应用数学和力学，第 14 卷第 3 期（1993 年 3 月） 应用数学和力学编委会编
Applied Mathematics and Mechanics 重庆出版社出版

隐式积分格式下非关联粘塑性切线刚度矩阵的对称表示*

熊 文 林

（武汉水利电力学院，1990年 9 月28日收到）

摘 要

文中建议的数值方法使可能在非关联粘塑性切线刚度程序中采用对称解法．

关键词 粘塑性 非关联 切线刚度 对称

一、引 言

文献[3]和[5]给出了非关联塑性切线刚度矩阵的对称表示公式，使可能采用对称解法求解非关联的弹塑性问题．

在荷载增量很小条件下的弹塑性静定解与弹粘塑性的稳定解是相互一致的（文献[2]）．用弹粘塑性方法求解经典的弹塑性问题往往比较经济．

当采用完全显式积分格式时，材料的刚度矩阵是不变的，故解非关联弹粘塑性问题方法上没有什么困难（文献[4]）．当采用部分或完全隐式积分格式时，材料的弹粘塑性矩阵是变化的．因为计算非对称的弹粘塑性矩阵比计算非对称的弹塑性矩阵更困难，故一般只局限于关联的情况．

本文给出了隐式积分格式下非关联粘塑性切线刚度矩阵的对称表示形式，使可能采用对称解法求解非关联的弹粘塑性问题，以达到减小所需计算机内存容量、加快收敛速度，并使计算结果比较安全可靠．

二、弹粘塑性应力应变关系

假定总应变$\boldsymbol{\varepsilon}$由弹性应变$\boldsymbol{\varepsilon}_e$和粘塑性应变$\boldsymbol{\varepsilon}_{vp}$组成，即

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{\varepsilon}_e+\boldsymbol{\varepsilon}_{vp} \tag{2.1}$$

文中正黑体字母表示向量或矩阵．

总应变速率可表示为

* 何福保推荐．1986年10月24日第一次收到．

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}=\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_e+\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{vp} \tag{2.2}$$

应力变化速率与弹性应变速率的关系为

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}=\mathbf{D}_e\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_e \tag{2.3}$$

$\mathbf{D}_e$为弹性矩阵。

广泛采用的粘塑性流动规律的简单形式为

$$\left.\begin{aligned}&\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{vp}=\gamma\phi(F)\frac{\partial Q}{\partial\boldsymbol{\sigma}} \quad (\text{当}F>0)\\&\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{vp}=0 \quad (\text{当}F\leqslant 0)\end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

其中 γ是流动参数，F是屈服函数，Q是塑性势，$\phi(F)$是正的单调增函数，其最常用的两种形式是

$$\left.\begin{aligned}&\phi(F)=\exp\left[M\left(\frac{F}{F_0}\right)\right]-1\\&\frac{d\phi}{dF}=\frac{M}{F_0}\exp\left[M\left(\frac{F}{F_0}\right)\right]\end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

和

$$\left.\begin{aligned}&\phi(F)=\left(\frac{F}{F_0}\right)^N\\&\frac{d\phi}{dF}=\frac{N}{F_0}\left(\frac{F}{F_0}\right)^{N-1}\end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

式中 M和N是任意给定的常数，F_0是为了把ϕ化为无量纲数引入的参数，根据所采用的屈服条件，可取单轴屈服应力或等效屈服应力（见文献[2]）。

采用隐式积分格式时，发生在时段$\Delta t_n=t_{n+1}-t_n$的粘塑性应变增量$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^n_{vp}$可由下式确定

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^n_{vp}=\Delta t_n[(1-\Theta)\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^n_{vp}+\Theta\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{n+1}_{vp}] \tag{2.7}$$

或

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^n_{vp}=\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^n_{vp}\Delta t_n+\Theta\Delta t_n(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{n+1}_{vp}-\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^n_{vp}) \tag{2.7'}$$

当$\Theta=0$时，得“完全显式”（或前差法）；当$\Theta=1$时，得“完全隐式”（或后差法）。

(2.7)式中的$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{n+1}_{vp}$由台劳系列展式得

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{n+1}_{vp}=\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^n_{vp}+\mathbf{H}^n\Delta\boldsymbol{\sigma}^n \tag{2.8}$$

其中

$$\mathbf{H}^n=\left(\frac{\partial\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^T_{vp}}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\right)^n \tag{2.9}$$

以(2.8)式代入(2.7)式，得

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^n_{vp}=\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^n_{vp}\Delta t_n+\mathbf{C}^n_{vp}\Delta\boldsymbol{\sigma} \tag{2.10}$$

式中

$$\mathbf{C}^n_{vp}=\Theta\Delta t_n\mathbf{H}^n \tag{2.11}$$

是粘塑性依从矩阵。

由(2.3)式，得应力增量为

$$\Delta\boldsymbol{\sigma}^n=\mathbf{D}_e\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^n_e=\mathbf{D}_e(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^n-\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^n_{vp}) \tag{2.12}$$

总应变增量$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^n$与位移增量$\Delta\mathbf{u}^n$的关系为

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^n=\mathbf{B}^n\Delta\mathbf{u}^n \tag{2.13}$$

其中 $\mathbf{B}^n$为应变矩阵。

以(2.10)式代入(2.12)式，得

$$\mathbf{C}^{n}_{evp}\Delta\boldsymbol{\sigma}^{n}=\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{n}-\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{n}_{vp}\Delta t_{n} \tag{2.14}$$

式中

$$\mathbf{C}^{n}_{evp}=\mathbf{C}_{e}+\mathbf{C}^{n}_{vp}=\mathbf{D}_{e}^{-1}+\mathbf{C}^{n}_{vp} \tag{2.15}$$

是弹粘塑性依从矩阵；$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{n}_{vp}\Delta t_{n}$是初始应变.

由(2.13)和(2.14)式，得

$$\Delta\boldsymbol{\sigma}^{n}=\hat{\mathbf{D}}^{n}(\mathbf{B}^{n}\Delta\mathbf{u}^{n}-\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{n}_{vp}\Delta t_{n}) \tag{2.16}$$

其中

$$\hat{\mathbf{D}}^{n}=(\mathbf{C}^{n}_{evp})^{-1}=(\mathbf{D}_{e}^{-1}+\mathbf{C}^{n}_{vp})^{-1} \tag{2.17}$$

是弹粘塑性矩阵。

任意时刻t_n必须满足的平衡方程为

$$\int[\mathbf{B}^{n}]^{T}\boldsymbol{\sigma}^{n}dV-\mathbf{f}^{n}=0 \tag{2.18}$$

这里$\mathbf{f}^n$是由于外荷载引起的等效节点力．在时段Δt_n内，平衡方程可写成增量的形式，即

$$\int[\mathbf{B}^{n}]^{T}\Delta\boldsymbol{\sigma}^{n}dV-\Delta\mathbf{f}^{n}=0 \tag{2.19}$$

以(2.16)式代入(2.19)式，得

$$\mathbf{K}^{n}_{T}\Delta\mathbf{u}^{n}=\Delta\mathbf{V}^{n} \tag{2.20}$$

式中

$$\mathbf{K}^{n}_{T}=\int[\mathbf{B}^{n}]^{T}\hat{\mathbf{D}}^{n}\mathbf{B}^{n}dV \tag{2.21}$$

是材料的切线刚度矩阵；

$$\Delta\mathbf{V}^{n}=\int[\mathbf{B}^{n}]^{T}\hat{\mathbf{D}}^{n}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{n}_{vp}\Delta t_{n}dV+\Delta\mathbf{f}^{n} \tag{2.22}$$

是由初应变及外荷载引起的等效节点力。

为了书写简单，引用符号$\mathbf{a}_f$和$\mathbf{a}_q$分别表示向量$\dfrac{\partial F}{\partial\boldsymbol{\sigma}}$和$\dfrac{\partial Q}{\partial\boldsymbol{\sigma}}$．

由(2.4)和(2.9)式，得

$$\mathbf{H}_{as}=\gamma\left[\phi\frac{\partial\mathbf{a}_{q}^{T}}{\partial\boldsymbol{\sigma}}+\frac{d\phi}{dF}\mathbf{a}_{f}\mathbf{a}_{q}^{T}\right] \tag{2.23}$$

在非关联（即$Q\neq F$）的情况下，(2.23)式表示的$\mathbf{H}_{as}$矩阵是非对称的，故包含$\mathbf{H}_{as}$矩阵的所有矩阵

$$\begin{aligned}
&\mathbf{C}^{as}_{vp}=\Theta\Delta t_{n}\mathbf{H}_{as}=\Theta\Delta t_{n}\gamma\left[\phi\frac{\partial\mathbf{a}_{q}^{T}}{\partial\boldsymbol{\sigma}}+\frac{d\phi}{dF}\mathbf{a}_{f}\mathbf{a}_{q}^{T}\right]\\
&\hat{\mathbf{D}}^{as}_{evp}=(\mathbf{D}_{e}^{-1}+\mathbf{C}^{as}_{vp})^{-1}\\
&\mathbf{K}^{as}_{evp}=\int[\mathbf{B}]^{T}\hat{\mathbf{D}}^{as}_{evp}\mathbf{B}dV
\end{aligned} \tag{2.24}$$

也都是非对称的。

三、非关联粘塑性切线刚度矩阵的对称表示

以(2.23)式代入(2.10)式，得

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{n}_{vp}=\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{n}_{vp}\Delta t_{n}+\Theta\Delta t_{n}\gamma\left[\phi\frac{\partial\mathbf{a}_{q}^{T}}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\Delta\boldsymbol{\sigma}+\frac{d\phi}{dF}\mathbf{a}_{f}\mathbf{a}_{q}\Delta\boldsymbol{\sigma}\right] \tag{3.1}$$

以数值$\mathbf{a}_f^T\Delta\boldsymbol{\sigma}$同时乘以和除以(3.1)式的最后一项，得

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{n}_{vp}=\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{n}_{vp}\Delta t_n+\Theta\Delta t_n\mathbf{H}_s\Delta\boldsymbol{\sigma} \tag{3.2}$$

式中 $$\mathbf{H}_s=\gamma\left[\phi\frac{\partial\mathbf{a}_q^T}{\partial\boldsymbol{\sigma}}+K_1\frac{d\phi}{dF}\mathbf{a}_f\mathbf{a}_f^T\right] \tag{3.3}$$

其中 $$K_1=\frac{\mathbf{a}_q^T\Delta\boldsymbol{\sigma}}{\mathbf{a}_f^T\Delta\boldsymbol{\sigma}} \tag{3.4}$$

(3.3)式所表示的$\mathbf{H}_s$矩阵是对称的，因此，下列矩阵

$$\begin{aligned}&\mathbf{C}^s_{vp}=\Theta\Delta t_n\mathbf{H}_s\\&\hat{\mathbf{D}}^s_{evp}=(\mathbf{D}_e^{-1}+\mathbf{C}^s_{vp})^{-1}\\&\mathbf{K}^s_{evp}=\int[B]^T\hat{\mathbf{D}}^s_{evp}\mathbf{B}dV\end{aligned} \tag{3.5}$$

也都是对称的。

对于同时使N个屈服函数$F_1>0$，$F_2>0$，…，$F_N>0$和相应的N个塑性势Q_1，Q_2，…，Q_N及N个流动参数γ_1，γ_2，…，γ_N的情况，一般假定粘塑性应变速率满足向量合成法则，即

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{vp}&=\gamma_1\phi_1(F_1)\frac{\partial Q_1}{\partial\boldsymbol{\sigma}}+\cdots+\gamma_N\phi_N(F_N)\frac{\partial Q_N}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\\&=\sum_{i=1}^{N}\gamma_i\phi_i(F_i)\frac{\partial Q_i}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\end{aligned} \tag{3.6}$$

用上述同样的方法，不难得出

$$\mathbf{H}_s=\sum_{i=1}^{N}\gamma_i\left[\phi_i\frac{\partial\mathbf{a}_{qi}^T}{\partial\boldsymbol{\sigma}}+K_i\frac{d\phi_i}{dF_i}\mathbf{a}_{fi}\mathbf{a}_{fi}^T\right] \tag{3.7}$$

其中

$$K_i=\frac{\mathbf{a}_{qi}^T\Delta\boldsymbol{\sigma}}{\mathbf{a}_{fi}^T\Delta\boldsymbol{\sigma}}$$

(3.5) 式就是所建议的隐式积分格式下非关联粘塑性切线刚度矩阵的对称表示形式。计算对称弹粘塑性刚度矩阵$\mathbf{K}^s_{evp}$所需要的应力增量$\Delta\sigma$可由上一时步的计算结果获得。

(3.5) 式是普遍的形式。具体应用时可根据所采用的屈服准则和塑性势函数表示为更方便的形式。

选用适当的屈服准则和塑性势函数是很重要的。某些适用于粘性土和裂隙岩体的塑性势函数可参阅文献[1]和[4]。

本文主要是讨论非关联粘塑性的计算方法，而不是塑性势本身，故暂以莫尔-库伦屈服准则为例。屈服函数为

$$F=\sigma_m\sin\varphi+\sqrt{J_2}\left(\cos\theta-\frac{\sin\theta\sin\varphi}{\sqrt{3}}\right)-C\cos\varphi \tag{3.8}$$

塑性势函数简单取为

$$Q=\sigma_m\sin\psi+\sqrt{J_2}\left(\cos\theta-\frac{\sin\theta\sin\psi}{\sqrt{3}}\right)=\text{常数} \tag{3.9}$$

上两式中

σ_m 是平均应力，$\sigma_m=\sigma_{ii}/3$；

J_2是应力偏量的第二不变量，$J_2=S_{ij}S_{ij}/2$；

θ是罗得角，$-\frac{\pi}{6}\leqslant\theta=\frac{1}{3}\sin^{-1}\left(-\frac{3\sqrt{3}J_3}{2\sqrt{J_2^3}}\right)\leqslant\frac{\pi}{6}$；

C和φ相应为粘着力和摩擦角；

ψ是用以描述塑性势函数的角，一般小于φ；

S_{ij}是应力偏量，$S_{ij}=\sigma_{ij}-\delta_{ij}\sigma_m$；

其中
$$\delta_{ij}=\begin{cases}1 & (\text{当}i=j)\\ 0 & (\text{当}i\neq j);\end{cases}$$

J_3是应力偏量的第三不变量，$J_3=S_{ij}S_{jk}S_{ki}/3$。

对于三维分析，有

$$(\boldsymbol{\sigma})^T=[\sigma_x\quad\sigma_y\quad\sigma_z\quad\tau_{yz}\quad\tau_{zx}\quad\tau_{xy}]\tag{3.10}$$

和
$$(\boldsymbol{\varepsilon})^T=[\varepsilon_x\quad\varepsilon_y\quad\varepsilon_z\quad\gamma_{zy}\quad\gamma_{zx}\quad\gamma_{xy}]\tag{3.11}$$

由(3.8)式，得

$$\mathbf{a}_f=\frac{\partial F}{\partial\boldsymbol{\sigma}}=C_1\frac{\partial\sigma_m}{\partial\boldsymbol{\sigma}}+C_2\frac{\partial(\sqrt{J_2})}{\partial\boldsymbol{\sigma}}+C_3\frac{\partial J_3}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\tag{3.12}$$

式中
$$\frac{\partial\sigma_m}{\partial\boldsymbol{\sigma}}=\left[\frac{1}{3}\quad\frac{1}{3}\quad\frac{1}{3}\quad 0\quad 0\quad 0\right]^T\tag{3.13}$$

$$\frac{\partial(\sqrt{J_2})}{\partial\boldsymbol{\sigma}}=\frac{1}{2\sqrt{J_2}}[S_x\quad S_y\quad S_z\quad 2\tau_{yz}\quad 2\tau_{zx}\quad 2\tau_{xy}]^T\tag{3.14}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial J_3}{\partial\boldsymbol{\sigma}}=\Big[&\frac{J_2}{3}+S_yS_z-\tau_{yz}^2\quad\frac{J_2}{3}+S_zS_x-\tau_{zx}^2\quad\frac{J_2}{3}+S_xS_y-\tau_{xy}^2\\ &2(\tau_{xy}\tau_{zx}-S_x\tau_{yz})\quad 2(\tau_{yz}\tau_{xy}-S_y\tau_{zx})\quad 2(\tau_{zx}\tau_{yz}-S_z\tau_{xy})\Big]^T\end{aligned}\tag{3.15}$$

$$\begin{aligned}&C_1=\sin\varphi\\ &C_2=\tan3\theta\left(\sin\theta+\frac{\sin\varphi\cos\theta}{\sqrt{3}}\right)+\left(\cos\theta-\frac{\sin\varphi\sin\theta}{\sqrt{3}}\right)\\ &C_3=\frac{\sqrt{3}\sin\theta+\sin\varphi\cos\theta}{2J_2\cos3\theta}\end{aligned}\tag{3.16}$$

对于奇异点($|\theta|>29.9°$)，C_1，C_2和C_3可按下式计算

$$\begin{aligned}&C_1=\sin\varphi\\ &C_2=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(1\mp\frac{\sin\varphi}{3}\right)\left(\begin{matrix}\text{当}\theta>29.9°\text{时，取负号}\\ \text{当}\theta<-29.9°\text{时，取正号}\end{matrix}\right)\\ &C_3=0\end{aligned}\tag{3.17}$$

由(3.9)式，得

$$\mathbf{a}_q=\frac{\partial Q}{\partial\boldsymbol{\sigma}}=B_1\frac{\partial\sigma_m}{\partial\boldsymbol{\sigma}}+B_2\frac{\partial(\sqrt{J_2})}{\partial\boldsymbol{\sigma}}+B_3\frac{\partial J_3}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\tag{3.18}$$

其中 B_1，B_2和B_3可同样利用(3.16)或(3.17)式计算，只是用ψ代替φ即可。

由(3.18)式，得

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathbf{a}_q^T}{\partial\boldsymbol{\sigma}}=&\frac{\partial B_2}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\left[\frac{\partial(\sqrt{J_2})}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\right]^T+B_2\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\left(\left[\frac{\partial(\sqrt{J_2})}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\right]^T\right)\\ &+\frac{\partial B_3}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\left(\frac{\partial J_3}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\right)^T+B_3\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\left[\left(\frac{\partial J_3}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\right)^T\right]\end{aligned}\tag{3.19}$$

由(3.5)及(3.14)到(3.19)式，得

$$\mathbf{C}^{5}_{vp}=\alpha_1\mathbf{m}_1+\alpha_2\mathbf{m}_2+\alpha_3\mathbf{m}_3+\alpha_4\mathbf{m}_4+\alpha_5\mathbf{m}_5+\alpha_6\mathbf{m}_6 \tag{3.20}$$

式中

$$\mathbf{m}_1=\begin{bmatrix} 2 & & & \text{对} & & \\ -1 & 2 & & & & \\ 0 & -1 & 2 & & \text{称} & \\ 0 & 0 & 0 & 6 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \tag{3.21}$$

$$\mathbf{m}_2=\left[\frac{\partial(\sqrt{J_2})}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\right]\left[\frac{\partial(\sqrt{J_2})}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\right]^T \tag{3.22}$$

$$\mathbf{m}_3=\begin{bmatrix} S_x & & & \text{对} & & \\ S_z & S_y & & & & \\ S_y & S_x & S_z & & \text{称} & \\ -2\tau_{yz} & \tau_{yz} & \tau_{yz} & -3S_x & & \\ \tau_{zx} & -2\tau_{zx} & \tau_{zx} & 3\tau_{xy} & -3S_y & \\ \tau_{xy} & \tau_{xy} & -2\tau_{xy} & 3\tau_{zx} & 3\tau_{yz} & -3S_z \end{bmatrix} \tag{3.23}$$

$$\mathbf{m}_4=\left(\frac{\partial J_3}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\right)\left(\frac{\partial J_3}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\right)^T \tag{3.24}$$

$$\mathbf{m}_5=\frac{\partial(\sqrt{J_2})}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\left(\frac{\partial J_3}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\right)^T+\frac{\partial J_3}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\left[\frac{\partial(\sqrt{J_2})}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\right]^T \tag{3.25}$$

$$\mathbf{m}_6=\mathbf{a}_f\mathbf{a}_f^T \tag{3.26}$$

$$\alpha_1=\frac{\Theta\Delta t_n\gamma\phi B_2}{6\sqrt{J_2}} \tag{3.27}$$

$$\alpha_2=-\frac{\Theta\Delta t_n\gamma\phi}{\sqrt{J_2}(\cos3\theta)^2}\left[3B_2-2\left(\cos\theta-\frac{\sin\psi\sin\theta}{\sqrt{3}}\right)\right] \tag{3.28}$$

$$\alpha_3=\frac{2}{3}\Theta\Delta t_n\gamma\phi B_3 \tag{3.29}$$

$$\alpha_4=-\frac{3\Theta\Delta t_n\gamma\phi}{4(\sqrt{J_2})^5(\cos\theta)^2}\left[3B_2-2\left(\cos\theta-\frac{\sin\psi\sin\theta}{\sqrt{3}}\right)\right] \tag{3.30}$$

$$\alpha_5=-\frac{2\Theta\Delta t_n\gamma\phi}{\sqrt{J_2}(\cos3\theta)^2}\left[(1.5+\cos\theta\cos3\theta)B_3+\frac{\sin\psi(\sin^2\theta-0.75)}{J_2}\right] \tag{3.31}$$

$$\alpha_6=\Theta\Delta t_n\gamma K_1\frac{d\phi}{dF} \tag{3.32}$$

对于奇异点，有

$$\alpha_1=\frac{\Theta\Delta t_n\gamma\phi B_2}{6\sqrt{J_2}} \tag{3.33}$$

$$\alpha_2=-\frac{\Theta\Delta t_n\gamma\phi B_2}{\sqrt{J_2}} \tag{3.34}$$

$$\alpha_6=\Theta\Delta t_n\gamma K_1\frac{d\phi}{dF} \tag{3.35}$$

α_3，α_4 和 α_5 都为零。

参 考 文 献

[1] Naylor, D. J. and G. N. Pande, *Finite Elements in Geotechnical Engineering*, Pineridge Press, Swansea, U. K. (1981).

[2] Owen, D. R.J. and E. Hinton, *Finite Elements in Plasticity, Theory and Practice*, Pineridge Press, Swansea, U. K. (1980).

[3] Pande, G. N. and St. Pietruszczak, Symmetric tangential stiffness formulation for nonassociated plasticity, C/R/405, the University College of Swansea, U.K. (1982).

[4] Pande, G. N. and W. Xiong, An improved multi-laminate model of jointed rock masses, *Numerical Models in Geomechanics*, A.A. Bal KEMA/ROTTERDAM (1982), 218—226.

[5] 熊文林，非关联塑性切线刚度矩阵的对称表示，应用数学和力学，7(11) (1986)，983—992.

Symmetric Formulation of Tangential Stiffnesses for Non-Associated Visco-Plasticity with an Implicit Time Integration Scheme

Xiong Wen-lin

(*Wuhan University of Hydraulic and Electric Engineering, Wuhan*)

Abstract

A numerical scheme is presented which enables the use of symmetric equation solvers in tangential stiffness programs for non-associated visco-plastic materials.

Key wovds visco-plasticity, non-associated, tangential stiffnesses, symmetric