应用数学和力学，第14卷第2期（1993年2月）　　应用数学和力学编委会编
Applied Mathematics and Mechanics　　重庆出版社出版

弹性梁方程共振问题的几个多解存在定理*

马　如　云

（兰州 西北师范大学，1991年4月17日收到）

摘　　要

本文研究弹性梁方程边值共振问题

$$-d^4u/dx^4+\pi^4u+g(x,\ u)=e(x)\qquad(0<x<1)$$
$$u(0)=u(1)=u''(0)=u''(1)=0$$

其中$g:[0,\ 1]\times\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$满足Carathéodory条件，$e\in L^2[0,\ 1]$．虽然该问题解的存在性曾有人研究过，但多解的存在性尚未被研究．在适当的假设下，利用 Lyapunov-Schmidt 过程及集连通技巧，我们得到该问题的几个多解存在定理．

关键词　多解结果　弹性梁方程　共振　集连通技巧

一、引　　言

弹性梁在工程建筑上有广泛的应用．弹性梁的弯曲可由一个四阶常微分方程边值问题来描述[1]．在文[2]中，Usmani 研究了线性方程

$$\left.\begin{aligned}&d^4u/dx^4-f(x)u=e(x)\qquad(0<x<1)\\&u(0)=y_0,\ \ u(1)=y_1,\ \ u''(0)=\bar{y}_0,\ \ u''(0)=\bar{y}_1\end{aligned}\right\}\tag{1.1}$$

并在条件$\sup f(x)<\pi^4$下获得存在唯一性结果．此后，这个结果被Aftabizadeh[3]、Yang Yi-song[4]．及Gupta[5,6]等推广到非线性的情形．在文[6]中，Gupta研究描述具有两端简单支撑的弹性梁弯曲的如下非线性边值共振问题

$$\left.\begin{aligned}&-d^4u/dx^4+\pi^4u+g(x,\ u)=e(x)\qquad(0<x<1)\\&u(0)=u(1)=u''(0)=u''(1)=0\end{aligned}\right\}\tag{1.2}$$

（其中$g:[0,\ 1]\times\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$满足Caratheodory条件，$e\in L^2[0,\ 1]$）．并在附加条件

i)　$\int_0^1 e(x)\sin\pi x dx=0$　　(1.3)

ii)　$g(x,\ u)u\geqslant0$，　对a.e.$x\in[0,\ 1]$，　$\forall u\in\boldsymbol{R}$　　(1.4)

iii) 存在常数$\beta\geqslant0$使

$$\limsup_{|u|\to\infty}\frac{g(x,u)}{u}=\beta<15\pi^4\tag{1.5}$$

---

* 钱伟长推荐．

之下，对方程(1.2)获得存在性结果．文[2～6]均限于梁方程解的存在性讨论，梁方程多解的存在性尚未被研究．

本文在适当的假设下，利用Lyapunov-Schmidt过程及集连通技巧，对方程(1.2)建立几个多解存在定理．

二、主要定理

设$g:[0,1]\times \boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$满足Caratheodory条件，此外，我们还假设

(H1) g为有界函数；

(H2) $\lim\limits_{u\to+\infty} g(x,u)=g_+(x)$，$\lim\limits_{u\to-\infty} g(x,u)=g_-(x)$均存在且$g_\pm(x)\in L^2[0,1]$．

(H3) 存在常数$\beta:0\leqslant\beta<15\pi^4$，使

$$[g(x,u)-g(x,v)](u-v)\leqslant\beta(u-v)^2 \tag{2.1}$$

对a.e. $x\in[0,1]$及任意$u,v\in\boldsymbol{R}$均成立．

本文的主要结果如下：

定理1 假设g满足条件(H1)、(H2)及(H3)，进一步假设$g_+(x)=g_-(x)\equiv0$且

$$ug(x,u)>0,\qquad \forall x\in[0,1],\ \forall u\neq0 \tag{2.2}$$

则对于$\forall e\in L^2[0,1]$，存在常数$\tau_1,\tau_2:\tau_1<0<\tau_2$，使得

(i) (1.2)有解当且仅当$\sqrt{2}\int_0^1 e(x)\sin\pi x dx\in[\tau_1,\tau_2]$；

(ii) 如果$\sqrt{2}\int_0^1 e(x)\sin\pi x dx\in(\tau_1,0)\cup(0,\tau_2)$，则(1.2)至少有两个不同的解．

定理2 假设g满足条件(H1)、(H2)及(H3)，

$$g_+(x)=g_-(x)\equiv0$$

$$g(x,u)>0,\qquad \forall u\in\boldsymbol{R} \tag{2.3}$$

则对$\forall e\in L^2[0,1]$，存在常数$\tau>0$，使

(i) (1.2)有解当且仅当$\sqrt{2}\int_0^1 e(x)\sin\pi x dx\in(0,\tau]$；

(ii) 如果$\sqrt{2}\int_0^1 e(x)\sin\pi x dx\in(0,\tau)$，则(1.2)至少有两个不同的解．

定理3 假设g满足条件(H1)、(H2)及(H3)，

$$g_-(x)<g_+(x) \tag{2.4}$$

$$g(x,u)>g_+(x),\qquad \forall u>0 \tag{2.5}$$

则对$\forall e\in L^2[0,1]$，存在常数

$$\tau_1,\ \tau_2,\ \tau_2>\sqrt{2}\int_0^1 e(x)\sin\pi x dx\triangleq b$$

使得

(i) 如果$\sqrt{2}\int_0^1 e(x)\sin\pi x dx\in(\tau_1,\tau_2]$，则(1.2)有解；

(ii) 如果$\sqrt{2}\int_0^1 e(x)\sin\pi x dx\notin[\tau_1,\tau_2]$，则(1.2)无解；

(iii) 如果$\sqrt{2}\int_0^1 e(x)\sin\pi x dx\in(b,\tau_2)$，则(1.2)至少有两个不同的解．

附注1 Gupta[6]仅在g满足符号条件(1.3)或单调性假设时，得到(1.2)有解的结果。对本文定理2和定理3中出现的g的情形，尚未被讨论。而本文则建立了多解存在性结果。另外，文[6]要求假定

$$\int_0^1 e(x)\sin\pi x dx=0$$

本文则允许

$$\int_0^1 e(x)\sin\pi x dx\neq 0$$

附注2 Costa和Goncalves[7]曾对非线性椭圆方程Dirichlet问题

$$\left.\begin{aligned}&-\Delta u-\lambda_1 u+g(u)=f \qquad x\in\Omega\\ &u=0 \qquad x\in\partial\Omega\end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

建立了类似定理1的结果（参看[7，定理2]）。但由于彼处仅在g连续的前提下讨论，故结论比本文定理1的结论要弱。

附注3 (2.2)中的大于号变向，定理1的结论仍然保持；定理2和定理3的“对偶命题”仍然成立。有关这些，我们将能在定理的证明过程中看出。

三、Lyapunov-Schmidt过程

记$H=L^2[0, 1]$，以$(\cdot,\cdot)$和$\|\cdot\|$分别表示其内积和范数。定义线性算子$L:D(L)\subset H\to H$

$$Lu=-d^4u/dx^4+\pi^4 u, \qquad u\in D(L) \tag{3.1}$$

其中

$$D(L)=\left\{u\in H\ \middle|\ \begin{aligned}&u',\ u'',\ u'''\in AC[0, 1],\ u^{(4)}\in H\\ &u(0)=u(1)=u''(0)=u''(1)=0\end{aligned}\right\}$$

设$\bar{H}=\ker L$，$\tilde{H}=\mathrm{range}L$，则$H$可以表示为$L$的零空间$\bar{H}$与$L$的值域$\tilde{H}$的直和，即

$$H=\bar{H}\oplus\tilde{H} \tag{3.2}$$

我们记$\varphi(x)=\sqrt{2}\sin\pi x$，则$\int_0^1\varphi^2(x)dx=1$

显见

$$\bar{H}=\{u\in H\,|\,u=\alpha\varphi \text{ a.e.},\ \alpha\in\mathbf{R}\} \tag{3.3}$$

设$P:H\to\tilde{H}$，$Q:H\to\bar{H}$分别为H到$\tilde{H}$与$\bar{H}$上的正交投影，则$\forall v\in H$

$$\left.\begin{aligned}&Pv=v(x)-\left(\int_0^1 v(t)\varphi(t)dt\right)\varphi(x)\\ &Qv=\left(\int_0^1 v(t)\varphi(t)dt\right)\varphi(x)\end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$

于是$\forall u\in D(L)$，有唯一分解$u=s\varphi+w$，$w\in\tilde{H}$；$e\in H$也可以唯一的分解成$e=t\varphi+h$，$h\in\tilde{H}$。另外，L于$D(L)\cap\tilde{H}$有$K=(L|_{D(L)\cap\tilde{H}})^{-1}:\tilde{H}\to\tilde{H}$存在，由Sololev嵌入定理，$K$是紧的。再定义一个非线性算子

$N:H\to H$，$\forall u\in H$

$$(Nu)(x)=g(x, u(x)), \qquad x\in[0, 1] \tag{3.5}$$

由题设(H1)，N一致有界：

现在方程(1.2)可以改写成

$$Lu+Nu=t\varphi+h, \qquad u\in D(L) \tag{3.6}$$

以投影P，Q分别作用(3.6)，得(3.6)的等价方程组

$$Lw+PN(s\varphi+w)=h \tag{3.7}$$

$$QN(s\varphi+w)=t\varphi \tag{3.8}$$

令

$$S_h=\{(s,\ w)\in \boldsymbol{R}\times\tilde{H}\,|\,w\in D(L),\ Lw+PN(s\varphi+w)=h\}$$

定义$\Phi:\boldsymbol{R}\times\tilde{H}\to\boldsymbol{R}$

$$\Phi(s,\ w)=(N(s\varphi+w),\ \varphi)=\int_0^1 g(x,\ s\varphi+w)\varphi dx \tag{3.9}$$

则解方程组(3.7)～(3.8)等价于在集S_h上求解方程

$$\Phi(s,\ w)=t \tag{3.10}$$

四、S_h的结构

本节我们研究方程(3.7)的解集S_h的结构.

定义算子$F_s:D(L)\cap\tilde{H}\to\tilde{H}$

$$F_s(w)=Lw+PN(s\varphi+w) \tag{4.1}$$

引理1 假设g满足条件(H1)、(H2)、(H3)．则$\forall s\in\boldsymbol{R}$，$F_s$是一个满单射．

为了证明引理1，我们需要如下结果（参见[8，定理16]）

引理2 设H是一个Hilbert空间，$T:D(T)\subset H\to H$是一个定义在线性稠定区域$D(T)$上的映射．设$T=A+G$，其中A是线性映射而$G:H\to H$是非线性映射．如果下列条件

G半连续且有界，

A线性、闭且$A^*=A^*|_{D(A)\cap D(A^*)}$，

T是单调算子，

T是强制算子．

被满足，则T满射．

引理1的证明 我们验证$-F_s=-(PL+PN)$满足引理2的全部条件．

由N的定义可知，$N:H\to H$连续、有界，从而$PN:\tilde{H}\to\tilde{H}$连续、有界．据[9，命题5.2] $L:D(L)\subset H\to H$自伴，从而$-PL:D(L)\cap\tilde{H}\to\tilde{H}$也自伴，故$D(-PL)=D((-PL)^*)$，且此时$-PL$是闭的．下证$-F_s$是单调强制的．

取$\forall w_1,w_2\in D(L)\cap\tilde{H}$，我们有

$$\begin{aligned}&(-F_s(w_1)-(-F_s(w_2)),\ w_1-w_2)\\&=(w_1''-w_2'',\ w_1''-w_2'')-\pi^4\|w_1-w_2\|^2\\&\quad-\int_0^1[g(x,\ s\varphi+w_1)-g(x,\ s\varphi+w_2)](w_1-w_2)dx\end{aligned}$$

由假设(H3)

$$\begin{aligned}&(-F_s(w_1)-(-F_s(w_2)),\ w_1-w_2)\\&\geqslant(w_1''-w_2'',\ w_1''-w_2'')-\pi^4\|w_1-w_2\|^2-\beta\|w_1-w_2\|^2\end{aligned}$$

因$w_1,w_2\in\tilde{H}$，故$(w_1''-w_2'',\ w_1''-w_2'')\geqslant 16\pi^4\|w_1-w_2\|^2$．

于是

$$(-F_s(w_1)-(-F_s(w_2)),\ w_1-w_2)\geqslant(15\pi^4-\beta)\|w_1-w_2\|^2 \tag{4.2}$$

即$-F_s$是一个单调强制算子．由引理2，$-F_s$是满射．从而F_s是满射．

据(4.2)，F_s亦为单射，证毕．

现在，由引理1可知，对于$h\in\tilde{H}$，方程

$$Lw+PN(s\varphi+w)=h \tag{3.7}$$

有唯一解$w_s(x)\in D(L)\cap\tilde{H}$．于是

$$S_h=\{w_s(x)\,|\,w_s(x)\text{是(3.7)的唯一解},\ s\in\boldsymbol{R}\}$$

关于S_h的结构，我们有如下

引理3 假如g满足(H1)、(H2)及(H3)，$e\in L^2[0,\ 1]$则S_h是连通的．

证明 方程(3.7)等价于方程

$$w=K[h-PN(s\varphi+w)] \tag{4.3}$$

定义算子$T:\boldsymbol{R}\times\tilde{H}\to\tilde{H}$

$$T(s,\ w)=K[h-PN(s\varphi+w)] \tag{4.4}$$

则T是紧的，并且T的象集包含在球$\bar{B}_\rho(0)=\{w\in\tilde{H}\,|\,\|w\|<\rho\}$，其中

$$\rho=\|K\|(\|h\|+\sup|g(u)|) \tag{4.5}$$

据[7，定理0]，对于$\forall\alpha,\ \beta\in\boldsymbol{R},\ \alpha<\beta$，$([\alpha,\ \beta]\times\bar{B}_\rho)\cap S_h$中包含一条连接$\{\alpha\}\times\bar{B}_\rho$与$\{\beta\}\times\bar{B}_\rho$的连通分别$C_{\alpha,\beta}$．由引理1，$C_{\alpha,\beta}=([\alpha,\ \beta]\times\bar{B}_\rho)\cap S_h$．再由$\alpha$，$\beta$的任意性，$S_h\subset\boldsymbol{R}\times\bar{B}_\rho$是连通的．

五、定理的证明

由第三节的讨论可知，在假设(H1)、(H2)及(H3)成立时，解方程(1.2)可以归结为在S_h上求解$\Phi(s,\ w)=t$的问题．据引理1，这又等价于求解

$$\Gamma(s)=t \tag{5.1}$$

其中
$$\Gamma(s)=\Phi(s,\ w_s)=\int_0^1 g(x,\ s\varphi+w_s)\varphi dx$$

设
$$C_0^1[0,\ 1]=\{u\in H\,|\,u,\ u'\in C[0,\ 1]\text{且}u(0)=u(1)=0\}$$

再设$W=PS_h=\{w_s\,|\,(s,\ w_s)\in S_h\}$，我们有

命题1 假设(H1)、(H2)及(H3)被满足，则W是$C_0^1[0,\ 1]$中的有界集．

证 $\forall w\in W$，依W的定义，存在$s\in\boldsymbol{R}$使得$(s,\ w)\in S_h$

即

$$-d^4w/dx^4+\pi^4w+PN(s\varphi+w)=h \tag{5.2}$$

注意到(4.5)、(H1)及$h\in H$的事实，我们有

$$\|d^4w/dx^4\|\leqslant M_1\qquad(\text{常数}M_1>0) \tag{5.3}$$

由于$w\in D(L)\cap\tilde{H}$，故$w(0)=w(1)=w''(0)=w''(1)=0$．从(5.3)易知，存在常数$M_2$，$M_3>0$，使

$$\|w'\|_C\leqslant M_2 \tag{5.4}$$

$$\|w\|_C\leqslant M_3 \tag{5.5}$$

于是$\|w\|_{C_0^1}\leqslant M_2+M_3$．

为了定理的证明，我们还需如下

命题2 假设g满足条件(H1)，(H2)及(H3)。

(i) 如果$g(x, u)>g_+(x)$，$\forall u>0$，则对$\forall e\in L^2[0, 1]$，

$$\exists \bar{s}>0,\ 使\ \Gamma(\bar{s})>\int_0^1 g_+(x)\varphi(x)dx.$$

(ii) 如果$g(x, u)<g_-(x)$，$\forall u<0$，则对$\forall e\in L^2[0, 1]$，

$$\exists \bar{s}<0,\ 使\ \Gamma(\bar{s})<\int_0^1 g_-(x)\varphi(x)dx.$$

证 先证(i)。利用著名估计式（参见[10，(16)]）

$$\left|\frac{v(x)}{\sin\pi x}\right|\leqslant\frac{1}{2}\max_{s\in[0,1]}|v'(x)|,\qquad x\in[0, 1] \tag{5.6}$$

其中$v\in C_0^1[0, 1]$，及本节命题1可知，对$\forall w\in W$，有

$$|w(x)|\leqslant\frac{1}{2}M_2\sin\pi x,\qquad x\in[0, 1] \tag{5.7}$$

故存在$\bar{s}:\bar{s}>M_2/2\sqrt{2}$使

$$\bar{u}=\bar{s}\varphi+w_{\bar{s}}>0,\qquad x\in(0, 1)$$

由题设，当$\forall u>0$时，$g(x, u)>g_+(x)$，故

$$\Gamma(\bar{s})=\int_0^1 g(x,\bar{s}\varphi+w_{\bar{s}})\varphi dx>\int_0^1 g_+(x)\varphi dx$$

(ii) 同理可证

定理1的证明 先证(i)记$\tau_1=\inf\limits_{s\in\boldsymbol{R}}\Gamma(s)$，$\tau_2=\sup\limits_{s\in\boldsymbol{R}}\Gamma(s)$，则由第四节引理2，$\Gamma$的值域是一个区间$\langle\tau_1, \tau_2\rangle$。由条件$(H_1)$，$\langle\tau_1, \tau_2\rangle$为有限区间。因$g(x, u)u>0$，$\forall u\neq 0$，$x\in[0, 1]$ a.e.，故$g(x,u)>g_+(x)$，$\forall u>0$，由命题2，存在$s_2:s_2>0$使$\Gamma(s_2)>\int_0^1 g_+(x)\varphi(x)dx=0$。

同理，存在$s_1:s_1<0$使$\Gamma(s_1)<\int_0^1 g_-(x)\varphi(x)dx=0$。从而$0\in(\Gamma(s_1), \Gamma(s_2))\subset\langle\tau_1,\tau_2\rangle$。下证$\langle\tau_1, \tau_2\rangle$是闭区间。

事实上，由$g_\pm(x)\equiv 0$，故$\lim\limits_{|s|\to\infty}\Gamma(s)=0$。从而存在$a$，$b\in\boldsymbol{R}$，$a<b$，使

$$\tau_1=\inf_{s\in[a,b]}\Gamma(s),\quad \tau_2=\sup_{s\in[a,b]}\Gamma(s)$$

因$S_h\cap([a, b]\times\bar{B}_\rho)$为闭集，故$\Gamma([a, b])=[\tau_1, \tau_2]$于是$\mathrm{range}\,\Gamma=[\tau_1, \tau_2]$。

据本节开头的讨论：(1.2)有解$\Leftrightarrow\Gamma(s)=t$有解$\Leftrightarrow t\in\mathrm{range}\,\Gamma=[\tau_1, \tau_2]$。

再证(ii)。若

$$t=\int_0^1 e\varphi dx\in(\tau_1, 0)\cup(0, \tau_2),$$

不妨设$t\in(0, \tau_2)$。

由于$\mathrm{range}\,\Gamma=[\tau_1, \tau_2]$，故存在$s_M\in\boldsymbol{R}$，使$\Gamma(s_M)=\tau_2$。因$\lim\limits_{|s|\to\infty}\Gamma(s)=0$，故存在$s'\in(s_M, +\infty)$，$s''\in(-\infty, s_M)$，使

$$\Gamma(s')=t=\Gamma(s'')$$

从而得方程(1.2)的两个解$u'=s'\varphi+w_{s'}$，$u''=s''\varphi+w_{s''}$。

当$t\in(\tau_1, 0)$时同理可证。

定理2的证明 仿定理1(i)的证明可得

$$\mathrm{range}\Gamma=(0,\ \tau],\ (\tau=\sup_{s\in\boldsymbol{R}}\Gamma(s))$$

从而(1.2)有解$\Leftrightarrow t=\int_0^1 e\varphi dx\in(0,\ \tau]$.

当$t\in(0,\ \tau)$时，仿定理1(ii)的证法即可推出

定理 3 的证明 记$\tau_1=\inf\limits_{s\in\boldsymbol{R}}\Gamma(s)$，$\tau_2=\sup\limits_{s\in\boldsymbol{R}}\Gamma(s)$由题设$g(x,\ u)>g_+(x)$，$\forall u>0$可知$\exists\ \bar{s}\in\boldsymbol{R}$，使

$$\Gamma(\bar{s})>\int_0^1 g_+(x)\varphi(x)dx=b^+$$

从而

$$\tau_2>\int_0^1 g_+(x)\varphi(x)dx=b^+$$

由$g_-(x)<g_+(x)$可知

$$\tau_1\leqslant\int_0^1 g_-(x)\varphi(x)dx<b^+<\tau_2$$

从而

$$\tau_2>\max\left\{\int_0^1 g_+(x)\varphi(x)dx,\int_0^1 g_-(x)\varphi(x)dx\right\}=\max\left\{\lim_{s\to+\infty}\Gamma(s),\ \lim_{s\to-\infty}\Gamma(s)\right\}$$

故$\tau_2\in\mathrm{range}\Gamma$，进而$\mathrm{range}\Gamma=\langle\tau_1,\ \tau_2\rangle$.

至此，定理 3 的证明可仿定理 1 的证明完成.

附注4 Gupta[6]不仅在符号条件

$$g(x,\ u)u>0,\qquad \forall u\in\boldsymbol{R},\ x\in[0,\ 1]\ \text{a.e.}\tag{5.8}$$

下讨论了方程(1.2)的可解性，而且也讨论了方程

$$\left.\begin{aligned}&d^4u/dx^4-\pi^4u+g(x,\ u)=e\\&u(0)=u(1)=u''(0)=u''(1)=0\end{aligned}\right\}\tag{5.9}$$

的可解性. 后者相当于在

$$g(x,\ u)u<0,\qquad \forall u\in\boldsymbol{R},\ x\in[0,\ 1]\ \text{a.e.}\tag{5.10}$$

下讨论方程(1.2)的可解性. 众所周知，条件(5.8)与(5.10)在g渐近线性增长时有本质的差别. 但由于本文中的g有界，故以(5.10)替换定理 1 的(2.2)，定理 1 的结论仍然正确.

参 考 文 献

[1] Reiss, E. L., A. J. Callegari and D. S. Ahluwalia, *Ordinary Differential Equations with Applications*, Holt, Rinehart & Winston, New York (1976).

[2] Usmini, R. A., A uniqueness theorem for a boundary value problem, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **77**(3) (1979), 329—335.

[3] Aftabizadeh, A.R., Existence and uniqueness theorems for fourth-order boundary value problems, *J. Math. Anal. Appl.*, **116** (1986), 415—426.

[4] Yang Yi-song, Fourth-order two-point boundary value problems, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **104**(1) (1988), 175—180.

[5] Gupta, C. P., Existence and uniqueness theorems for the bending of an elastic beam equation, *Applicable Analysis*, **26** (1988), 289—304.

[6] Gupta, C. P., Existence and uniqueness results for the bending of an elastic beam equation at resonance, *J. Math. Anal. Appl.*, **135** (1988), 208—225.

[7] Costa, D. G. and J. V. A. Goncalves, Existence and multiplicity results for a class of nonlinear elliptic boundary value problems at resonance, *J. Math.*

Anal. Appl., 84(2) (1981), 328—337.

[8] Browder, F., *Problèmes Non-Linéaires*, Les Presses de l'Université de Montreal, Montreal (1966).

[9] 曹之江，《常微分算子》，上海科学技术出版社 (1987).

[10] Mawhin, J., J. R. Ward and M. Willem, Necessary and Sufficient conditions for the solvability of a nonlinear two-point boundary value problem, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 93 (1985), 667—674.

[11] 张石生，《不动点定理及应用》，重庆出版社 (1984).

[12] 林宗池、林苏榕，一类向量四阶非线性微分方程边值问题的奇摄动，应用数学和力学，9 (5) (1988), 385—396.

Some Multiplicity Results for an Elastic Beam Equation at Resonance

Ma Ru-yun

(Department of Mathematics, Northwestern Teachers University, Lanzhou)

Abstract

This paper deals with multiplicity results for nonlinear elastic equation of the type

$$-d^4u/dx^4+\pi^4u+g(x,\ u)=e(x),\quad 0<x<1$$

$$u(0)=u(1)=u''(0)=u''(1)=0$$

where $g:[0,\ 1]\times\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ satisfies Carathéodory conditions $e\in L^2[0,\ 1]$. The solvability of this problem has been studied by several authors, but there isn't any multiplicity result until now to the author's knowledge. By combining the Lyapunov-Schmidt procudure with the technique of connected set, we establish several multiplicity results under suitable conditions.

Key words multiplicity results, elastic beam equations, resonance, technique of connected set