

悬臂板侧屈问题的多项式解法*

袁 镒 吾

(长沙 中南工业大学, 1990年11月19日收到)

摘 要

本文研究了悬臂矩形板受均布载荷或集中载荷作用时的侧屈问题。挠度函数选用多项式(2.1)以取代文献[1]中的余弦函数。本文得到的最小临界载荷比文献[1]的相应结果更加准确, 计算过程也十分简单。

关键词 悬臂板 侧曲 临界载荷 多项式

一、问题的提法

文献[1]用能量法研究了悬臂板的侧屈问题, 其 y 方向的挠度函数是选用余弦函数。求得的最小临界载荷精确度较差。本文用多项式表示挠度函数, 得到的最小临界载荷比文献[1]的相应结果的精确度有显著的提高。

如图1, 设有一各向同性等厚度矩形薄板受载荷作用后发生侧向屈曲。系统的形变势能为^[1]

$$U = \frac{D}{2} \iint [w_{xx}^2 + w_{yy}^2 + 2\mu w_{xx}w_{yy} + 2(1-\mu)w_{xy}^2] dx dy \quad (1.1)$$

其中 $D = Eh^3/[12(1-\mu^2)]$ 是板的弯曲刚度, E , h 及 μ 分别是板材料的弹性模量、厚度及泊松比, w 为挠度, w_{xx} , w_{yy} , w_{xy} 为 w 对相应下标的偏导数。以上二重积分均遍及板的中面区域。

若薄板在其顶边($x=a$)受铅直的分布的中面载荷 $q(y)$ 作用, 则外力的势能为

$$V = - \int_0^b q(y) \Delta_x(y) dy \quad (1.2)$$

其中 $\Delta_x(y)$ 为载荷 q 作用点沿 x 方向的位移。

系统的总势能为

$$\Pi = U + V \quad (1.3)$$

按照Ritz法, 系统在稳定平衡时, 其总势能为最小, 即

* 叶开沅推荐。

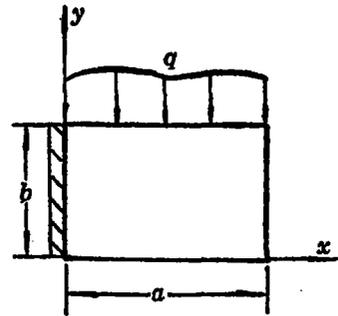


图 1

$$\delta\Pi=0$$

由此得

$$\partial\Pi/\partial f_1=0, \quad \partial\Pi/\partial f_2=0 \quad (1.4)$$

式中 f_1 及 f_2 为挠度试函数 $w(x, y)$ 中的两个待定参数.

由式(1.4)有非零解的条件可求得最小临界载荷.

挠度试函数 $w(x, y)$ 应事先选择使它满足全部几何条件.

二、均布载荷的情形

如图1, 设 $q=q_0=\text{const}$, 需求其最小临界载荷.

我们选取挠度试函数为

$$w = \frac{1}{3} \left(f_1 + \frac{f_2 - f_1}{a} x \right) \left(\frac{6y^2}{b^2} - \frac{4y^3}{b^3} + \frac{y^4}{b^4} \right) \quad (2.1)$$

其中 f_1 及 f_2 分别为 B 点及 C 点的横向挠度, 是待定参数. a 和 b 分别为板的宽和长.

$$Y = 6y^2/b^2 - 4y^3/b^3 + y^4/b^4 \quad (2.2)$$

为悬臂梁受均布载荷作用时的挠度函数, 我们称它为梁函数. 它显然满足条件

$$y=0 \text{ 时, } Y = dY/dy = 0 \quad (2.3)$$

由式(2.1)可求得

$$\left. \begin{aligned} w_{xx} &= 0 \\ w_{yy} &= \frac{144}{9} \left(f_1 + \frac{f_2 - f_1}{a} x \right)^2 \cdot \frac{1}{b^4} \left(1 - \frac{2y}{b} + \frac{y^2}{b^2} \right)^2 \\ w_{xy} &= \frac{16}{9} \cdot \frac{(f_2 - f_1)^2}{a^2 b^2} \left(\frac{3y}{b} - \frac{3y^2}{b^2} + \frac{y^3}{b^3} \right)^2 \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

将式(2.4)代入式(1.1)可得

$$U = \frac{1}{2} \left[A(f_1^2 + f_2^2 + f_1 f_2) + \frac{B}{2} (f_1 - f_2)^2 \right] \quad (2.5)$$

$$A = \frac{16}{15} \cdot \frac{aD}{b^3}, \quad B = \frac{4.57143(1-\mu)D}{ab} \quad (2.6)$$

将式(2.1)代入式(1.2)得

$$V = -\frac{1}{2} q_0 \int_0^b (w \cdot w_x)_{x=a} dy = \frac{C_1 (f_2^2 - f_1 f_2)}{2} \quad (2.7)$$

$$C_1 = 0.25679 q_0 b/a \quad (2.8)$$

由式(2.5), (2.7)及(1.4)得

$$\left. \begin{aligned} f_1(2A+B) + f_2(A-B+C_1) &= 0 \\ f_1(A-B+C_1) + f_2(2A+B-2C_1) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

式(2.9)如果有非零解, 则其系数行列式必为零. 于是得板的稳定性方程为

$$C_1^2 + 6AC_1 - 3A(A+2B) = 0 \quad (2.10)$$

其最小正实根为

$$C_1 = -3A + [6A(2A+B)]^{1/2} \quad (2.11)$$

将式(2.6)及(2.8)代入得该悬臂矩形板在其顶边 $x=a$ 有均布载荷 q_0 作用而发生侧向屈曲时的最小临界载荷为

$$(q_0)_{cr}^* = -12.46154 \frac{a^2 D}{b^4} + \frac{1}{0.25679} \cdot \frac{a D}{b^3} \left[13.65333 \frac{a^2}{b^2} + 29.25715(1-\mu) \right]^{1/2} \quad (2.12)$$

对于方板, $a=b$, 取 $\mu=0.3$ 得最小临界载荷为

$$(q_0)_{cr} = 10.29002 D/a^2 \quad (2.13)$$

成祥生的相应结果为^[1]

$$(q_0)_{cr1} = 12.05669 D/a^2 \quad (2.14)$$

二者有明显的差异。以后将指出, 本文结果式(2.13)比成祥生的相应结果式(2.14)更精确些。

三、集中载荷的情形

如图2, 设有一铅直集中力 P 作用于悬臂矩形板的点 $C(a, b)$ 处, 需求其最小临界载荷。设挠度函数为

$$w = \frac{3}{11} \left(f_1 + \frac{f_2 - f_1}{a} x \right) \left[\left(\frac{6y^2}{b^2} - \frac{4y^3}{b^3} + \frac{y^4}{b^4} \right) + \left(\frac{y^2}{b^2} - \frac{1}{3} \frac{y^3}{b^3} \right) \right]$$

即

$$w = \frac{3}{11} \left(f_1 + \frac{f_2 - f_1}{a} x \right) \left(\frac{7y^2}{b^2} - \frac{13}{3} \frac{y^3}{b^3} + \frac{y^4}{b^4} \right) \quad (3.1)$$

其中

$$Y_1 = \frac{y^2}{b^2} - \frac{1}{3} \frac{y^3}{b^3} \quad (3.2)$$

为悬臂梁在其自由端受集中力作用时的梁函数。

将式(3.1)代入式(1.1), 可得系统的形变势能为

$$U = \frac{1}{2} \left[A_1 (f_1^2 + f_2^2 + f_1 f_2) + \frac{B_1}{2} (f_1 - f_2)^2 \right] \quad (3.3)$$

$$A_1 = 1.04463 a D / b^3, \quad B_1 = 4.60732 D / (ab) \quad (3.4)$$

外力势能为

$$V = -\frac{1}{2} P (w \cdot w_x)_{x=a, y=b}$$

将式(3.1)代入得

$$V = C_2 (f_2^2 - f_1 f_2) / 2 \quad (3.5)$$

$$C_2 = P/a \quad (3.6)$$

由 $\delta \Pi = 0$, 利用式(3.3)及(3.5)重复上节的运算可得

$$C_2 = -3A_1 + [6A_1(2A_1 + B_1)]^{1/2} \quad (3.7)$$

将式(3.4)及(3.6)代入得该悬臂矩形板受集中力作用而发生侧向屈曲时的最小临界载荷为

$$P_{cr}^* = a [-3A_1 + (12A_1^2 + 6A_1 B_1)^{1/2}] \quad (3.8)$$

式中 A_1 及 B_1 由式(3.4)给出。

对于方板, $a=b$, 取 $\mu=0.3$ 得最小临界载荷为

$$P_{cr} = 2.63754 D/a \quad (3.9)$$

成祥生的相应结果为^[1]

$$P_{cr1} = 2.73394 D/a \quad (3.10)$$

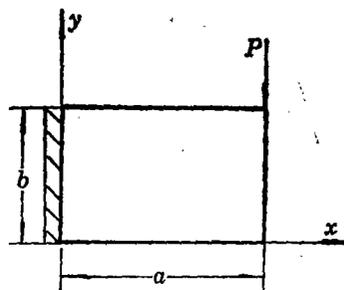


图 2

二者颇接近, 但有 $P_{cr} < P_{cr1}$. 以后将指出, 本文结果式(3.9)比成祥生的相应结果式(3.10)更准确些.

四、精确度的估计

现以第二节中所研究的均布载荷的情形为例, 说明本文的结果比文献[1]的相应结果更加精确.

文献[1]所选取的双参数形式的挠度试函数为

$$w = \left(f_1 + \frac{f_2 - f_1}{a} \cdot x \right) \left(1 - \cos \frac{\pi y}{2b} \right) \quad (4.1)$$

由此式求得的方板 ($\mu = 0.3$) 的最小临界载荷为式(2.14).

如果把挠度试函数改为三参数形式, 即令

$$w = \left(f_1 + \frac{f_2 - f_1}{a} \cdot x \right) \left[1 - m \cos \frac{\pi y}{2b} - (1 - m) \cos \frac{3\pi y}{2b} \right] \quad (4.2)$$

其中 f_1 , f_2 及 m 均为待定常数. 为了决定它们, 我们须在式(1.4)的基础上再增加一个方程

$$\partial \Pi / \partial m = 0 \quad (4.3)$$

利用式(4.2)可求得系统的形变势能 U 及外力势能 V 以及系统的总势能 $\Pi = U + V$, 代入式(1.4)及(4.3)就可得到决定 f_1 , f_2 及 m 的三个联立方程, 利用此联立方程有非零解的条件即可求得悬臂方板 ($\mu = 0.3$) 在其顶边受均布载荷 q_0 作用发生侧向屈曲时的最小临界载荷 $(q_0)_{cr2}$ 的数值.

不必进行具体计算我们就可预先估计到 $(q_0)_{cr2}$ 比式(2.14)的 $(q_0)_{cr1}$ 更准确些, 并有

$$(q_0)_{cr2} < (q_0)_{cr1} \quad (4.4)$$

事实上, 根据收敛性准则, 式(4.2)应当比式(4.1)更加接近于真实的挠度函数^[2]. 由此推知, $(q_0)_{cr2}$ 应当比 $(q_0)_{cr1}$ 更准确些.

既然 $(q_0)_{cr2}$ 比 $(q_0)_{cr1}$ 更准确, 则必有

$$(q_0)_{cr2} < (q_0)_{cr1}$$

这是因为, 近似挠度曲线, 可看作是对实际挠度曲线施加了某些约束后的结果^[2]. 于是, 用近似挠度函数去取代实际的挠度函数所得到的最小临界载荷的数值必然比实际的最小临界载荷要大些, 换言之, 精确度越高的最小临界载荷的数值越小^[2]. 既然 $(q_0)_{cr2}$ 比 $(q_0)_{cr1}$ 更精确, 故有

$$(q_0)_{cr2} < (q_0)_{cr1}$$

现在转向式(2.13)及(2.14). 既然 $(q_0)_{cr} < (q_0)_{cr1}$, 根据上述的理由, 我们便可断言, $(q_0)_{cr}$ 比 $(q_0)_{cr1}$ 更加准确.

同理, 对于集中载荷的情形, 本文得到的最小临界载荷式(3.9)比文献[1]的相应结果式(3.10)更加准确.

应该指出, 本文求得的最小临界载荷 $(q_0)_{cr}$ 及 P_{cr} 仍然偏于不安全, 但是比文献[1]的偏于不安全的程度有很大的改善. 本文的计算过程又十分简单, 故值得向工程界推荐.

最后, 我们还注意到, 成祥生^[1]对于悬臂板受均布载荷及集中载荷两种不同的情形, 选用同一个挠度试函数式(4.1). 本文则对于这两种不同的情形, 分别选用不同的挠度试函数即式(2.1)及(3.1). 理应如此, 事实上, 如果对于集中载荷的情形, 仍然选用式(2.1)作为

挠度函数, 则对于方板(取 $\mu=0.3$), 其最小临界载荷将是 $P_{cr}=2.64237D/a$, 它比选用式(3.1)作为挠度函数得到的最小临界载荷 $P_{cr}=2.63754D/a$ 大些, 即精确度有所降低。

参 考 文 献

- [1] 成祥生, 悬臂板侧屈中的几个问题, 应用数学和力学, 9(8) (1988), 735—739.
[2] 孙训方、方孝淑、关来泰编, 《材料力学》, 人民教育出版社, 下册(1980), 243.

A Polynomial Method for Solving the Problems for Lateral Instability of Cantilever Plates

Yuan Yi-wu

(Central South University of Technology, Changsha)

Abstract

The present article researches the problems of the lateral instability of cantilever rectangular plates under a concentrated force or a uniformly distributed load respectively. We select the polynomial (2.1) instead of the cosecant function in ref.[1] as the flexural functions. The minimum critical load obtained here is more exact than the results obtained in ref.[1].

Key words cantilever plates, lateral instability, critical load, polynomial