

预测复合材料开裂方向的 比应变能密度准则

张双寅 蔡良武

(中国科学院力学研究所)
(钱伟长推荐, 1989年11月6日收到)

摘 要

本文提出预测复合材料中裂纹方向的比应变能密度准则, 并将Tsai-Hill与Norris准则扩展来预测复合材料中的开裂方向. 用这三个准则预测了具有各种不同纤维方向的单向纤维复合材料的裂纹扩展方向, 预测结果与现有的比正应力准则和应变能密度准则进行了对比.

关键词 复合材料 开裂方向 各向异性 线弹性断裂力学

一、引 言

各向同性材料中的I-型裂纹总是沿原来的裂纹方向以自相似方式扩展, 而混合型(例如I-II混合型)裂纹扩展时将偏转一个角度. 于是开裂方向的预测成为线弹性断裂力学的一个重要内容. 至今, 已建立了若干个断裂准则^[1]. 其中最大切应力准则和应变能密度准则是最常见的两个.

纤维增强复合材料不仅具有强度与刚度方面的各向异性, 也有很强的断裂韧性方面的各向异性. 以单向纤维复合材料来说, I-型裂纹很容易顺纤维方向扩展, 而很难沿垂直裂纹方向扩展. 一个平行纤维的I-型裂纹的断裂韧度 K_{Ic}^{\parallel} 比垂直纤维I-型裂纹的断裂韧度 K_{Ic}^{\perp} 小得多, 尽管后者扩展时也沿纤维方向. 实验结果表明, 对于常见复合材料 $K_{Ic}^{\parallel}/K_{Ic}^{\perp} \approx 3 \sim 10$ ^[2].

对于连续纤维复合材料, 只有少数情况(例如平行纤维方向的I-型裂纹)才呈自相似扩展, 多数情况下裂纹将以复合型开裂. 于是, 关于开裂方向的预测就成为十分重要的研究课题, 并且对复合材料结构的设计也十分有意义. Sih^[3]曾利用应变能密度(SED)准则分析复合材料的裂纹问题. Gregory与Herakovich^[4]提出了比正应力准则(NSR)来预测裂纹方向, 并与SED准则和应力张量多项式准则作了对比. 他们得到结论: NSR准则的预测结果很好, 但是其他二准则却得到不好的结果.

既然材料强度与韧度的各向异性必然会影响复合材料的开裂方向, SED准则忽略了这些影响, 所以这个准则不可能对开裂方向给出满意的预测结果(并且对断裂载荷也不可能给

出满意的预测结果)。在本作者的前一篇文章中^[5]提出了“比”应变能密度 (SEDR) 准则。它克服了 SED 准则的缺点。作为用例, 分析了短切原丝毡玻璃纤维增强聚酯双槽拉剪试件层间剪切断裂的开裂方向。预测结果与实验观测结果符合甚好, 为了进一步确认 SEDR 准则有普遍正确性, 本文用它来分析参考文献[4]中分析过的单向纤维复合材料中心裂纹的裂纹扩展方向。

鉴于 SEDR 的表达式与 Tsai-Hill 准则和 Norris 准则的表达式有很大的相似性, 本文将它们扩展来预测复合材料中裂纹扩展方向, 预测结果与 SEDR 的预测结果有满意的一致性。

二、比应变能密度准则

定义 比应变能密度是由比应力与比应变计算的应变能密度。所谓比应力即各应力分量与其相应的强度值之比:

$$\bar{\sigma}_1 = \sigma_1 / X \quad (2.1a)$$

$$\bar{\sigma}_2 = \sigma_2 / Y \quad (2.1b)$$

$$\bar{\tau}_{12} = \tau_{12} / S \quad (2.1c)$$

其中 X 与 Y 分别为 1 与 2 方向上的强度, S 为剪切强度。比应变定义为各应变值与各相应临界值之比:

$$\bar{\epsilon}_1 = \epsilon_1 / \epsilon_{1c} \quad (2.2a)$$

$$\bar{\epsilon}_2 = \epsilon_2 / \epsilon_{2c} \quad (2.2b)$$

$$\bar{\gamma}_{12} = \gamma_{12} / \gamma_{12c} \quad (2.2c)$$

其中 ϵ_{1c} , ϵ_{2c} 为 1 与 2 方向上的法应变, γ_{12c} 为剪应变; ϵ_{1c} , ϵ_{2c} 与 γ_{12c} 分别为它们的临界值。对于标准拉伸试件, 临界应变可由其强度值计算出来。

$$\epsilon_{1c} = X / E_{11} \quad (2.3a)$$

$$\epsilon_{2c} = Y / E_{22} \quad (2.3b)$$

$$\gamma_{12c} = S / G_{12} \quad (2.3c)$$

这里, 暗含着应力与应变之间为线性关系。于是应变能密度表达式为

$$S_R = \frac{1}{2} (\bar{\sigma}_1 \bar{\epsilon}_1 + \bar{\sigma}_2 \bar{\epsilon}_2 + \bar{\tau}_{12} \bar{\gamma}_{12}) \quad (2.4)$$

将式(2.1)与式(2.2)代入(2.4)再考虑到(2.3), 于是

$$S_R = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\sigma_1}{X} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{Y} \right)^2 - \frac{\gamma_{12}}{E_{11}} \sigma_1 \sigma_2 \left(\frac{E_{11}}{X^2} + \frac{E_{22}}{Y^2} \right) + \left(\frac{\tau_{12}}{S} \right)^2 \right] \quad (2.5)$$

不难看出, 式(2.5)与 Tsai-Hill 准则和 Norris 准则的差别仅在于 $\sigma_1 \sigma_2$ 交叉项的系数不同。

比应变能密度准则可以表述如下: 裂纹将沿着比应变能密度 SEDR 取极小的方向开裂, 即

$$\frac{\partial S_R}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial^2 S_R}{\partial \theta^2} > 0, \quad \text{当 } \theta = \theta_0 \text{ 时} \quad (2.6)$$

若绕裂纹顶点一周存在多于 1 个极小值时, 那么其中最大者相对应于开裂方向, 即

$$\text{当 } \theta = \theta_0 \text{ 时, } S_R = (S_R)_{\min}^{\theta} \quad (2.7)$$

对于各向同性材料, SEDR变成等价于应变能密度准则 (SED), 则

$$S_s = \frac{1}{2} (\varepsilon_1 \sigma_1 + \varepsilon_2 \sigma_2 + \gamma_{12} \tau_{12}) \quad (2.8)$$

SED准则认为:

$$\text{当 } \theta = \theta_c \text{ 时 } S_s = (S_s)_{\min}^* \quad (2.9)$$

三、扩展的Tsai-Hill准则与Norris准则

众所周知, Tsai-Hill准则表达式为⁽⁶⁾

$$\left(\frac{\sigma_1}{X}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{Y}\right)^2 - \frac{\sigma_1 \sigma_2}{X^2} + \left(\frac{\tau_{12}}{S}\right)^2 = 1 \quad (3.1)$$

Norris破坏准则的表达式为⁽⁷⁾:

$$\left[\left(\frac{\sigma_1}{X}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{Y}\right)^2 - \frac{\sigma_1 \sigma_2}{XY} + \left(\frac{\tau_{12}}{S}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = 1 \quad (3.2)$$

此二准则为预测材料破坏的强度准则, 常被人称之为畸变能准则. 事实上, 对于各向异性材料总应变能是不可能被分成洁体应变能与纯畸变能的, 二者总是耦合在一起的.

现在, 本文将它们推广来预测裂纹扩展方向. 首先, 我们定义Tsai-Hill时变能表达式为:

$$S_{TH} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\sigma_1}{X}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{Y}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{12}}{S}\right)^2 - \frac{\sigma_1 \sigma_2}{X^2} \right] \quad (3.3)$$

Norris畸变能表达式为:

$$S_N = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\sigma_1}{X}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{Y}\right)^2 - \frac{\sigma_1 \sigma_2}{XY} + \left(\frac{\tau_{12}}{S}\right)^2 \right] \quad (3.4)$$

扩展的Tsai-Hill与Norris准则假定材料沿着Tsai-Hill畸变能与Norris畸变能取极小的方向开裂, 即:

$$\text{当 } \theta = \theta_c \text{ 时 } \frac{\partial S_{TH}}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial^2 S_{TH}}{\partial \theta^2} > 0 \quad (3.5)$$

$$\text{当 } \theta = \theta_c \text{ 时 } \frac{\partial S_N}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial^2 S_N}{\partial \theta^2} > 0 \quad (3.6)$$

如果绕裂纹顶点一周存在多于一个极小值时, 其中最大者对应于开裂方向.

为了比较起见, 这里也给出比正应力准则的表达式, 比正应力用 \bar{R} 表达式为

$$\bar{R} = \sigma_{\theta\theta} / T_{\theta\theta} \quad (3.7)$$

$\sigma_{\theta\theta}$ 为周向应力,

$$T_{\theta\theta} = Y \cos^2 \alpha + X \sin^2 \alpha \quad (3.8)$$

其中 α 为矢径与纤维方向夹角. 从图1可知 $\alpha = \theta - \beta$, β 为纤维方向. 应该指出在 $T_{\theta\theta}$ 表达中不包含剪切强度 S , 它暗示着这个准则忽略 S 的影响. 比正应力NSR准则认为, 裂纹将沿着 \bar{R} 取极大的径向扩展, 即:

$$\text{当 } \theta = \theta_c \text{ 时 } \bar{R} = \bar{R}_{\max} \quad (3.9)$$

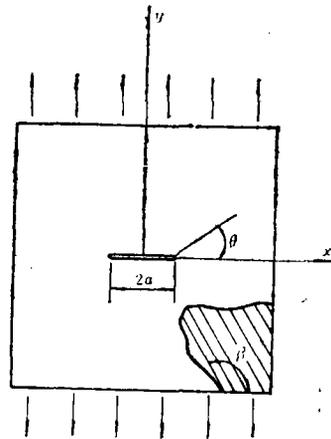


图 1

四、数值分析与讨论

1. 计算模型

计算模型如图1所示, θ 为极坐标的极角. 材料常数为 $E_{11}=151.9\text{GPa}$, $E_{22}=13.7\text{GPa}$, $G_{12}=5.83\text{GPa}$, $\nu_{12}=0.28$, $X=1.983\text{GPa}$, $Y=0.0703\text{GPa}$, $S=0.0998\text{GPa}$.

由各向异性线弹性断裂力学, I-型裂纹顶端附近的应力分量为:

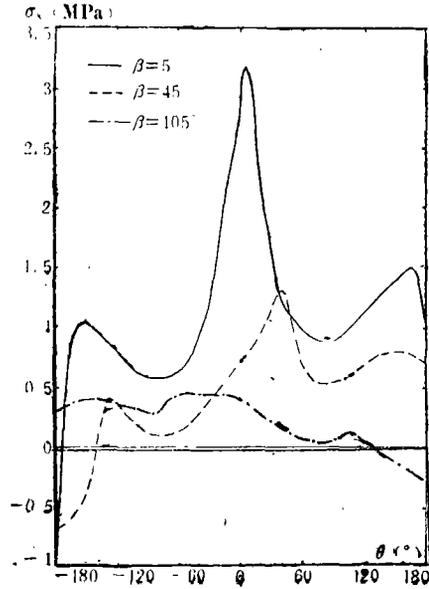


图 2

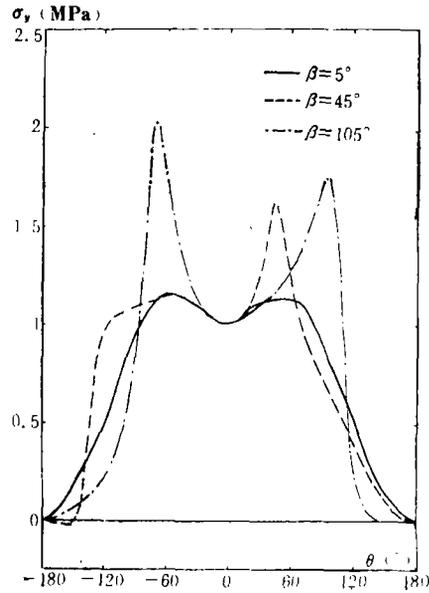


图 3

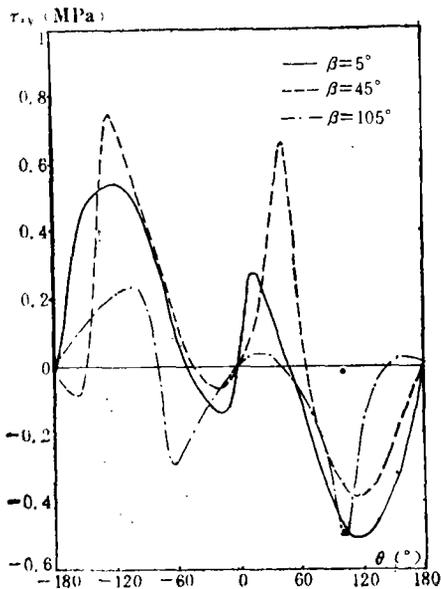


图 4

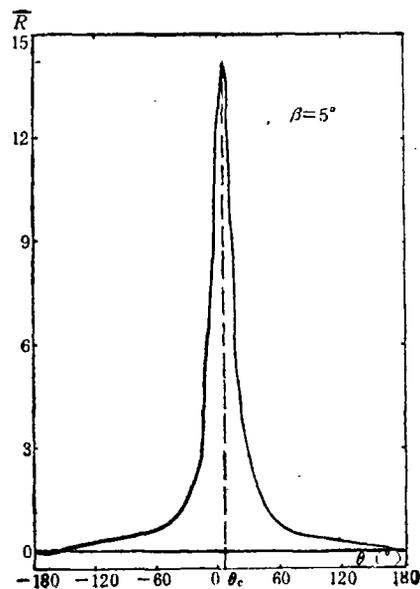


图 5

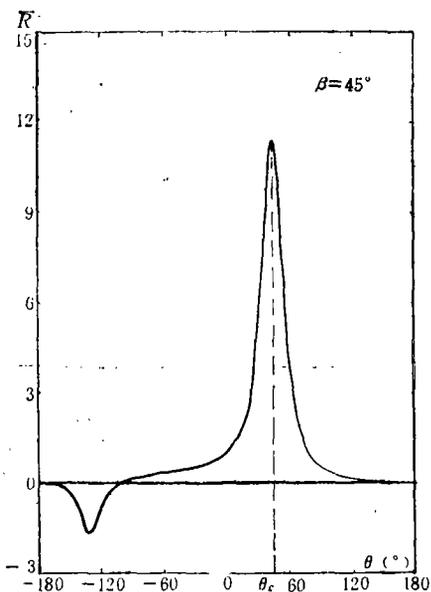


图 6

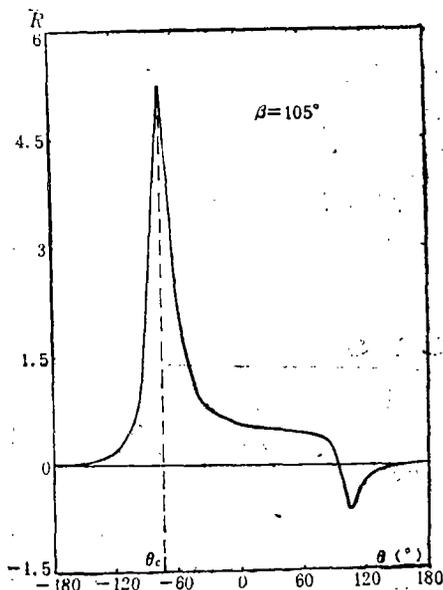


图 7

$$\sigma_x = \frac{\sigma^\infty \sqrt{a}}{\sqrt{2r}} \operatorname{Re} \left\{ \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \left[\frac{\mu_2}{\psi_2} - \frac{\mu_1}{\psi_1} \right] \right\} \quad (4.1a)$$

$$\sigma_y = \frac{\sigma^\infty \sqrt{a}}{\sqrt{2r}} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left[\frac{\mu_1}{\psi_2} - \frac{\mu_2}{\psi_1} \right] \right\} \quad (4.1b)$$

$$\tau_{xy} = \frac{\sigma^\infty \sqrt{a}}{\sqrt{2a}} \operatorname{Re} \left\{ \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \left[\frac{1}{\psi_1} - \frac{1}{\psi_2} \right] \right\} \quad (4.1c)$$

其中

$$\psi_1 = (\cos \theta + \mu_1 \sin \theta)^{\frac{1}{2}} \quad (4.2a)$$

$$\psi_2 = (\cos \theta + \mu_2 \sin \theta)^{\frac{1}{2}} \quad (4.2b)$$

其中 μ_1 与 μ_2 (与它们的共轭复数 $\bar{\mu}_1$ 与 $\bar{\mu}_2$) 为如下特征方程的两个不等复根:

$$A_{11} \mu^4 - 2A_{16} \mu^3 + (2A_{12} + A_{66}) \mu^2 - 2A_{26} \mu + A_{22} = 0 \quad (4.3)$$

A_{ij} 为材料的柔度矩阵的系数。

将式 (4.1a, b, c) 代入式 (2.6), (2.8)(3.3), (3.4) 与 (3.7), 则前四个准则的极小值可以求得, 并且最后一个的最大值也可以求得。

由于求解式 (4.1)(4.2) 与 (4.3) 是相当复杂的, 欲得精确分析解是不可能的, 本文采用数素解法。首先, 对于各种纤维铺设角 β , 我们计算奇异应力分布, 然后划出各准则函数对 θ 的变化曲线, 由这些曲线可以确定各准则所预测的开裂角。

2. 计算结果与讨论

首先计算了对于三种纤维铺设角, $\beta = 5^\circ, 45^\circ$ 与 105° 的应力分布。 σ_x, σ_y 与 τ_{xy} 随 θ 变化的曲线表示在图2、图3与图4中。在计算时, 为了简单起见, 我们取 $r = 0.1 \text{ mm}$, $a = 20 \text{ mm}$,

$\sigma^\infty = 0.1 \text{ MPa}$, 这便 $\frac{\sigma^\infty \sqrt{a}}{\sqrt{2r}} = 1$ 又不失一般性, 由这些曲线可以看出, σ_x 与 σ_y 在绝大部分范

圈的 θ 角内均为正值（只在小部分 θ 内它们为负值），在两个裂纹面上，即 $\theta = \pm 180^\circ$ ， σ_x 与 τ_{xy} 均为零，而 σ_z 却不等于零，而是大小相等符号相反的值。图5、6与7分别为 $\beta = 5^\circ$ 、 45° 与 105° 时的 $R \sim \theta$ 曲线对于 $\beta = 5^\circ$ 与 45° ，曲线的峰值应对于纤维角，而当 $\beta = 105^\circ$ 时，开裂方向与纤维方向的偏离变的明显了。很明显，尽管曲线的横坐标有差别，本文的图7与参考文献[4]中图13完全相同，本文图7横坐标范围 $-180^\circ \sim 0^\circ$ 相应于文献[4]图13中的 $\phi = 180^\circ \sim 360^\circ$ 。由于文献[4]没有说明 α 的值，我们无法对比这两个图的绝对值。

对于这三个纤维角， S_R 、 S_{TH} 与 S_N 随 θ 变化的曲线表示在图8、9与10。可以看出，这三个准则实际上预测了相同的开裂方向。

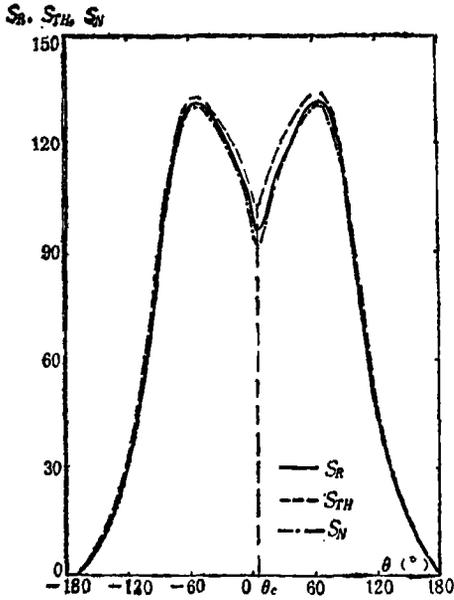


图 8

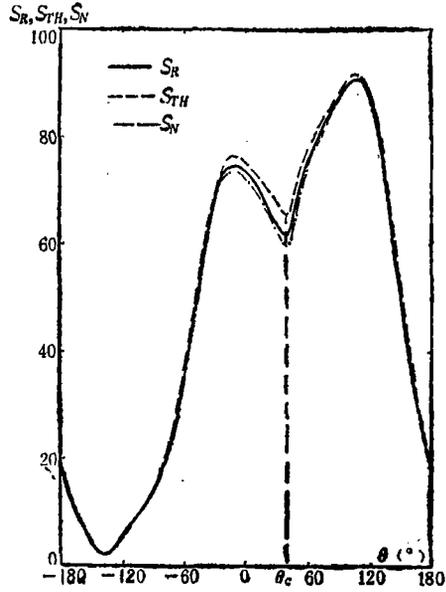


图 9

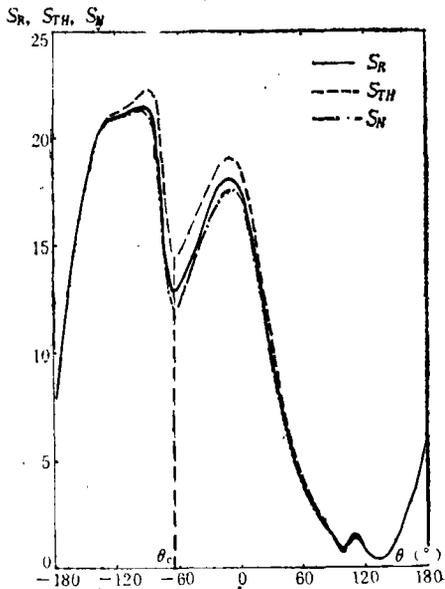


图 10

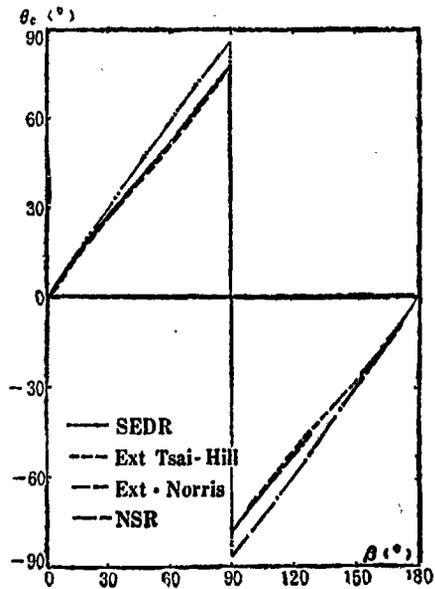


图 11

图11绘出了三个能量型准则预测的开裂方向对纤维角 β 的变化曲线。作为对比 NSR准则预测的 $\theta_c \sim \beta$ 曲线也划于此图。相应的数值结果列于表1。

由表1与图11可以看出,在整个 β 的变化范围内三个能量型准则 S_R , S_{TH} 与 S_N 随 β 的变化曲线几乎重叠在一起。与NSR准则相比,当 β 较小时,例如小于 45° ,NSR的预测值与SEDR准则的预测值偏离很小;当 β 变大时,二者偏离变大;当 $\beta \approx 90^\circ$ 时,二者相差约 9° 。

正如前边已经提到的,在NSR准则 $T_{\theta\theta}$ 的表达式中不含有 S ,这可能是NSR准则预测值偏离SEDR准则预测值的原因。在参考文献[8]中,讨论了单向纤维复合材料在偏轴拉伸下的破坏机理。实验表明,当 β 较小时,例如小于 66° ,破坏模式为横向拉伸破坏主导的破坏模式;当 β 变大,例如 $66^\circ < \beta < 86^\circ$ 时,材料倾向于剪切破坏;当 β 接近 90° 时,将发生纵向拉伸破坏。因此,可作这样的推论:当 β 足够大时,忽略剪切强度 S 对开裂角的影响似乎是不可以的。

参考文献[9]作了一些单向碳纤维增强环氧复合材料的断裂试验,试件为单边切口拉伸试件。试验表明,裂纹从切口根部启始,近似地沿纤维方向开裂,但并不精确地顺纤维扩展,而形成一个窄的纤维劈裂区,这个区域内,纤维呈毛刷状(请看图12)。这意味着,开裂角与纤维方向有一定偏离。与表1与图11定性上是一致的。

图13、14与45为应变能密度准则的 $S_s - \theta$ 曲线,预测结果很不理想是自然的。

下边说明为什么 $(S_R)_{max}$ 预测 θ_c 。这可以从弹性系统稳定性势能原理得到解释:弹性系统的总势能等于应变能与外力势之和,外力势与外力功大小相等符号相反。当系统处于平衡

表1 预测开裂方向随 β 的变化(度 $^\circ$)

β	SEDR	Tsai-Hill	Norris	MSR	SED
0	0	0	0	0	41
5	6	6	6	5	43
10	11	11	11	10	44
15	16	15	16	15	47
20	20	20	20	20	51
25	24	24	24	25	56
30	28	28	28	30	71
35	32	32	32	35	69
40	36	36	36	40	77
45	40	39	40	45	86
50	44	43	44	49	98
55	48	47	48	54	21
60	52	51	52	59	23
65	56	55	56	64	24
70	60	59	60	69	25
75	64	64	64	74	-60
80	69	68	69	78	-42
85	73	73	73	83	-22
89	77	77	77	86	-12

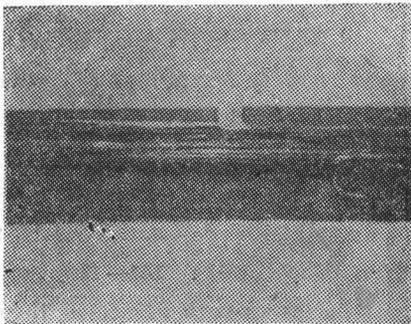


图 12

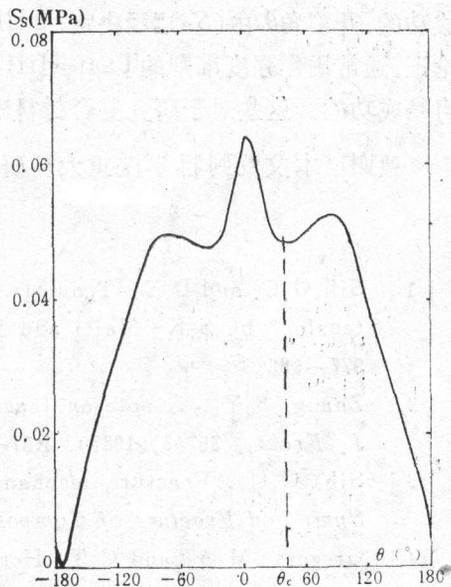


图 13

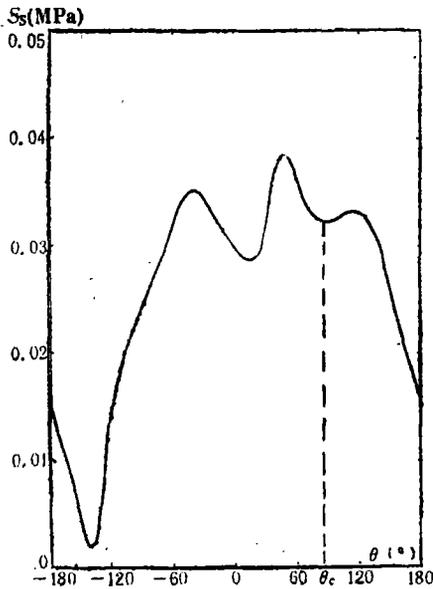


图 14

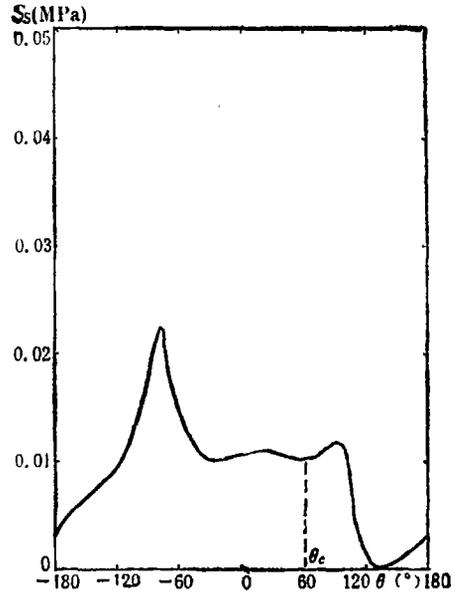


图 15

态时，外力势密度与应变能密度之和等于零。外力势密度最大的位置就是不稳定平衡位置，也就是应变能密度取极小的方向，裂纹将沿这一方向扩展。当有多个极小值时，其中最大者对应于局部应力最大值，它最可能引起材料破坏。关于 $(S_{TH})_{\theta_c}$ 和 $(S_N)_{\theta_c}$ 预测 θ_c 的道理与上述的原理相同^[5]。

五、结 论

本文提出的比应变能密度准则对预测偏轴载荷作用下单向纤维复合材料裂纹扩展方向是成功的。开裂角 θ_c 由 $(S_R)_{\theta_c}$ 决定。SEDR准则的正确性进一步由数值计算和势能原理进行了论证。通常用作强度准则的Tsai-Hill和Norris二准则被推广来预测开裂方向，这一点也证明是成功的。这些对于研究复合材料断裂行为和复合材料结构设计都是重要的。

致谢 本文受到科学院重大科研项目支持，深表感谢。

参 考 文 献

- [1] Sih, G.C. and D.Y. Tzou, Discussion on "Criteria for brittle fracture in biaxial tension" by S.K. Maiti and R. A. Smith, *Engng. Fract. Mech.*, 21 (3) (1983), 977—982.
- [2] Zhang, S.Y., A note on fracture toughness of unidirectional composites, *Inter. J. Fract.*, 35 (3)(1987), R57—R60.
- [3] Sih, G.C., Fracture mechanics of composite materials, *Proc. 1st USA-USSR Symp. on Fracture of Composite Materials*, Riga, USSR(1978), 111—130.
- [4] Gregory, M.A. and C.T. Herakovich, Predicting crack growth direction in unidirectional composites, *J. Comp. Mater.*, 20 (1)(1986), 67—85.
- [5] Tsai, L.W. and S.Y. Zhang, Prediction of mixed mode cracking direction in ran-

- dom short fibre composite materials, *Composite Sci. & Tech.*, 31 (2) (1988), 97—110.
- [6] Jones, R.M., *Mechanics of Composite Materials*, McGraw-Hill Comp.(1975).
- [7] Owen, M. J., Biaxial failure of GRP-mechanisms, modes and theories, *Composite Structures 2: Proc. 2nd. Inter. Conf. on Composite Structures*, Scotland, Applied Science, London (1983), 21—39.
- [8] Hull, D., 《复合材料导论》(张双寅、郑维平、蔡良武译), 中国建筑工业出版社 (1989).
- [9] 洗杏娟, 带边缘缺口碳纤维增强环氧复合材料拉伸破坏特性, *力学学报* (5) (1981), 493—500.

The Strain Energy Density Ratio Criterion for Predicting Cracking Direction in Composite Materials

Zhang Shuang-yin Cai Liang-wu

(*Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing*)

Abstract

The strain energy density ratio criterion for predicting cracking direction in composite materials is proposed. The Tsai-Hill criterion and Norris criterion of composite materials are extended to predict the cracking direction in composites. The three criteria are used to analyse the crack propagation problem of the uni-directional fibre composite sheet with various fibre directions. The predicted results are compared with those of the existing normal stress ratio criterion and strain energy density criterion.

Key words composite materials, cracking direction, anisotropy linear elastic fracture mechanics