

# 水箱突然起动的的水动压力问题\*

陶明德 施小民

(上海 复旦大学应用力学系, 1990年2月26日收到)

## 摘 要

在本文中, 应用 Lagrange 方法讨论水箱突然起动的的水动压力问题, 求得了自由面形状和作用在水箱壁上的动态压力系数, 也证实了在自由面附近, 压力系数的奇性仅是对数奇性。

**关键词** Lagrange方法 水箱 动态压力 水波

## 一、引 言

在地震时, 水库中的水对坝体会产生一个冲击力; 飞行器在加速时, 液体燃料对燃料箱也会产生一个冲击力。这些由于加速固壁而产生的液面晃动问题可以归结为水箱突然起动的的水动压力问题。

关于这个问题的研究起源于本世纪20年代, 当时由于美国要在地震活动区建造水坝, 所以需要估算地震时作用在坝体上的水动压力。1933年 Westergaard<sup>[1]</sup> 首次用线性理论给出了这个问题的理论结果, 但在这结果中忽略了自由面的晃动。同年 von Kármán<sup>[2]</sup> 用直接、简洁的动量平衡方法也处理了这问题, 他的结果很接近于 Westergaard 的结果。但直到1983年 Chwang<sup>[3]</sup> 才用非线性理论求解了这问题。1984年 Chwang 和 Wang<sup>[4]</sup> 又用同一方法求解了容器突然加速时的水动压力问题。然而在[3]和[4]中, 动态压力系数在自由面附近变得很大, 也没有阐明这奇性的性质。

上述文献都采用 Euler 方法来求解平板或容器突然加速的问题。1988年陶明德和岑韵用 Lagrange 方法处理过平板突然起动问题<sup>[5]</sup>, 但也没有阐明包含在动态压力系数中的奇性的性质。本文也用 Lagrange 方法来研究水箱突然起动问题, 求得了水箱壁上的动态压力系数随时间变化的规律, 证实了在自由面附近的奇性仅为对数奇性。由于采用了 Lagrange 方法, 故壁上的动压系数从底部可以算到自由面处, 而在 Euler 方法中动压系数只能算到初始自由面处。此外, 前者的动压系数比后者的稍大一点, 而两者的自由面高度是一致的。

采用 Lagrange 方法来处理瞬态水波问题, 不但能使自由面上的非线性边界条件严格得到满足, 而且求解区域始终固定, 当然控制方程要变得复杂一点。

\* 戴世强推荐。

## 二、方程和边界条件

如图1所示,我们设水箱是二维的,底部为 $x$ 轴,静止水深为 $h$ .两壁关于 $y$ 轴对称,分别位于 $x=\pm L/2$ 处.我们有 Lagrange 型运动方程

$$X_{tt}X_a + (Y_{tt}+g)Y_a = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial a} \quad (2.1a)$$

$$X_{tt}X_b + (Y_{tt}+g)Y_b = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial b} \quad (2.1b)$$

和连续性方程

$$\begin{vmatrix} X_a & Y_a \\ X_b & Y_b \end{vmatrix} = 1 \quad (2.2)$$

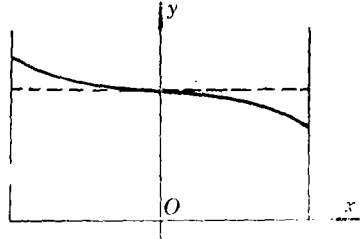


图 1

其中 $X$ ,  $Y$ 和 $a$ ,  $b$ 分别为 $t>0$ 时刻和初始 $t=0$ 时刻水质点所在位置的直角坐标,  $p$ 为总压力,  $g$ 为重力加速度,  $\rho$ 为密度, 下标表示偏导数. 从(2.1)消去 $p$ 可得

$$(X_a X_{bt} + Y_a Y_{bt}) - (X_b X_{at} + Y_b Y_{at}) = 0 \quad (2.3)$$

这里假定运动是无旋的.

根据 Pohle 的方法<sup>[6]</sup>, 当 $t \ll 1$ 时把未知函数 $X(a, b, t)$ ,  $Y(a, b, t)$ 和 $p(a, b, t)$ 都展开成 $t$ 的幂级数

$$X = a + X^{(2)}(a, b)t^2 + X^{(3)}(a, b)t^3 + X^{(4)}(a, b)t^4 + \dots \quad (2.4a)$$

$$Y = b + Y^{(2)}(a, b)t^2 + Y^{(3)}(a, b)t^3 + Y^{(4)}(a, b)t^4 + \dots \quad (2.4b)$$

$$p = p^{(0)}(a, b) + p^{(1)}(a, b)t + p^{(2)}(a, b)t^2 + p^{(3)}(a, b)t^3 + \dots \quad (2.4c)$$

其中 $X^{(i)}$ ,  $Y^{(i)}$ 和 $p^{(i)}$ 是与 $a$ ,  $b$ 有关的待定系数. 在(2.4a, b)中, 假定容器初始静止. 把(2.4a, b)代入(2.2)和(2.3)可得

$$X_a^{(2)} + Y_b^{(2)} = 0, \quad X_b^{(2)} - Y_a^{(2)} = 0, \quad X_a^{(3)} + Y_b^{(3)} = 0, \quad X_b^{(3)} - Y_a^{(3)} = 0 \quad (2.5a \sim d)$$

$$X_a^{(4)} + Y_b^{(4)} = X_b^{(2)} Y_a^{(2)} - X_a^{(2)} Y_b^{(2)}, \quad X_b^{(4)} - Y_a^{(4)} = 0 \quad (2.5e, f)$$

.....

把(2.4)代入(2.1)可得

$$2X^{(2)} + \frac{1}{\rho} p_a^{(0)} = 0, \quad 2Y^{(2)} + g + \frac{1}{\rho} p_b^{(0)} = 0 \quad (2.6a, b)$$

$$6X^{(3)} + \frac{1}{\rho} p_a^{(1)} = 0, \quad 6Y^{(3)} + \frac{1}{\rho} p_b^{(1)} = 0 \quad (2.6c, d)$$

$$2X^{(2)} X_a^{(2)} + 12X^{(4)} + (2Y^{(2)} + g)Y_a^{(2)} + \frac{1}{\rho} p_a^{(2)} = 0 \quad (2.6e)$$

$$2X^{(2)} X_b^{(2)} + 12Y^{(4)} + (2Y^{(2)} + g)Y_b^{(2)} + \frac{1}{\rho} p_b^{(2)} = 0 \quad (2.6f)$$

.....

在自由面( $b=h$ )处, 因总压力 $p=0$ , 故由(2.4c)可得

$$p^{(i)}(a, h) = 0 \quad (i=0, 1, 2) \quad (2.7)$$

由(2.6a)和(2.5a)可得

$$X^{(2)}(a, h) = 0 \quad (2.8)$$

$$\text{和} \quad Y_b^{(2)}(a, h) = 0 \quad (2.9)$$

在底面 ( $b=0$ ) 处,  $Y \equiv 0$ , 故由(2.4b)可得

$$Y^{(i)}(a, 0) = 0 \quad (i=2, 3, 4) \quad (2.10)$$

由(2.5b)可得

$$X_b^{(2)}(a, 0) = 0 \quad (2.11)$$

在本文中, 我们仅讨论水箱作匀加速运动, 设加速度为  $a_1$ , 则在壁面 ( $a = \pm L/2$ ) 处流体的法向速度应等于壁面的速度, 故

$$X_t(\pm L/2, b, t) = a_1 t$$

由此可得

$$2X^{(2)}(\pm L/2, b) = a_1, \quad 3X^{(3)}(\pm L/2, b) = 0, \quad 4X^{(4)}(\pm L/2, b) = 0 \quad (2.12a \sim c)$$

把(2.12a, b, c)分别代入(2.6a, c, e)可得

$$a_1 + \rho^{-1} p_a^{(0)}(\pm L/2, b) = 0, \quad p_a^{(1)}(\pm L/2, b) = 0 \quad (2.13a, b)$$

$$a_1 X_b^{(2)}(\pm L/2, b) + (1/\rho) p_b^{(2)}(\pm L/2, b) = 0 \quad (2.13c)$$

再把(2.10)和(2.11)代入(2.6b, d, f)可得

$$p_b^{(0)}(a, 0) = -\rho g, \quad p_b^{(1)}(a, 0) = 0, \quad p_b^{(2)}(a, 0) = -\rho g Y_b^{(2)}(a, 0) \quad (2.14a, b, c)$$

### 三、求解位移

由(2.5a, b)消去  $Y^{(2)}$  可得 Laplace 方程

$$\nabla^2 X^{(2)} = 0$$

由此再利用边界条件(2.8)、(2.11)和(2.12a), 不难用分离变量法求得

$$X^{(2)}(a, b) = a_1 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\text{ch} \mu_k \bar{a} \cos \mu_k \bar{b}}{\mu_k \text{ch} 0.5 \mu_k \bar{L}} \quad (3.1)$$

其中

$$\mu_k = \frac{\pi(2k+1)}{2}, \quad \bar{a} = \frac{a}{h}, \quad \bar{b} = \frac{b}{h}, \quad \bar{L} = \frac{L}{h}$$

把(3.1)代入(2.5a)可得

$$Y^{(2)}(a, b) = a_1 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\text{sh} \mu_k \bar{a} \sin \mu_k \bar{b}}{\mu_k \text{ch} 0.5 \mu_k \bar{L}} \quad (3.2)$$

由(2.5c, d)可知  $X^{(3)}$  和  $Y^{(3)}$  是共轭调和函数, 而且从(2.10)和(2.5d)可得

$$X_b^{(3)}(a, 0) = 0 \quad (3.3)$$

从(2.7)、(2.6c)可得

$$X^{(3)}(a, h) = 0 \quad (3.4)$$

从(3.3)、(3.4)以及(2.12b)可知

$$X^{(3)}(a, b) \equiv Y^{(3)}(a, b) \equiv 0 \quad (3.5)$$

故自由面方程为

$$X/h = a/h + O(\epsilon^4) = \bar{a} + O(\epsilon^4) \quad (3.6a)$$

$$\frac{Y}{h} = 1 - 2\epsilon^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\text{sh} \mu_k \bar{a}}{\mu_k \text{ch} 0.5 \mu_k \bar{L}} + O(\epsilon^4) \quad (3.6b)$$

其中

$$\epsilon = t \sqrt{a_1/2h}$$

## 四、求解压力

压力展开式中的系数 $p^{(0)}$ 可积分(2.6b)后得到为

$$p^{(0)}(a, b) = \rho g(h-b) + 2\rho a_1 h \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\text{sh}\mu_k a / h \cos\mu_k b / h}{\mu_k^2 \text{ch}\mu_k L / 2h} \quad (4.1)$$

上式的第一项为静态压力, 第二项为动态压力. 从(2.6d)和(3.5)容易看出

$$p^{(1)}(a, b) \equiv 0 \quad (4.2)$$

利用(2.5e)从(2.6e, f)中消去 $X^{(4)}$ 和 $Y^{(4)}$ 后, 我们可得Poisson方程

$$p_{aa}^{(2)} + p_{bb}^{(2)} = -16\rho (X_b^{(2)} Y_a^{(2)} - X_a^{(2)} Y_b^{(2)}) \quad (4.3)$$

边界条件是(2.7)、(2.13c)和(2.14c). 对于这一非齐次边值问题, 我们能用Green函数方法来求解, 而Green函数可利用固有函数展开法求得为(见附录A)

$$K(x, y; \xi, \eta) = \begin{cases} \frac{2}{h} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos\nu_k y \cos\nu_k \eta}{\nu_k \text{sh}\nu_k L} \text{ch}\nu_k \left(\xi - \frac{L}{2}\right) \text{ch}\nu_k \left(x + \frac{L}{2}\right), & -\frac{L}{2} < x < \xi \\ \frac{2}{h} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos\nu_k y \cos\nu_k \eta}{\nu_k \text{sh}\nu_k L} \text{ch}\nu_k \left(\xi + \frac{L}{2}\right) \text{ch}\nu_k \left(x - \frac{L}{2}\right), & \xi < x < \frac{L}{2} \end{cases} \quad (4.4)$$

其中 $\nu_k = \mu_k / h$ . 利用(4.4)可以把 $p^{(2)}(a, b)$ 表示为

$$\begin{aligned} p^{(2)}(a, b) = & \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^h K(a, b; \xi, \eta) [16\rho (X_b^{(2)}(\xi, \eta) Y_a^{(2)}(\xi, \eta) \\ & - X_a^{(2)}(\xi, \eta) Y_b^{(2)}(\xi, \eta))] d\xi d\eta \\ & + \int_0^h K(a, b; \frac{L}{2}, \eta) [-\rho a_1 X_a^{(2)}(\frac{L}{2}, \eta)] d\eta \\ & + \int_0^h K(a, b; -\frac{L}{2}, \eta) [-\rho a_1 X_a^{(2)}(-\frac{L}{2}, \eta)] d\eta \\ & - \int_{-L/2}^{L/2} K(a, b; \xi, 0) [-\rho g Y_b^{(2)}(\xi, 0)] d\xi \end{aligned}$$

在水箱左壁上的动态压力系数 $C$ , 定义为

$$C_p = \frac{p_D(-L/2, b)}{\rho a_1 h}$$

其中 $p_D$ 为动态压力. 稍加整理后, 上式可写为

$$\begin{aligned} C_p(b) = & 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\text{th}0.5\mu_k L \cos\mu_k b}{\mu_k^2} \\ & + \frac{2}{64} \left\{ \int_{-L/2}^{L/2} d\xi \int_0^1 d\eta \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos\mu_k b \cos\mu_k \eta}{\mu_k \text{sh}\mu_k L} \text{ch}\mu_k \left(\xi - \frac{L}{2}\right) \right) \right. \\ & \cdot \left[ \left( \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\text{sh}\mu_k \xi \cos\mu_k \eta}{\text{ch}0.5\mu_k L} \right)^2 + \left( \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\text{ch}\mu_k \xi \sin\mu_k \eta}{\text{ch}0.5\mu_k L} \right)^2 \right] \\ & + \int_0^1 d\eta \left( \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \text{th} \frac{1}{2} \mu_k L \cos\mu_k \eta \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos\mu_k b \cos\mu_k \eta}{\mu_k \text{sh}\mu_k L} (\text{ch}\mu_k L - 1) \right) \end{aligned}$$

$$+ \frac{4}{\alpha} \int_{-\bar{L}/2}^{\bar{L}/2} d\bar{\xi} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\text{sh} \mu_k \bar{\xi}}{\text{ch} 0.5 \mu_k L} \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos \mu_k \bar{b}}{\mu_k \text{sh} \mu_k L} \text{ch} \mu_k \left( \bar{\xi} - \frac{L}{2} \right) \right) \quad (4.5)$$

其中  $\alpha = a_1/g$ .

## 五、数值结果和结论

假定  $L=1$ ,  $\alpha=0.2$ , 则根据(3.6)可绘出自由面的剖面随无量纲时间  $\epsilon$  的变化 (图2); 根据(4.5)可绘出左边水箱壁上的动态压力系数  $C_p$  随无量纲时间  $\epsilon$  的变化 (图3). (3.6)和(4.5)两式给出了本文的主要结果.

根据图2可见当  $\bar{a} = -L/2$  时, 只要  $\epsilon \neq 0$  (3.6b) 就有对数奇性. 根据图3可见当  $\bar{b} = 1$  时,  $C_p$  也有对数奇性 (见附录B). 这些奇性的产生都是由于边值在  $\bar{a} = \pm L/2$  和  $\bar{b} = 1$  处不连续的原因. 由(2.8)可知, 当该点作为自由面上的一个点时, 应有  $X^{(2)} = 0$ ; 但由(2.12a)可知, 又有  $X^{(2)} = a_1/2$ . 因此  $X^{(2)}$  在自由面和边壁交点处间断, 在物理上该点处的流动十分复杂.

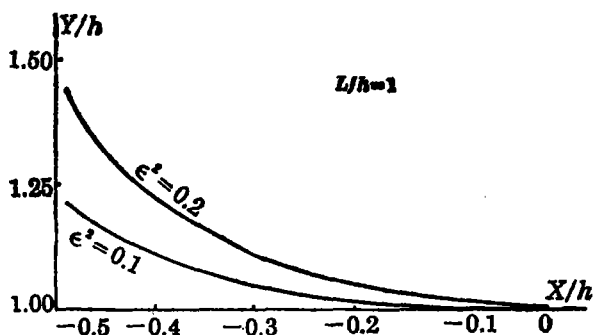


图 2

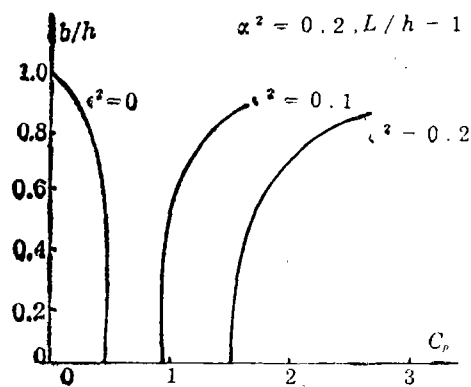


图 3

## 附录 A

设 Green 函数  $K(x, y; \xi, \eta)$  满足

$$\nabla^2 \cdot K = -\delta(x-\xi)\delta(y-\eta) \quad (A.1a)$$

$$\partial K / \partial x = 0 \quad (x = \pm L/2) \quad (A.1b)$$

$$\partial K / \partial y = 0 \quad (y=0) \quad (A.1c)$$

$$K=0 \quad (y=h) \quad (A.1d)$$

设算子  $L = -\partial^2 / \partial y^2$ , (A.1a) 可记为

$$\nabla^2 K = \partial^2 K / \partial x^2 - LK = -\delta(x-\xi)\delta(y-\eta) \quad (A.2)$$

设  $M_i(y)$  为  $L$  的特征函数, 即

$$LM_i = \lambda_i M_i \quad (A.3)$$

$$(M_i, M_j) = \delta_{ij} \quad (A.4)$$

由(A.1c, d)可得

$$M_i(h) = M_i'(0) = 0 \quad (A.5)$$

于是满足(A.3)和(A.5)的特征函数为

$$M_i = \sqrt{2/h} \cos \sqrt{\lambda_i} y \quad (A.6)$$

其中  $\sqrt{\lambda_i} = (i+1/2)\pi/h$ ,  $(i=0, 1, 2, \dots)$  (A.7)

再把  $K$  展开为特征函数  $M_i$  的级数

$$K(x, y; \xi, \eta) = \sum_{i=0}^{\infty} N_i(x) M_i(y) \tag{A.8}$$

以  $M_i$  乘 (A.2) 的两边, 再积分, 当利用了  $L$  的自伴性和  $M_i$  的正交性后, 可得

$$N_i'' - \lambda_i N_i = -M_i(\eta) \delta(x - \xi) \tag{A.9}$$

由 (A.1b) 可知

$$N_i'(-L/2) = N_i'(L/2) = 0$$

因此

$$N_i(x) = \begin{cases} A \frac{\operatorname{ch} \nu_i(x+L/2)}{\operatorname{ch} 0.5 \nu_i L}, & -L/2 < x < \xi \\ B \frac{\operatorname{ch} \nu_i(x-L/2)}{\operatorname{ch} 0.5 \nu_i L}, & \xi < x < L/2 \end{cases} \tag{A.10}$$

利用  $N_i$  在  $x = \xi$  处连续,  $N_i'$  有间断, 我们可求得

$$A = \frac{M_i(\eta)}{h \nu_i} \frac{\operatorname{ch} 0.5 \nu_i L \operatorname{ch} \nu_i(\xi - L/2)}{\operatorname{sh} \nu_i L}$$

$$B = \frac{M_i(\eta)}{h \nu_i} \frac{\operatorname{ch} 0.5 \nu_i L \operatorname{ch} \nu_i(\xi + L/2)}{\operatorname{sh} \nu_i L}$$

把  $A$  和  $B$  代入 (A.10) 即得 (4.4).

### 附 录 B

设  $\bar{b}$  为很接近于 1 的某数, 故可以以  $(-\bar{b}/2, \bar{b})$  为中心, 以  $\delta = (1 - \bar{b})/2 \ll 1$  为半径在区域内作一半圆  $R_\delta$ . 作变换

$$\xi = r \cos \theta - \bar{L}/2, \quad \bar{\eta} = \bar{b} + r \sin \theta \quad (0 < r < \delta, |\theta| < \pi/2)$$

我们现在来估计 (4.5) 中的二重积分. 在  $R_\delta$  中, (4.5) 的第三个和式比第二个来得小, 因此只要讨论前两个和式  $\Sigma_1$  和  $\Sigma_2$  即可.  $\Sigma_1$  的主部为

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\operatorname{ch} \mu_k(\xi - \bar{L}/2)}{\mu_k \operatorname{sh} \mu_k \bar{L}} \tag{B.1}$$

当  $k$  很大时, (B.1) 式可写为

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\exp[\mu_k(\bar{L} - r \cos \theta)]}{\mu_k \exp[\mu_k \bar{L}]} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\mu_k} \exp[-\mu_k r \cos \theta] = F(r \cos \theta)$$

设  $u = r \cos \theta$ , 因此可有

$$\frac{dF}{du} = - \sum_{k=0}^{\infty} \exp[-\mu_k u] = \frac{\exp[-\pi u/2]}{1 - \exp[-\pi u]}$$

所以  $F \sim -\ln(1 - \exp[-\pi u/2]) \sim -\ln(r \cos \theta)$

$\Sigma_2$  的主部

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cos \mu_k \bar{\eta} &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cos \mu_k (\bar{b} + r \sin \theta) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cos \mu_k (1 - 2\delta + r \sin \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \sin \left[ (2\delta - r \sin \theta) \left( k + \frac{1}{2} \right) \pi \right] \end{aligned} \tag{B.2}$$

记  $(2\delta - r \sin \theta) \pi = \varphi$ , 则 (B.2) 为

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sin \left( k\varphi + \frac{\varphi}{2} \right) = \cos \frac{\varphi}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \sin k\varphi + \sin \frac{\varphi}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \cos k\varphi$$

但  $\sum_{k=0}^{\infty} \cos k\varphi = \frac{\sin(n+1/2)\varphi}{2\sin(\varphi/2)} \Big|_{n \rightarrow \infty} + \frac{1}{2} \sim \frac{1}{\delta}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sin k\varphi = \frac{\cos(\varphi/2) - \cos(n\varphi + \varphi/2)}{2\sin(\varphi/2)} \Big|_{n \rightarrow \infty} \sim \frac{1}{\delta}$$

故在  $R_0$  中二重积分的主部为

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\delta^2} \int_0^\delta r dr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta (\ln(r\cos\theta)) \\ & = -\frac{1}{\delta^2} \int_0^\delta \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (r \ln r + r \ln \cos\theta) dr d\theta \\ & = -\frac{\pi}{4} \left( \ln \delta - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \ln \cos\theta d\theta \end{aligned}$$

所以从上式可得其主部为

$$-\ln \delta \sim -\ln(1-\bar{\nu})$$

### 参 考 文 献

- [ 1 ] Westergaard, H. M., Water pressure on dams during earthquakes, *Trans. ASCE*, **98** (1933), 418.
- [ 2 ] von Kármán, T., Discussion of water pressure on dams during earthquakes, *Trans. ASCE*, **98** (1933), 434.
- [ 3 ] Chwang, A. T., Nonlinear hydrodynamic pressure on an accelerating plate, *Physics of Fluids*, **26** (1983), 383.
- [ 4 ] Chwang, A. T. and K. H. Wang, Nonlinear impulsive force on an accelerating container, *J. Fluids Engng.*, **106** (1984), 233.
- [ 5 ] Tao, M. D. and Y. Cen, The solution of an accelerating plate by Lagrangian method, *Engng. Mech.*—7th Conf., ASCE, New York (1988), 49.
- [ 6 ] Stoker, J. J., *Water Waves*, Interscience Publishers Inc., New York (1957), 514.

## Problem of Hydrodynamic Pressure on Suddenly Starting Vessel

Tao Ming-de    Shi Xiao-ming

(Department of Applied Mechanics, Fudan University, Shanghai)

### Abstract

In this paper, Lagrangian method is applied to discuss the problem of the hydrodynamic pressure on a suddenly starting vessel. The free surface profile and the coefficients of the hydrodynamic pressure on the vessel wall are obtained, it is verified that the singularity of the pressure near the free surface is only logarithmic.

**Key words** Lagrangian method, vessel, hydrodynamic pressure, water waves