（混合能）变分原理相对应. 这时的边界条件在一端只给出了全状态向量的一半，所以构成一个两点边值问题. 若边界条件给出了整个全状态向量，可以把它也用$\mathbf{Y}_{ai}$，$\mathbf{Y}_{bi}$展开成级数，求解过程与传统的分离变量法一样.

但实际上在辛空间里，边值问题的边界条件只能给出全状态向量的一半，如果硬把边界条件用辛基底$\mathbf{Y}$展开，那么展开级数的系数显然不是唯一的. 传统的展开边界条件的作法不行了，必须另寻出路，于是又想到了导入Hamilton体系的广义变分原理.

因为级数解 (3.6) 满足广义变分原理 (2.5) 和y方向的边界条件，剩下的x方向的边界条件可以表示为

$$\left.\begin{array}{ll}\int[\delta \boldsymbol{p}^T(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}^*)]_x dy=0 & \text{(位移边界条件)} \\ \int[\delta \boldsymbol{q}^T(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}^*)]_x dy=0 & \text{(力的边界条件)}\end{array}\right\} \qquad (4.1)$$

其中$\boldsymbol{q}^*$和$\boldsymbol{p}^*$分别是给定的位移和力．把（3.6）代入（4.1）中的任意一个方程，都将导出一个关于a_i和b_i的正则方程（线性代数方程组）．

在具体计算中，可根据精度要求，取有限项，解出a_i和b_i．此方法的另一个好处是求得级数系数后，位移和力一起得到，这时半解析法大有益处[7]．

本文是在理论上进行论述，建立了基于Hamilton体系和辛空间的一套方法，理论基础建立了，半解析法和数值方法才有用武之地．这种方法不仅可用于求解析解，还可以而且更重要的是求半解析解，基于Hamilton体系（具有辛几何结构）的半解析解法可以解决固体力学中的很多难题，这方面的工作将在另文中叙述．

值得说明的是，对一般的各向异性平面问题，可从（3.1）推出一个比（3.4）复杂的特征多项式，特征根一般是复数，其横向本征函数仍如（3.5）所示，剩下的求解过程是一样的．

本文把提出的基于Hamilton体系的解法从各向同性弹性力学推广到复合材料层合板的平面应力和弯曲问题，可作为解析解法、半解析解法和数值方法的理论基础．

参 考 文 献

[1] 钟万勰，分离变量法与哈密尔顿体系，计算结构力学及其应用，8(3)(1991)．

[2] 钟万勰，条形域平面弹性问题与哈密尔顿体系，大连理工大学学报，31(4)(1991)．

[3] Arnold, V.I. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer-Verlag, New York Inc.(1978).

[4] 列赫尼茨基，C.Γ.，《各向异性板》，胡海昌译，科学出版社，北京（1963）．

[5] 徐芝伦，《弹性力学》，人民教育出版社，北京（1979）．

[6] 秦孟兆，辛几何及计算哈密顿力学，力学与实践，12(6)(1990)．

[7] Zhong Wan-xie and Zhong Xiang-xiang, Computational structural mechanics, optimal control and semi-analytical method for PDE, *Computer and Structures*, 37(6)(1990).

[8] 钟万勰、欧阳华江，复合材料力学的Hamilton体系和辛几何方法（Ⅰ）——一般原理，应用数学和力学，13(11)(1992)．

Hamiltonian System and Simpletic Geometry in Mechanics of Composite Materials (Ⅱ)——Plane Stress Problem

Zhong Wan-xie　　Ouyang Hua-jiang

(*Dalian University of Technology, Dalian*)

Abstract

The fundamental theory presented in Part (Ⅰ)[8] is used to analyze anisotropic plane stress problems. First we construct the generalized variational principle to enter Hamiltonian system and get Hamiltonian differential operator matrix; then we solve eigen problem; finally, we present the process of obtaining analytical solutions and semi-analytical solutions for anisotropic plane stress problems on rectangular area.

Key words anisotropy, linear theory of elasticity, Hamiltonian matrix, analytical solution, semi-analytical solution/simpletic geometry