

无胀缝坡道路面板热胀屈曲的摄动解

陈建康 王汝鹏

(江苏农学院) (上海城建学院)

(1992年5月20日收到, 陈至达推荐)

摘 要

文中分析了无胀缝坡道路面板在温度场作用下热胀屈曲的力学机制。采用正则摄动法导出了坡道路面板临界铺设温差的渐近表达式, 分析了坡道与水平直道路面板临界铺设温差之间的关系, 得出了坡道与水平直道路面板热胀屈曲的统一解答, 并据此给出了无胀缝坡道路面的合理铺设温差。

关键词 坡道路面板 热胀屈曲 摄动解

一、引 言

路面板中胀缝的设置影响路面的使用质量, 但若取消胀缝又会带来路面热胀屈曲的可能。因此研究无胀缝路面合理的铺设温度是一个重要的课题。自文[1]报导了水平直道路面板热应力稳定性研究的最初成果以来, 我们在实验上采用光载波方法, 在理论上采用正则摄动法对水平直道和弯道路面热胀屈曲问题进行了一系列研究^[2-6], 本文是以上研究工作的继续。

本文以坡道路面板为研究对象, 分析了它在温度场作用下热胀屈曲的力学机制, 建立了该问题的控制方程并用摄动法求解了方程, 得到用坡度 $\sin\theta$ 表示的临界铺设温差的一级近似表达式, 讨论了坡度与临界铺设温差的关系。本文研究表明, 坡道路面比水平直道路面更容易发生热胀屈曲。

二、控制方程及其渐近形式

经过热胀冷缩的几次循环, 路面板将在缩缝处产生裂纹而变成一系列等长度的短板。随着温度的升高, 路面的缩缝逐渐闭合并板内产生纵向热压应力, 倘若热压应力达到某一限值, 路面板就处于临界状态。若再升温, 则可能在某两块短板处产生屈曲。倘若任意两块相邻短板都不发生屈曲, 则路面不会屈曲, 另外从实验现象上^[2]可知, 路面板受热膨胀拱起后, 板边界的两条缩缝可近似地处理成固定铰支, 而中间缩缝由于热压力作用而闭合, 因而可认为在中间缩缝处应力和位移近似地连续。

根据以上分析可作如下假设:

1. 路面板满足弹性薄板的基本假定;
2. 路面板两对边简支, 两对边自由;
3. 屈曲时地基支承不起作用, 亦无板底摩擦力。

图1、图2给出了路面板受力分析图。

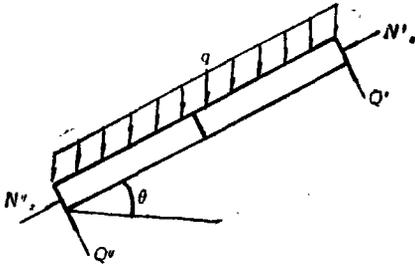


图 1

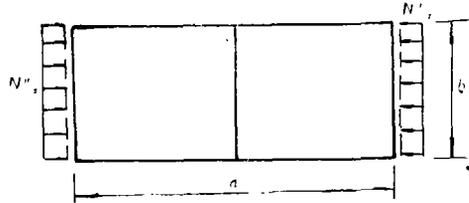


图 2

由于坡度和路面板自重的影响, 即使在小变形情况下板内热压应力 N_x 也不为常数而是 x 的函数。根据文[7]可推得坡道路面板在温度场作用下的控制方程为

$$D\nabla^4 w + N_x w_{,xx} + N_{x,z} w_{,xz} = q \cos \theta + \nabla^2 M_T \tag{2.1}$$

$$\nabla^2 M_T = - \frac{E\alpha}{1-\mu} \nabla^2 \int_{-t/2}^{t/2} \Delta T z dz \tag{2.2}$$

及边界条件

$$\left. \begin{aligned} w \Big|_{x=0,a} &= 0 & M_x \Big|_{x=0,a} &= 0 \\ v \Big|_{y=0,b} &= 0 & M_y \Big|_{y=0,b} &= 0 \end{aligned} \right\} \tag{2.3}$$

式中 $\Delta T = \Delta T(x, y, z)$ 是板内任一点的变温, α 是线胀系数, t 是板厚。问题就归结为求解(2.1)~(2.3)所构成的定解问题。

路面板发生屈曲时, 位移函数 w 表现为奇异, 故可以用与(2.1)式相对应的齐次方程研究板内的热压内力与失稳波形, 即研究

$$\left. \begin{aligned} D\nabla^4 w + N_x w_{,xx} + N_{x,z} w_{,xz} &= 0 \\ w = w_{,xx} &= 0 \quad (x=0, a) \end{aligned} \right\} \tag{2.4}$$

$$\left. \begin{aligned} w_{,yy} + \mu w_{,xx} &= 0 \\ w_{,yyy} + (2-\mu)w_{,xyy} &= 0 \quad (y=0, b) \end{aligned} \right\} \tag{2.5}$$

构成的定解问题。式中中面热压内力为

$$N_x = N'_x + qx \sin \theta = N'_x + qxe \tag{2.6}$$

这里已取

$$\varepsilon = \sin \theta \quad (\varepsilon < 1) \tag{2.7}$$

设
$$w = w_0 + \varepsilon w_1 + \dots = \sum_i \varepsilon^i w_i \tag{2.8}$$

$$N'_x = N'_{x0} + \varepsilon N'_{x1} + \dots = \sum_i \varepsilon^i N'_{xi} \tag{2.9}$$

将(2.6)~(2.9)代入(2.4)~(2.5), 比较 ε 同次幂可得控制方程的渐近形式

$$\varepsilon^0: \quad D\nabla^4 w_0 + N'_{x0} w_{0,xx} = 0$$

$$\left. \begin{aligned} w_0 = w_{0,zz} = 0 & \quad (x=0, a) \\ w_{0,yy} + \mu w_{0,zz} = 0 \\ w_{0,yyy} + (2-\mu)w_{0,zz} = 0 \end{aligned} \right\} (y=0, b) \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned} \epsilon^1: & \quad D\nabla^4 w_1 + N'_{x0} w_{1,zz} + (N'_{x1} + qx)w_{0,zz} + qw_{0,z} = 0 \\ & \quad w_1 = w_{1,zz} = 0 \quad (x=0, a) \\ & \quad \left. \begin{aligned} w_{1,yy} + \mu w_{1,zz} = 0 \\ w_{1,yyy} + (2-\mu)w_{1,zz} = 0 \end{aligned} \right\} (y=0, b) \end{aligned} \tag{2.11}$$

三、零级近似解

零级近似方程(2.10)实际上就是水平直道路面板热胀屈曲问题的基本方程。由于边界条件的复杂性，该方程尚无精确解。现在选泊松比 μ 为小参数($\mu=0.16\sim 0.18$)对(2.10)再次摄动。设

$$w_0 = w_{00} + \mu w_{01} + \mu^2 w_{02} + O(\mu^3) \tag{3.1}$$

$$N'_{x0} = N'_{x00} + \mu N'_{x01} + \mu^2 N'_{x02} + O(\mu^3) \tag{3.2}$$

代入(2.10)式，合并 μ 的同次幂项得

$$\begin{aligned} \mu^0 & \quad D\nabla^4 w_{00} + N'_{x00} w_{00,zz} = 0 \\ & \quad w_{00} = w_{00,zz} = 0 \quad (x=0, a) \\ & \quad \left. \begin{aligned} w_{00,yy} = 0 \\ w_{00,yyy} + 2w_{00,zz} = 0 \end{aligned} \right\} (y=0, b) \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned} \mu^1: & \quad D\nabla^4 w_{01} + N'_{x00} w_{01,zz} = -N'_{x01} w_{00,zz} \\ & \quad w_{01} = w_{01,zz} = 0 \quad (x=0, a) \\ & \quad \left. \begin{aligned} w_{01,yy} = -w_{00,zz} \\ w_{01,yyy} + 2w_{01,zz} = w_{00,zz} \end{aligned} \right\} (y=0, b) \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned} \mu^2: & \quad D\nabla^4 w_{02} + N'_{x00} w_{02,zz} = -N'_{x01} w_{01,zz} - N'_{x02} w_{00,zz} \\ & \quad w_{02} = w_{02,zz} = 0 \quad (x=0, a) \\ & \quad \left. \begin{aligned} w_{02,yy} = -w_{01,zz} \\ w_{02,yyy} + 2w_{02,zz} = w_{01,zz} \end{aligned} \right\} (y=0, b) \end{aligned} \tag{3.5}$$

对于(3.3)式，设

$$w_{00} = A \sin \frac{\pi x}{a} \tag{3.6}$$

式中 A 为常数。不难验证 w_{00} 满足(3.3)式所有的边界条件。将(3.6)代入(3.3)的偏微分方程得

$$N'_{x00} = D \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 \tag{3.7}$$

对于(3.4)式，设

$$w_{01} = Y(y) \sin \frac{\pi x}{a} \quad (3.8)$$

显然 w_{01} 满足(3.4)式中 $x=0, a$ 处的边界条件. 在(3.4)式偏微分方程两边同乘以 w_{00} 并在域内积分:

$$\int_0^a \int_0^b w_{00} L_0(w_{01}) dx dy = - \int_0^a \int_0^b N'_{x01} w_{00,zz} w_{00} dx dy \quad (3.9)$$

$$\text{式中 } L_0(\) = D \nabla^4(\) + N_{x00}(\),_{zz} \quad (3.10)$$

作者在文[4]中证明了偏微分算子 $L_0(\)$ 关于 w_{00}, w_{01} 是自伴的, 所以

$$N'_{x01} = - \frac{\int_0^a \int_0^b w_{00} L_0(w_{01}) dx dy}{\int_0^a \int_0^b w_{00,zz} w_{00} dx dy} = - \frac{\int_0^a \int_0^b w_{01} L_0(w_{00}) dx dy}{\int_0^a \int_0^b w_{00,zz} w_{00} dx dy} = 0 \quad (3.11)$$

将(3.8)和(3.11)式代入(3.4), 可得关于 $Y(y)$ 的常微分方程

$$Y^{(4)} - 2 \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 Y'' = 0 \quad (3.12)$$

解此方程得到

$$Y(y) = c_1 + c_2 y + c_3 \operatorname{sh} \frac{\sqrt{2\pi y}}{a} + c_4 \operatorname{ch} \frac{\sqrt{2\pi y}}{a} \quad (3.13)$$

$$\text{故 } w_{01} = \left(c_1 + c_2 y + c_3 \operatorname{sh} \frac{\sqrt{2\pi y}}{a} + c_4 \operatorname{ch} \frac{\sqrt{2\pi y}}{a} \right) \sin \frac{\pi x}{a} \quad (3.14)$$

由于 c_1 项可和 w_{00} 归并在一起, 此处不妨取 $c_1 = 0$. 由 $y=0, b$ 处边界条件可解得

$$c_2 = 0, \quad c_3 = \frac{A}{2} \frac{1 - \operatorname{ch} \frac{\sqrt{2\pi y}}{a}}{\operatorname{sh} \frac{\sqrt{2\pi y}}{a}}, \quad c_4 = \frac{A}{2} \quad (3.15)$$

对于(3.5)式, 设

$$w_{02} = f(y) \sin \frac{\pi x}{a} \quad (3.16)$$

显然 w_{02} 满足(3.5)式 $x=0, a$ 处边界条件. 将 w_{02} 代入二级摄动方程可得关于 $f(y)$ 常微分方程

$$f^{(4)} - 2 \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 f'' = - \frac{N'_{x02}}{D} \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 A \quad (3.17)$$

解此方程得

$$f(y) = D_1 + D_2 y + D_3 \operatorname{sh} \frac{\sqrt{2\pi y}}{a} + D_4 \operatorname{ch} \frac{\sqrt{2\pi y}}{a} - \frac{N'_{x02}}{4D} A y^2 \quad (3.18)$$

$$\text{故有 } w_{02} = \left(D_1 + D_2 y + D_3 \operatorname{sh} \frac{\sqrt{2\pi y}}{a} + D_4 \operatorname{ch} \frac{\sqrt{2\pi y}}{a} - \frac{N'_{x02}}{4D} A y^2 \right) \sin \frac{\pi x}{a} \quad (3.19)$$

由于 D_1 项亦可和 w_{00} 归并在一起, 故也取 $D_1 = 0$.

由(3.5)式 $y=0, b$ 处边界条件解出

$$D_2 = \frac{\sqrt{2\pi} A}{4a} \frac{1 - \operatorname{ch} \frac{\sqrt{2\pi b}}{a}}{\operatorname{sh} \frac{\sqrt{2\pi b}}{a}},$$

$$D_3 = \frac{A \left(1 - \operatorname{ch} \frac{\sqrt{2\pi b}}{a} \right)}{\operatorname{sh} \frac{\sqrt{2\pi b}}{a}} \left[1 + \frac{N'_{x_02}}{D} \left(\frac{a}{\pi} \right)^2 \right]$$

$$D_4 = \frac{A}{4} \left[1 + \frac{N'_{x_02}}{D} \left(\frac{a}{\pi} \right)^2 \right] \tag{3.20}$$

和

$$N'_{x_02} = -D \frac{\sqrt{2\pi}}{2ab} \frac{\operatorname{ch} \frac{\sqrt{2\pi b}}{a} - 1}{\operatorname{sh} \frac{\sqrt{2\pi b}}{a}} \tag{3.21}$$

于是得到零级摄动结果 (计算到 μ^2 量级) :

$$w_0 = A \operatorname{sh} \frac{\pi x}{a} \cdot (1 + \mu Y/A + \mu^2 f/A) \tag{3.22}$$

$$N'_{x_0} = N'_{x_00} + \mu N'_{x_01} + \mu^2 N'_{x_02} = D \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 \left[1 - \mu^2 \frac{a}{\sqrt{2\pi b}} \frac{\operatorname{ch} \frac{\sqrt{2\pi b}}{a} - 1}{\operatorname{sh} \frac{\sqrt{2\pi b}}{a}} \right] \tag{3.23}$$

N_{x_0} 实际上是水平直道路面板的临界压力, 上式表明板宽 b 对水平直道路面板临界压力的影响仅在 μ 的二次方项中表现出来。

四、一级近似解

(2.11)式中偏微分方程两边同乘以 w_0 并在域内积分:

$$\int_0^a \int_0^b w_0 L(w_1) dx dy + N'_{x_1} \int_0^a \int_0^b w_{0,zz} w_0 dx dy$$

$$+ q \int_0^a \int_0^b (x w_{0,zz} + w_{0,z}) w_0 dx dy = 0 \tag{4.1}$$

$$L(\quad) = D \nabla^4(\quad) + N'_{x_0}(\quad)_{,zz} \tag{4.2}$$

略去 w_0 中的高阶小量后, $L(\quad)$ 也是自伴的, 即

$$\int_0^a \int_0^b w_0 L(w_1) dx dy = \int_0^a \int_0^b w_1 L(w_0) dx dy = 0 \tag{4.3}$$

因此
$$N'_{x_1} = -q \int_0^a \int_0^b (x w_{0,zz} + w_{0,z}) w_0 dx dy / \int_0^a \int_0^b w_{0,zz} w_0 dx dy \tag{4.4}$$

将(3.22)代入(4.4)式进行计算并略去高阶小量后得

$$N'_{x_1} = -2qa/\pi \tag{4.5}$$

对于特征值问题, 一级近似即可获得满意的精度, 因此坡道路面临界热压力为

$$N'_x = N'_{x_0} + \varepsilon N'_{x_1} = D \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 \left[1 - \mu^2 \frac{a}{\sqrt{2\pi b}} \frac{\operatorname{ch} \frac{\sqrt{2\pi b}}{a} - 1}{\operatorname{sh} \frac{\sqrt{2\pi b}}{a}} \right]$$

$$- \frac{2aq}{\pi} \sin \theta \tag{4.6}$$

五、临界铺设温差

若 T_{\max} 为当地最高温度， T_0 为允许的铺设路面的最低温度，则称

$$\Delta T_{cr} = T_{\max} - T_0 \quad (5.1)$$

为临界铺设温差，它与临界压力有关。如果铺设温差大于临界铺设温差，即 $\Delta T > \Delta T_{cr}$ ，则路面板有热胀屈曲的可能；如果铺设温差小于临界温差，即 $\Delta T < \Delta T_{cr}$ ，路面板虽不发生热胀屈曲，但到冬天由于冷缩作用缩缝开裂过大，也会象胀缝那样影响路面的使用质量。因而我们也称 ΔT_{cr} 为合理铺设温差。

由于路面板无胀缝，故 $\epsilon_x = 0$ ，又因板两侧自由，故 $\sigma_y = 0$ ，所以

$$\epsilon_x = \alpha \Delta T_{cr} \cdot a - \frac{N_x a}{Et} = 0 \quad (5.2)$$

得
$$\Delta T_{cr} = N_x / \alpha Et \quad (5.3)$$

注意到在求 N_x 的摄动解时，缩缝边界已被处理成活动铰支，而实际路面缩缝处应简化为固定铰支，说明当温差达到理论“临界温差”时还可继续升温方能使路面板屈曲。作者在文[3]中提出了修正原则，在温度场作用下路面板拱起，中间缩缝的最小压应力为零（即缩缝不再闭合而开始开裂）时的温差作为临界铺设温差。这样就要在(5.3)式中乘以修正系数 k ，即

$$\Delta T_{cr} = k N_x / \alpha Et \quad (5.4)$$

根据修正原则可算得 $k = 1.13^{[6]}$ ，所以

$$\Delta T_{cr} = \frac{k}{\alpha Et} \left\{ D \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 \left[1 - \mu^2 \frac{a}{\sqrt{2\pi b}} \frac{\operatorname{ch} \frac{\sqrt{2\pi b}}{a} - 1}{\operatorname{sh} \frac{\sqrt{2\pi b}}{a}} \right] - \frac{2aq}{\pi} \sin \theta \right\} \quad (5.5)$$

一般刚性路面的各物理参数为： $\alpha = 1 \times 10^{-5} / ^\circ\text{C}$ ， $E = 2.1 \times 10^5 \times 9.8 \text{N/cm}^2$ ， $a = 10\text{m}$ ， $\mu = 0.18$ ， $t = 20\text{cm}$ ， $\gamma = 0.0024 \times 9.8 \text{N/cm}^3$ （比重）。将以上参数代入(5.5)式，可以计算出刚性坡道路面板在不同坡度和不同宽度情况下的临界铺设温差数值结果(表1)。

表 1 临界铺设温差数值结果

ΔT_{cr}	θ													
		0°	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°	50°	55°	60°
b/a														
0.1		37.8	37.5	37.3	37.1	36.9	36.7	36.5	36.3	36.1	36.0	35.8	35.7	35.5
0.2		37.8	37.6	37.3	37.1	36.9	36.7	36.5	36.3	36.1	36.0	35.8	35.7	35.6
0.3		37.8	37.6	37.4	37.2	37.0	36.7	36.5	36.4	36.2	36.0	35.9	35.7	35.6
0.4		37.9	37.7	37.4	37.2	37.0	36.8	36.6	36.4	36.2	36.1	35.9	35.8	35.6
0.5		37.9	37.7	37.5	37.3	37.0	36.8	36.6	36.4	36.3	36.1	36.0	35.8	35.7
0.6		38.0	37.8	37.5	37.3	37.1	36.9	36.7	36.5	36.3	36.1	36.0	35.9	35.7
0.7		38.0	37.8	37.6	37.3	37.1	36.9	36.7	36.5	36.4	36.2	36.0	35.9	35.8
0.8		38.1	37.8	37.6	37.4	37.2	37.0	36.8	36.6	36.4	36.2	36.1	35.9	35.8
0.9		38.1	37.9	37.6	37.4	37.2	37.0	36.8	36.6	36.4	36.3	36.1	36.0	35.8
1.0		38.1	37.9	37.7	37.4	37.2	37.0	36.8	36.6	36.4	36.3	36.1	36.0	35.9

从表1中可以看出,板宽对临界铺设温差的影响很小,当 b/a 在0.1~1.0范围内变化时,临界铺设温差的变化不超过0.4℃,符合 b 对 ΔT_{cr} 的影响只在 μ 的二次方量级中反映出来的结论。其次坡度对临界铺设温差的影响是:随着坡度的增加,临界铺设温差在减小,即坡道比水平直道更容易失稳,尤其是进行大坡度道路铺设时应当考虑这一因素。当 $\theta=0^\circ$ 时是水平直道的结果。当 $a=10\text{m}$, $b=3.5\text{m}$ 时,临界铺设温差理论解的数值是 $\Delta T_{cr}=37.9^\circ\text{C}$,而实验结果是 $^{[2]}\Delta T'_{cr}=40^\circ\text{C}$,两者相对误差为

$$R = \frac{\Delta T'_{cr} - \Delta T_{cr}}{\Delta T_{cr}} \times 100\% = 5.3\% \quad (5.6)$$

这就验证了摄动解的正确性。

六、结 论

1. 本文用摄动法研究了无胀缝坡道路而热胀屈曲问题,导出了临界铺设温差 ΔT_{cr} 的渐近表达式,这一结果统一了坡道和水平直道的关系,水平直道是坡道的特殊情况。
2. 本文给出了关于临界铺设温差的数值结果,这些数值结果为铺设无胀缝路面提供了理论参数。

致谢 作者感谢陈至达教授对本文工作的关心和帮助。

参 考 文 献

- [1] 黄保和、朱照宏,水泥混凝土路面热胀屈曲稳定性分析,同济大学学报,12(3)(1984),62—75.
- [2] 王汝鹏、陈建康,刚性路面热胀屈曲的实验分析,上海力学,12(3)(1991),55—62.
- [3] 陈建康、王汝鹏,论热弹性线问题,江苏农学院学报,11(3)(1990),55—60.
- [4] 陈建康、李龙元,两对边简支两对边自由板特征值问题的一个注记,江苏农学院学报,10(1)(1989),59—60.
- [5] Wang Ru-peng, Chen Jian-kang, et al., Photocarrrier shadow Moire and its application in stability analysis of thermal expansion buckling, *Proceedings of the International Conference on Dvanced Experimental Mechanics*, Tianjin, China (1988), c34—c38.
- [6] 陈建康,长间距胀缝水泥混凝土路面热胀屈曲研究,硕士学位论文(1988).
- [7] Timoshenko, S.P., *Theory of Elasticity*, McGraw-Hill Book Company, 443—484.

Perturbation Solution for Thermal Expansion Buckling of no Expansion Joint Slope Pavement Plate

Chen Jian-kang

(Jiangsu Agricultural College, Yangzhou)

Wang Ru-peng

(Shanghai College of Architectural and Municipal Engineering, Shanghai)

Abstract

In this paper, the mechanical mechanism of thermal expansion buckling of no expansion joint slope pavement undergoing the action of a temperature field is analysed. By using regular perturbation method, the formula of perturbation solution for this problem is derived. The relationship between critical laying temperature difference of slope pavement and of level straight pavement is studied, and the unified solution and its numerical results are also obtained. In terms of this research, rational laying temperature of no expansion joint slope pavement is given.

Key words slope road pavement plate, thermal expansion buckling, perturbation solution