

# 高速扩展裂纹尖端的各向异性塑性场\*

林拜松

(长沙 中南工业大学, 1990年10月3日收到)

## 摘 要

在裂纹尖端的应力分量都只是  $\theta$  的函数的条件下, 利用定常运动方程, 应力应变关系及 Hill 各向异性屈服条件, 我们得到反平面应变和平面应变两者裂纹尖端的各向异性塑性场的一般解. 将这些一般解用于具体裂纹, 我们就求出了 I 型和 III 型裂纹的高速扩展尖端的各向异性塑性场,

**关键词** 各向异性塑性场 裂纹尖端

## 一、引 言

关于裂纹尖端的各向异性塑性场问题, 我们研究过静止裂纹、高速扩展裂纹和缓慢扩展裂纹的尖端的各向异性塑性应力场<sup>[1~3]</sup>. 对于高速扩展平面应变裂纹, 我们只给出  $\nu=1/2$  的解<sup>[2]</sup>. 至今还没有人研究过高速扩展平面应变裂纹尖端的含  $\nu$  的各向异性塑性场.

在裂纹尖端的应力分量都只是  $\theta$  的函数的条件下, 利用定常运动方程、应力应变关系及 Hill 各向异性屈服条件, 我们得到反平面应变和平面应变两者裂纹尖端的各向异性塑性场的一般解. 将这些一般解用于具体裂纹, 我们就求出了高速扩展 III 型裂纹尖端的各向异性塑性场和高速扩展平面应变 I 型裂纹尖端的含  $\nu$  的各向异性塑性场. 显然, 文献[1]、[2]和[4]的对应结果都是本文结果的特殊情形.

图 1 表示一沿其裂纹线方向高速扩展裂纹的尖端几何.  $(x, y, z)$  和  $(x_1, y_1, z_1)$  分别是静止坐标系和运动坐标系. 这些坐标轴亦是各向异性主轴. 运动坐标系的原点在高速扩展裂纹的尖点上, 裂纹尖端的速度为  $c_0 = \text{const}$ . 设裂纹作定常运动, 则有如下关系:

$$\frac{\partial}{\partial t} = -c_0 \frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad (1.1)$$

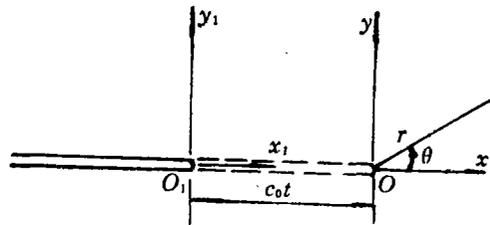


图 1

下面取

$$\alpha = c_0 / \sqrt{\mu/\rho} \leq 1 \quad (1.2)$$

其中,  $c_0 = \sqrt{\mu/\rho}$  为剪切波波速,  $\mu$  为剪切弹性模量,  $\rho$  是材料的密度.

\* 潘立宙推荐.

## 二、反平面应变

对于反平面应变情形, 不为零的量是:  $z$  方向的位移分量  $w(x, y)$  及剪应力分量  $\tau_{xz}(x, y)$ ,  $\tau_{yz}(x, y)$ . 设  $\tau_{xz}$  和  $\tau_{yz}$  都只是  $\theta$  的函数, 则  $w_x = \partial w / \partial x$  亦只是  $\theta$  的函数. 于是, 相对于运动坐标系  $(x, y, z)$  的基本方程为:

1. 定常运动方程

$$\sin\theta \frac{d\tau_{xz}}{d\theta} - \cos\theta \frac{d\tau_{yz}}{d\theta} - \rho c_0^2 \sin^2\theta \frac{dw_x}{d\theta} = 0 \quad (2.1)$$

2. Hill各向异性屈服条件

$$\left(\frac{\tau_{xz}}{S}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{yz}}{R}\right)^2 = 1 \quad (2.2)$$

其中,  $S$  和  $R$  分别是相对于  $x, z$  轴和  $y, z$  轴的剪切屈服应力<sup>[5]</sup>. 若材料是各向同性的, 则  $R = S = k$ .

若取

$$\frac{\tau_{xz}}{S} = -\sin\omega, \quad \frac{\tau_{yz}}{R} = \cos\omega \quad (2.3)$$

则(2.2)恒被满足. 显然,  $\omega$  是  $\theta$  的函数.

3. 应力应变关系

塑性应力应变关系是:

$$\left. \begin{aligned} \sin\theta \frac{dw_x}{d\theta} &= \frac{\sin\theta}{\mu} \frac{d\tau_{xz}}{d\theta} + \frac{2}{S^2 c_0} \tau_{xz} \\ \cos\theta \frac{dw_x}{d\theta} &= -\frac{\sin\theta}{\mu} \frac{d\tau_{yz}}{d\theta} - \frac{2\lambda}{R^2 c_0} \tau_{yz} \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

其中,  $\lambda$  是Prandtl-Reuss流动方程中非负的比例因子. 从中消去  $2/c_0$  得:

$$(\beta^2 \cos\theta \cdot \tau_{xz} + \sin\theta \cdot \tau_{yz}) \frac{dw_x}{d\theta} + \frac{\sin\theta}{\mu} \left( \beta^2 \tau_{xz} \frac{d\tau_{yz}}{d\theta} - \tau_{yz} \frac{d\tau_{xz}}{d\theta} \right) = 0 \quad (2.5)$$

将(2.3)代入(2.1)和(2.5)得:

$$\left. \begin{aligned} (\cos\omega - \beta \cot\theta \cdot \sin\omega) \frac{d\omega}{d\theta} + a^2 \frac{\mu}{S} \frac{dw_x}{d\theta} &= 0 \\ \frac{R}{\mu} (\cos^2\omega + \beta^2 \sin^2\omega) \frac{d\omega}{d\theta} + \beta (\cos\omega - \beta \cot\theta \sin\omega) \frac{dw_x}{d\theta} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

这里,  $\beta = R/S$ .

由(2.6)得到下面两种塑性区:

1) 非均匀区 ( $d\omega/d\theta \neq 0$ ,  $dw_x/d\theta \neq 0$ )

非均匀区存在条件是(2.6)的系数行列式为零, 即

$$(\cos\omega - \beta \cot\theta \cdot \sin\omega)^2 = a^2 (\cos^2\omega + \beta^2 \sin^2\omega) \quad (2.7)$$

由(2.7)得:

$$\left. \begin{aligned} \sin\omega &= \pm \left\{ \frac{f_3^2 - 2f_1 f_2 - f_3 \sqrt{f_3^2 - 4f_2(f_1 + f_2)}}{2(f_2^2 + f_3^2)} \right\}^{1/2} \\ \cos\omega &= \pm \left\{ \frac{f_3^2 + 2f_2(f_1 + f_2) + f_3 \sqrt{f_3^2 - 4f_2(f_1 + f_2)}}{2(f_2^2 + f_3^2)} \right\}^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

这里

$$\left. \begin{aligned} f_1(\theta) &= (1-\alpha^2)\sin^2\theta \\ f_2(\theta) &= \beta^2\cos^2\theta - (1-\alpha^2 + \alpha^2\beta^2)\sin^2\theta \\ f_3(\theta) &= \beta\sin 2\theta \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

由(2.6)和(2.7)得:

$$w_x = w_{x_0} - \frac{S}{\alpha\mu} \int_0^\omega (\cos^2\omega + \beta^2\sin^2\omega)^{\frac{1}{2}} d\omega \quad (2.10)$$

2) 均匀区( $d\omega/d\theta=0, dw_x/d\theta=0$ )

对于均匀区, 我们有

$$\omega = \text{const}, \quad w_x = \text{const} \quad (2.11)$$

所以, 均匀区是均匀应力区。

将(2.8)、(2.10)和(2.11)直接用于Ⅲ型裂纹, 我们就得到高速扩展Ⅲ型裂纹尖端的各向异性塑性场为:

1)  $0 \leq \theta \leq \theta_1$

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xz} &= -S \left\{ \frac{f_3^2 - 2f_1f_2 - f_3\sqrt{f_3^2 - 4f_2(f_1+f_2)}}{2(f_2^2 + f_3^2)} \right\}^{\frac{1}{2}} \\ \tau_{yz} &= R \left\{ \frac{f_3^2 + 2f_2(f_1+f_2) - f_3\sqrt{f_3^2 - 4f_2(f_1+f_2)}}{2(f_2^2 + f_3^2)} \right\}^{\frac{1}{2}} \\ w_x &= -\frac{S}{\alpha\mu} \int_0^\omega (\cos^2\omega + \beta^2\sin^2\omega)^{\frac{1}{2}} d\omega \end{aligned} \right\} \quad (2.12a)$$

2)  $\theta_1 \leq \theta \leq \pi$

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xz} &= -S, \quad \tau_{yz} = 0 \\ w_x &= -\frac{S}{\alpha\mu} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2\omega + \beta^2\sin^2\omega)^{\frac{1}{2}} d\omega \end{aligned} \right\} \quad (2.12b)$$

确定 $\theta_1$ 的公式是:

$$f_3^2(\theta_1) + 2f_2(\theta_1)[f_1(\theta_1) + f_2(\theta_1)] + f_3(\theta_1)\{f_3^2(\theta_1) - 4f_2(\theta_1)[f_1(\theta_1) + f_2(\theta_1)]\}^{\frac{1}{2}} = 0 \quad (2.12c)$$

### 三、平面应变

对于平面应变情形, 设裂纹尖端的应力分量 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 都只是 $\theta$ 的函数, 则 $\sigma_- = (\sigma_x - \sigma_y)/2, \sigma = (1+\nu)(\sigma_x + \sigma_y)/3, u_x = \partial u/\partial x, v_x = \partial v/\partial x$ 也都只是 $\theta$ 的函数;  $u$ 和 $v$ 分别是 $x$ 方向和 $y$ 方向的位移分量;  $\nu$ 是泊松比。这样, 在运动坐标系 $(x, y, z)$ 中, 平面应变定常运动裂纹的基本方程为:

1. 定常运动方程

$$\left. \begin{aligned} \sin\theta \frac{d\sigma_-}{d\theta} + \frac{3\sin\theta}{2(1+\nu)} \frac{d\sigma}{d\theta} - \cos\theta \frac{d\tau_{xy}}{d\theta} - \rho c_0^2 \sin\theta \frac{du_x}{d\theta} &= 0 \\ -\cos\theta \frac{d\sigma_-}{d\theta} + \frac{3\cos\theta}{2(1+\nu)} \frac{d\sigma}{d\theta} - \sin\theta \frac{d\tau_{xy}}{d\theta} + \rho c_0^2 \sin\theta \frac{dv_x}{d\theta} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

2. Hill各向异性屈服条件

$$\frac{\sigma^2}{1-c} + \tau_{xy}^2 = T^2 \quad (3.2)$$

其中,  $T$  是相对于  $x, y$  轴的剪切屈服应力, 而  $c$  是描述流动平面内各向异性状态的参数<sup>(6)</sup>.

若取

$$\sigma_x = -T\sqrt{1-c}\cos\omega, \quad \tau_{xy} = -T\sin\omega \quad (3.3)$$

则(3.2)恒被满足. 显然,  $\omega$  是  $\theta$  的函数.

### 3. 应力应变关系

塑性应力应变关系是:

$$\left. \begin{aligned} -\sin\theta \frac{du_x}{d\theta} &= -\frac{\lambda}{c_0} \frac{\sigma_x}{1-c} - \frac{\sin\theta}{2\mu} \frac{d}{d\theta} \left[ \sigma_x + \frac{3(1-2\nu)}{2(1+\nu)} \sigma \right] \\ \cos\theta \frac{dv_x}{d\theta} &= \frac{\lambda}{c_0} \frac{\sigma_x}{1-c} - \frac{\sin\theta}{2\mu} \frac{d}{d\theta} \left[ -\sigma_x + \frac{3(1-2\nu)}{2(1+\nu)} \sigma \right] \\ \cos\theta \frac{du_x}{d\theta} - \sin\theta \frac{dv_x}{d\theta} &= -\frac{2\lambda}{c_0} \tau_{xy} - \frac{\sin\theta}{\mu} \frac{d\tau_{xy}}{d\theta} \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

利用(3.1)、(3.3)和(3.4), 我们得到下列方程组:

$$\left. \begin{aligned} (\sqrt{1-c}\sin\omega + \cot\theta\cos\omega) \frac{d\omega}{d\theta} + \frac{a}{T} \frac{d\sigma}{d\theta} - \alpha^2 \left( -\frac{\mu}{T} \right) \frac{du_x}{d\theta} &= 0 \\ (\sqrt{1-c}\sin\omega\cot\theta - \cos\omega) \frac{d\omega}{d\theta} - \frac{a}{T} \cot\theta \frac{d\sigma}{d\theta} - \alpha^2 \left( \frac{\mu}{T} \right) \frac{dv_x}{d\theta} &= 0 \\ (1-c\sin^2\omega) \frac{d\omega}{d\theta} - \frac{\mu}{T} (\sqrt{1-c}\sin\omega + \cot\theta\cos\omega) \frac{du_x}{d\theta} \\ - \frac{\mu}{T} (\sqrt{1-c}\sin\omega\cot\theta - \cos\omega) \frac{dv_x}{d\theta} &= 0 \\ -(1-c\sin^2\omega) \frac{d\omega}{d\theta} - \frac{a(1-2\nu)}{T} \sin\omega \frac{d\sigma}{d\theta} \\ + \frac{\mu}{T} (2\sqrt{1-c}\sin\omega + \cot\theta\cos\omega) \frac{du_x}{d\theta} - \frac{\mu}{T} \cos\omega \frac{dv_x}{d\theta} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

其中  $a = 3/2(1+\nu)$

由(3.5)得到下列两种塑性区:

1) 非均匀区 ( $d\omega/d\theta \neq 0, d\sigma/d\theta \neq 0, du_x/d\theta \neq 0, dv_x/d\theta \neq 0$ )

非均匀区存在条件是(3.5)的系数行列式为零, 即

$$\begin{aligned} &(\sqrt{1-c}\sin\omega\sin 2\theta + \cos\omega\cos 2\theta)^2 \\ &= \alpha^2 \sin^2\theta (1-c\sin^2\omega) \left[ 1 + \frac{1-2\nu}{\sqrt{1-c}} (1-\alpha^2 \sin^2\theta) \right] \end{aligned} \quad (3.6)$$

从(3.6)得:

$$\left. \begin{aligned} \sin\omega &= \pm \left\{ \frac{f_2^2 - 2f_1f_3 - f_2\sqrt{f_2^2 - 4f_3(f_1+f_3)}}{2(f_1^2+f_2^2)} \right\}^{\frac{1}{2}} \\ \cos\omega &= \pm \left\{ \frac{f_2^2 + 2f_1(f_1+f_3) + f_2\sqrt{f_2^2 - 4f_3(f_1+f_3)}}{2(f_1^2+f_2^2)} \right\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

这里

$$\left. \begin{aligned} f_1(\theta) &= c \left\{ \left[ 1 + \frac{1-2\nu}{\sqrt{1-c}} (1-\alpha^2 \sin^2 \theta) \right] \alpha^2 \sin^2 \theta - \sin^2 2\theta \right\} - \cos 4\theta \\ f_2(\theta) &= \sqrt{1-c} \sin 4\theta \\ f_3(\theta) &= \cos^2 2\theta - \left[ 1 + \frac{1-2\nu}{\sqrt{1-c}} (1-\alpha^2 \sin^2 \theta) \right] \alpha^2 \sin^2 \theta \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

利用(3.5)的前三式解出 $d\sigma/d\theta$ ,  $du_z/d\theta$ 和 $dv_z/d\theta$ , 然后积分得到:

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \sigma_0 - T \int_0^\omega \frac{(1-c \sin^2 \omega)(1-\alpha^2 \sin^2 \theta)}{a(1-f^2-c \sin^2 \omega)^{\frac{3}{2}}} d\omega \\ u_z &= u_{z0} + \frac{T}{\mu} \int_0^\omega \left\{ \frac{f \cdot (\sqrt{1-c} \sin \omega \cos \theta - \cos \omega \sin \theta)}{\alpha^2 \sin \theta \cdot (1-f^2-c \sin^2 \omega)^{\frac{3}{2}}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sin^2 \theta \cdot (1-c \sin^2 \omega)}{(1-f^2-c \sin^2 \omega)} \right\} d\omega \\ v_z &= v_{z0} + \frac{T}{\mu} \int_0^\omega \left\{ \frac{\sin 2\theta \cdot (1-c \sin^2 \omega)}{2(1-f^2-c \sin^2 \omega)^{\frac{3}{2}}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{f \cdot (\sqrt{1-c} \sin \omega \sin \theta + \cos \omega \cos \theta)}{\alpha^2 \sin \theta \cdot (1-f^2-c \sin^2 \omega)^{\frac{3}{2}}} \right\} d\omega \\ &\quad \left( f = \alpha \sin \theta \cdot \left\{ (1-c \sin^2 \omega) \left[ 1 + \frac{1-2\nu}{\sqrt{1-c}} (1-\alpha^2 \sin^2 \theta) \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \right) \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

所以, 该区的诸应力分量为:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= a\sigma_0 - T \int_0^\omega \frac{(1-c \sin^2 \omega)(1-\alpha^2 \sin^2 \theta)}{a(1-f^2-c \sin^2 \omega)^{\frac{3}{2}}} d\omega - T \sqrt{1-c} \cos \omega \\ \sigma_y &= a\sigma_0 - T \int_0^\omega \frac{(1-c \sin^2 \omega)(1-\alpha^2 \sin^2 \theta)}{a(1-f^2-c \sin^2 \omega)^{\frac{3}{2}}} d\omega + T \sqrt{1-c} \cos \omega \\ \sigma_z &= 2av\sigma_0 - 2vT \int_0^\omega \frac{(1-c \sin^2 \omega)(1-\alpha^2 \sin^2 \theta)}{a(1-f^2-c \sin^2 \omega)^{\frac{3}{2}}} d\omega \\ \tau_{xy} &= -T \sin \omega \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

这里,  $\sin \omega$ 和 $\cos \omega$ 由式(3.7)和(3.8)来给出.

2) 均匀区( $d\omega/d\theta=0$ ,  $d\sigma/d\theta=0$ ,  $du_z/d\theta=0$ ,  $dv_z/d\theta=0$ )

在均匀区内有

$$\omega = \text{const}, \quad \sigma = \text{const}, \quad u_z = \text{const}, \quad v_z = \text{const} \quad (3.11)$$

所以, 均匀区是均匀应力区.

显然, 只要裂纹沿裂纹线方向扩展, 则高速扩展平面应变裂纹尖端的各向异性塑性场就由均匀区和非均匀区组成. 现以 I 型裂纹为例来说明之.

对于 I 型裂纹, 我们有下列条件:

$$\left. \begin{aligned} \theta = 0: \tau_{xy} &= 0, \quad \sigma_y > 0, \quad v = 0 \\ \theta = \pi: \tau_{xy} &= 0, \quad \sigma_y = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

根据(3.12), 我们知道, 平面应变高速扩展 I 型裂纹尖端的各向异性塑性场由一个塑性非均匀区和两个塑性均匀区组成:

(1) 塑性均匀区( $0 \leq \theta \leq \theta_1$ )

$$\left. \begin{aligned} \omega=0, \sigma=\sigma_0, u_z=u_{z0}, v_z=v_{z0} \\ \sigma_x=a\sigma_0-T\sqrt{1-c}, \sigma_y=a\sigma_0+T\sqrt{1-c} \\ \sigma_z=2av\sigma_0, \tau_{xy}=0 \end{aligned} \right\} \quad (3.13a)$$

(2) 塑性非均匀区( $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ )

$$\left. \begin{aligned} u_z &= u_{z0} + \frac{T}{\mu} \int_0^\omega \left\{ \frac{f \cdot (\sqrt{1-c} \sin \omega \cos \theta - \cos \omega \sin \theta)}{a^2 \sin^2 \theta \cdot (1-f^2-c \sin^2 \omega)^{\frac{1}{2}}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sin^2 \theta \cdot (1-c \sin^2 \omega)}{(1-f^2-c \sin^2 \omega)^{\frac{1}{2}}} \right\} d\omega \\ v_z &= v_{z0} + \frac{T}{\mu} \int_0^\omega \left\{ \frac{\sin 2\theta \cdot (1-c \sin^2 \omega)}{2(1-f^2-c \sin^2 \omega)^{\frac{1}{2}}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{f \cdot (\sqrt{1-c} \sin \omega \sin \theta + \cos \omega \cos \theta)}{a^2 \sin^2 \theta \cdot (1-f^2-c \sin^2 \omega)^{\frac{1}{2}}} \right\} d\omega \\ \sigma_x &= a\sigma_0 - T \int_0^\omega \frac{(1-c \sin^2 \omega)(1-a^2 \sin^2 \theta)}{a(1-f^2-c \sin^2 \omega)^{\frac{1}{2}}} d\omega - T\sqrt{1-c} \cos \omega \\ \sigma_y &= a\sigma_0 - T \int_0^\omega \frac{(1-c \sin^2 \omega)(1-a^2 \sin^2 \theta)}{a(1-f^2-c \sin^2 \omega)^{\frac{1}{2}}} d\omega + T\sqrt{1-c} \cos \omega \\ \sigma_z &= 2av\sigma_0 - 2vT \int_0^\omega \frac{(1-c \sin^2 \omega)(1-a^2 \sin^2 \theta)}{a(1-f^2-c \sin^2 \omega)^{\frac{1}{2}}} d\omega \\ \tau_{xy} &= -T \sin \omega \end{aligned} \right\} \quad (3.13b)$$

(3) 塑性均匀区( $\theta_2 \leq \theta \leq \pi$ )

$$\left. \begin{aligned} \omega=\pi, \sigma_x=2T\sqrt{1-c}, \sigma_y=\tau_{xy}=0, \sigma_z=2vT\sqrt{1-c} \\ u_z &= u_{z0} + \frac{T}{\mu} \left| \int_0^\omega \left\{ \frac{f \cdot (\sqrt{1-c} \sin \omega \cos \theta - \cos \omega \sin \theta)}{a^2 \sin^2 \theta \cdot (1-f^2-c \sin^2 \omega)^{\frac{1}{2}}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\sin^2 \theta \cdot (1-c \sin^2 \omega)}{(1-f^2-c \sin^2 \omega)^{\frac{1}{2}}} \right\} d\omega \right|_{\omega=\pi} \\ v_z &= v_{z0} + \frac{T}{\mu} \left| \int_0^\omega \left\{ \frac{\sin 2\theta \cdot (1-c \sin^2 \omega)}{2(1-f^2-c \sin^2 \omega)^{\frac{1}{2}}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{f \cdot (\sqrt{1-c} \sin \omega \sin \theta + \cos \omega \cos \theta)}{a^2 \sin^2 \theta \cdot (1-f^2-c \sin^2 \omega)^{\frac{1}{2}}} \right\} d\omega \right|_{\omega=\pi} \end{aligned} \right\} \quad (3.13c)$$

现在来确定未定常数。令(3.6)中的 $\omega=0$ 和 $\omega=\pi$ ，就得到确定 $\theta_1$ 和 $\theta_2$ 的公式为：

$$\left. \begin{aligned} \cos 2\theta_1 &= a \sin \theta_1 \left[ 1 + \frac{1-2v}{\sqrt{1-c}} (1-a^2 \sin^2 \theta_1) \right] \\ \cos 2\theta_2 &= -a \sin \theta_2 \left[ 1 + \frac{1-2v}{\sqrt{1-c}} (1-a^2 \sin^2 \theta_2) \right] \end{aligned} \right\} \quad (3.13d)$$

由 $\theta=\theta_2$ 处 $\sigma_y=0$ 得到确定 $a\sigma_0$ 的公式为：

$$a\sigma_0 = T \left| \int_0^\omega \frac{(1-c \sin^2 \omega)(1-a^2 \sin^2 \theta)}{a(1-f^2-c \sin^2 \omega)^{\frac{1}{2}}} d\omega \right|_{\omega=\pi} + T\sqrt{1-c} \quad (3.13e)$$

根据对称性， $\theta=0$ 处， $v_z=0$ ，所以有

$$v_{z0} = 0 \quad (3.13f)$$

将(3.13a)中的 $\sigma_x$ 和 $\sigma_y$ 代入弹性应力应变关系得到：

$$u_{z0} = \frac{3(1-2\nu)\sigma_0}{4\mu(1+\nu)} - \frac{T\sqrt{1-c}}{2\mu} \quad (3.13g)$$

显然, 当  $c=0$  和  $T=k$  时, (3.13) 就变成高速扩展平面应变 I 型裂纹尖端的理想塑性场<sup>[4]</sup>; 当  $\nu=1/2$  时, (3.13) 就变成  $\nu=1/2$  时高速扩展平面应变 I 型裂纹尖端的各向异性塑性场<sup>[2]</sup>.

### 参 考 文 献

- [ 1 ] 林拜松, 奇点附近的各向异性塑性应力场, 应用数学和力学, 8(8) (1987), 727—732.
- [ 2 ] 林拜松, 高速扩展裂纹尖端的各向异性塑性应力场, 应用数学和力学, 9(1) (1988), 31—36.
- [ 3 ] 林拜松, 缓慢扩展裂纹尖端的各向异性塑性应力场, 应用数学和力学, 10(8) (1989), 721—726.
- [ 4 ] 林拜松, 高速扩展裂纹尖端的理想弹塑性场, 应用数学和力学, 6(10) (1985), 939—946.
- [ 5 ] Hill, R., *The Mathematical Theory of Plasticity*, Oxford (1956).

## Anisotropic Plastic Fields at a Rapidly Propagating Crack-Tip

Lin Bai-song

(Central-South University of Technology, Changsha)

### Abstract

Under the condition that all the stress components at a crack-tip are the functions of  $\theta$  only, making use of the equations of steady-state motion, stress-strain relations and Hill anisotropic yield conditions, we obtain the general solutions at a crack-tip in both the cases of anti-plane and in-plane strains. Applying these general solutions to the concrete cracks, the anisotropic plastic fields at the rapidly propagating tips of mode II and mode I cracks are derived.

**Key words** anisotropic plastic fields, crack-tip