

任意载荷作用下矩形弹性薄板横向 弯曲的一个高精度近似解*

周 叮

(华东工学院, 1989 年 4 月 3 日收到)

摘 要

李兹法是近似求解弹性薄板横向弯曲的一种广泛使用的有效方法, 其精度完全取决于基函数的选择。本文根据矩形薄板横向弯曲的特点, 将基函数选择为正弦三角级数与多项式函数的叠加, 不但公式简单易程序化, 而且有着很高的精度。本文最后给出了两个算例, 并与经典结果进行了比较。

关键词 矩形板 弯曲 小挠度

一、引 言

矩形薄板横向弯曲的经典解法早为人们所知^[1], Timoshenko^[2] 曾给出了用双曲函数及三角级数求解矩形薄板横向弯曲的许多计算结果, 近年来, 经典方法又得到了进一步的推广和发展^[3~5]。与此同时, 许多学者仍在继续探索计算矩形薄板横向弯曲的各种近似解法^[6~9]。李兹法是近似求解弹性薄板横向弯曲的一种广泛使用的有效方法, 其精度完全取决于基函数的选择, 本文将矩形薄板的基函数选择为正弦三角级数与多项式函数的叠加, 计算结果令人满意。

二、数 学 模 型

考虑如图 1 所示的矩形弹性薄板, 由板的弯曲理论可知, 其横向弯曲的泛函为^[10]

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a D(x, y) \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\mu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right. \right. \\ & \left. \left. - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy - \int_0^b \int_0^a q(x, y) w dx dy \end{aligned} \quad (2.1)$$

式中 $w(x, y)$ 为矩形薄板的横向位移, x, y 为沿矩形薄板两相邻边的直角坐标, a, b 分别为矩形薄板的长度和宽度, $D(x, y)$ 为薄板的弯曲刚度, μ 为泊松比, $q(x, y)$ 为作用于薄板上

* 华东工学院科研发展基金支持。
薛大为推荐。

的外力。

设矩形薄板的横向位移为

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} X_m(x) Y_n(y) \quad (2.2)$$

式中 A_{mn} 为待定常数, $X_m(x)$, $Y_n(y)$ 为矩形薄板横向弯曲的基函数。

由泛函的极值条件

$$\delta \Pi = 0 \quad (2.3)$$

可得线性方程组

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn}^{(ij)} A_{mn} = Q_{ij} \quad \left(\begin{array}{l} i=1, 2, \dots, \infty \\ j=1, 2, \dots, \infty \end{array} \right) \quad (2.4)$$

式中

$$C_{mn}^{(ij)} = \int_0^b \int_0^a D(x, y) \left[\nabla^2 (X_m Y_n) \nabla^2 (X_i Y_j) - (1-\mu) \left(\frac{d^2 X_m}{dx^2} X_i \frac{d^2 Y_n}{dy^2} Y_j + \frac{d^2 X_i}{dx^2} X_m Y_j \frac{d^2 Y_n}{dy^2} - 2 \frac{dX_i}{dx} \frac{dX_m}{dx} \frac{dY_j}{dy} \frac{dY_n}{dy} \right) \right] dx dy \quad (2.5)$$

$$Q_{ij} = \int_0^b \int_0^a q(x, y) X_i Y_j dx dy \quad (2.6)$$

$$\text{其中 } \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

三、基函数的选择

(2.4)式解的精度完全取决于基函数的选择。令

$$\xi = \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{y}{b} \quad (3.1)$$

考虑到矩形薄板横向弯曲的特点, 本文将基函数选择为

$$\left. \begin{array}{l} X_m(\xi) = \sin m\pi\xi + C_{m0} + C_{m1}\xi + C_{m2}\xi^2 + C_{m3}\xi^3 \quad (m=1, 2, \dots) \\ Y_n(\eta) = \sin n\pi\eta + D_{n0} + D_{n1}\eta + D_{n2}\eta^2 + D_{n3}\eta^3 \quad (n=1, 2, \dots) \end{array} \right\} \quad (3.2)$$

式中 C_{mi} , D_{ni} ($i=0, 1, 2, 3$) 为待定常数。

由薄板弯曲理论可知, 矩形薄板每边各可提两个边界条件, 由此可求出 C_{mi} , D_{ni} ($i=0, 1, 2, 3$)。以 $X_m(\xi)$ 为例, 若 $x=0$, $x=a$ 固支, 有

$$\left. \begin{array}{l} C_{m0} = 0, \quad C_{m1} = -m\pi \\ C_{m2} = m\pi [2 + (-1)^m], \quad C_{m3} = -m\pi [1 + (-1)^m] \end{array} \right\} \quad (3.3)$$

若 $x=0$ 简支, $x=a$ 固支, 有

$$\left. \begin{array}{l} C_{m0} = C_{m2} = 0 \\ C_{m1} = \frac{m\pi}{2} (-1)^m, \quad C_{m3} = -\frac{m\pi}{2} (-1)^m \end{array} \right| \quad (3.4)$$

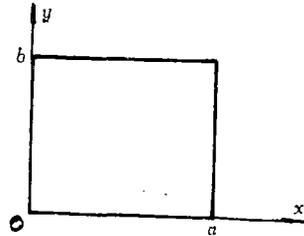


图1 任意载荷作用下的矩形薄板

若 $x=0$, $x=a$ 简支, 有

$$C_{m0} = C_{m1} = C_{m2} = C_{m3} = 0 \quad (3.5)$$

类似地可求得其它各种支承情况下的 C_{mi} , D_{mi} ($i=0, 1, 2, 3$), 这里就不一一列举了.

由以上分析可知, 对于本文所选择的基函数, 不同的边界条件对应着不同的多项式系数, C_{mi} , D_{mi} ($i=0, 1, 2, 3$), 而基函数的形式是不变的.

对于等厚度矩形板, 利用下列积分

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sin m\pi\xi d\xi &= \frac{1}{m\pi} [1 - (-1)^m], \quad \int_0^1 \cos m\pi\xi d\xi = 0, \\ \int_0^1 \xi \sin m\pi\xi d\xi &= -\frac{(-1)^m}{m\pi}, \quad \int_0^1 \xi \cos m\pi\xi d\xi = \frac{1}{m^2\pi^2} [(-1)^m - 1], \\ \int_0^1 \xi^2 \sin m\pi\xi d\xi &= -\frac{2}{m\pi} (-1)^m + \frac{2}{m^3\pi^3} [(-1)^m - 1], \\ \int_0^1 \xi^2 \cos m\pi\xi d\xi &= \frac{2}{m^2\pi^2} [(-1)^m - 1], \\ \int_0^1 \xi^3 \sin m\pi\xi d\xi &= -\frac{(-1)^m}{m\pi} + \frac{6}{m^3\pi^3} [(-1)^m - 1], \quad \int_0^1 \xi^m d\xi = \frac{1}{m+1}. \end{aligned}$$

由(2.5)式, 很容易解析求出 $C_{m_n}^{(j)}$ 而无需数值积分, 截断取 $m, n, i, j=1, 2, \dots, N$, 由(2.4)式可解得系数 A_{mn} ($m, n=1, 2, \dots, N$), 截断阶数 N 的大小取决于对精度的要求.

四、数 例

现以三边简支一边固支 ($x=a$) 承受均布载荷及静水压力载荷的矩形薄板为例, 说明本文方法的精度, 同时列出经典结果以作比较, 计算时取 $N=5$.

由上面的计算可知

$$\begin{aligned} C_{m0} = C_{m2} = 0, \quad C_{m1} = -C_{m3} &= \frac{m\pi}{2} (-1)^m \quad (m=1, 2, 3, \dots, N) \\ D_{n0} = D_{n2} = 0, \quad D_{n1} = -D_{n3} &= 0 \quad (n=1, 2, 3, \dots, N) \\ \int_0^1 X_m(\xi) X_i(\xi) d\xi &= \frac{1}{2} \delta(m-i) - \frac{6}{\pi^3} \left[\frac{(-1)^m}{m^3} C_{i1} + \frac{(-1)^i}{i^3} C_{m1} \right] \\ &+ \frac{8}{105} C_{m1} C_{i1}, \\ \int_0^1 X'_m(\xi) X'_i(\xi) d\xi &= \frac{1}{2} m_i \pi^2 \delta(m-i) - \frac{6}{\pi} \left[\frac{(-1)^m}{m} C_{i1} + \frac{(-1)^i}{i} C_{m1} \right] \\ &+ \frac{4}{5} C_{m1} C_{i1}, \\ \int_0^1 X''_m(\xi) X_i(\xi) d\xi &= \int_0^1 X''_i(\xi) X_m(\xi) d\xi = -\int_0^1 X'_m(\xi) X'_i(\xi) d\xi, \\ \int_0^1 X''_m(\xi) X''_i(\xi) d\xi &= \frac{1}{2} m^2 i^2 \pi^4 \delta(m-i) - 6\pi [m(-1)^m C_{i1} + i(-1)^i C_{m1}] + 12 C_{m1} C_{i1}, \end{aligned}$$

$$\int_0^1 Y_n(\eta)Y_j(\eta)d\eta = \frac{1}{2}\delta(n-j), \quad \int_0^1 Y'_n(\eta)Y'_j(\eta)d\eta = \frac{1}{2}nj\pi^2\delta(n-j),$$

$$\int_0^1 Y''_n(\eta)Y_j(\eta)d\eta = \int_0^1 Y''_j(\eta)Y_n(\eta)d\eta = -\frac{1}{2}nj\pi^2\delta(n-j),$$

$$\int_0^1 Y''_n(\eta)Y''_j(\eta)d\eta = \frac{1}{2}n^2j^2\pi^4\delta(n-j)$$

$$\text{其中 } \delta(i-j) = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ 1 & (i = j) \end{cases}.$$

若矩形板承受均布载荷 q , 有

$$Q_{i,j} = \frac{abq}{ij\pi^4} \left[1 - (-1)^i + \frac{i^2\pi^2}{8}(-1)^i \right] [1 - (-1)^j]$$

若矩形板承受静水压力载荷 q_0x/a , 有

$$Q_{i,j} = abq_0 \frac{(-1)^i}{j\pi} \left(\frac{i\pi}{15} - \frac{1}{i\pi} \right) [1 - (-1)^j]$$

表1 三边简支一边固支承受均布载荷 q 的矩形薄板中点的挠度及弯矩($\mu=0.3$, 经典解取自[2])

| a/b | 解法 | $(w)_{x=\frac{a}{2}, y=\frac{b}{2}}$ | $(M_x)_{x=\frac{a}{2}, y=\frac{b}{2}}$ | $(M_y)_{x=\frac{a}{2}, y=\frac{b}{2}}$ |
|-------|----------|--------------------------------------|--|--|
| 2 | 本文 经典 | 0.00928 qb^4/D | 0.0481 qb^2 | 0.0947 qb^2 |
| | | 0.0093 qb^4/D | 0.047 qb^2 | 0.094 qb^2 |
| 1.5 | 本文 经典 | 0.00644 qb^4/D | 0.0486 qb^2 | 0.0695 qb^2 |
| | | 0.0064 qb^4/D | 0.048 qb^2 | 0.069 qb^2 |
| 1.4 | 本文 经典 | 0.00576 qb^4/D | 0.0478 qb^2 | 0.0631 qb^2 |
| | | 0.0058 qb^4/D | 0.047 qb^2 | 0.063 qb^2 |
| 1.3 | 本文 经典 | 0.00501 qb^4/D | 0.0465 qb^2 | 0.0561 qb^2 |
| | | 0.0050 qb^4/D | 0.045 qb^2 | 0.056 qb^2 |
| 1.2 | 本文 经典 | 0.00427 qb^4/D | 0.0449 qb^2 | 0.0490 qb^2 |
| | | 0.0043 qb^4/D | 0.044 qb^2 | 0.049 qb^2 |
| 1.1 | 本文 经典 | 0.00351 qb^4/D | 0.0425 qb^2 | 0.0415 qb^2 |
| | | 0.0035 qb^4/D | 0.042 qb^2 | 0.041 qb^2 |
| 1.0 | 本文 经典 | 0.00279 qa^4/D | 0.0395 qa^2 | 0.0342 qa^2 |
| | | 0.0028 qa^4/D | 0.039 qa^2 | 0.034 qa^2 |
| 1/1.1 | 本文 经典 | 0.00317 qa^4/D | 0.0436 qa^2 | 0.0335 qa^2 |
| | | 0.0032 qa^4/D | 0.043 qa^2 | 0.033 qa^2 |
| 1/1.2 | 本文 经典 | 0.00350 qa^4/D | 0.0473 qa^2 | 0.0325 qa^2 |
| | | 0.0035 qa^4/D | 0.047 qa^2 | 0.032 qa^2 |
| 1/1.3 | 本文 经典 | 0.00380 qa^4/D | 0.0502 qa^2 | 0.0314 qa^2 |
| | | 0.0038 qa^4/D | 0.050 qa^2 | 0.031 qa^2 |
| 1/1.4 | 本文 经典 | 0.00404 qa^4/D | 0.0526 qa^2 | 0.0302 qa^2 |
| | | 0.0040 qa^4/D | 0.052 qa^2 | 0.030 qa^2 |
| 1/1.5 | 本文 经典 | 0.00424 qa^4/D | 0.0547 qa^2 | 0.0290 qa^2 |
| | | 0.0042 qa^4/D | 0.054 qa^2 | 0.028 qa^2 |
| 0.5 | 本文 经典 | 0.00489 qa^4/D | 0.0606 qa^2 | 0.0243 qa^2 |
| | | 0.0049 qa^4/D | 0.060 qa^2 | 0.023 qa^2 |

表2 三边简支一边固承受静水压力载荷 $q_0 x/a$ 的矩形薄板中点的挠度及弯矩($\mu=0.3$, 经典解取自[2])

| a/b | 解法 | $(w)_x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{2}$ | $(M_x)_x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{2}$ | $(M_y)_x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{2}$ |
|-------|------|--|--|--|
| 2 | 本文经典 | $0.00447q_0b^4/D$ $0.0045q_0b^4/D$ | $0.0242q_0b^2$ $0.024q_0b^2$ | $0.0459q_0b^2$ $0.046q_0b^2$ |
| 1.5 | 本文经典 | $0.00304q_0b^4/D$ $0.0030q_0b^4/D$ | $0.0241q_0b^2$ $0.028q_0b^2$ | $0.0331q_0b^2$ $0.034q_0b^2$ |
| 1.0 | 本文经典 | $0.00129q_0a^4/D$ $0.0013q_0a^4/D$ | $0.0190q_0a^2$ $0.019q_0a^2$ | $0.0160q_0a^2$ $0.016q_0a^2$ |
| 2/3 | 本文经典 | $0.00193q_0a^4/D$ $0.0019q_0a^4/D$ | $0.0259q_0a^2$ $0.026q_0a^2$ | $0.0134q_0a^2$ $0.013q_0a^2$ |
| 0.5 | 本文经典 | $0.00221q_0a^4/D$ $0.0023q_0a^4/D$ | $0.0285q_0a^2$ $0.029q_0a^2$ | $0.0113q_0a^2$ $0.011q_0a^2$ |

五、结 束 语

本文将矩形薄板的基函数选择为正弦三角级数与多项式函数的叠加，其本质是以正弦三角级数作基函数的主解，而以多项式函数作为辅助解对主解进行修正，以保证基函数满足边界条件。必须指出的是，基函数的主解并非仅限于正弦三角级数，也可选择其它的Nany级数作主解，但选择正弦三角级数将使得计算最为简单。

从以上计算结果可看出，本文方法具有计算简单、易程序化及精度高的特点，计算时仅取5阶基函数便可保证两位数以上的精度。

参 考 文 献

- [1] 张福范, 《弹性薄板》, 科学出版社(1963).
- [2] Timoshenko, S., et al. 《板壳理论》, 科学出版社(1977).
- [3] 张福范, 两相邻边固定两相邻边自由的矩形板, 固体力学学报, (4)(1981).
- [4] 张福范, 均布载荷作用下的悬臂矩形板的弯曲, 应用数学和力学, 1(3)(1980), 349—362.
- [5] 黄炎、杨原英, 正交异性矩形板弯曲问题的解析解, 上海力学, (1)(1986).
- [6] 王磊、李家金, 矩形薄板的近似解法——康托洛维奇—伽辽金法, 应用数学和力学, 7(1)(1986).
- [7] 王磊, 弹性薄板的样条梁函数解法, 应用数学和力学, 7(8)(1986).
- [8] 许永林、唐锦春, 域外奇点法格林公式法解板弯曲问题, 计算结构力学及其应用, (2)(1986).
- [9] 谢秀松, 康托洛维奇—加权残数法, 计算结构力学及其应用, (1)(1985).
- [10] 钱伟长, 《变分法与有限元》(上册), 科学出版社(1980).

An Approximate Solution with High Accuracy of Transverse Bending of Thin Rectangular Plates under Arbitrarily Distributed Loads

Zhou Ding

(*East China Institute of Technology, Nanjing*)

Abstract

Ritz method is an effective way widely used to analyze the transverse bending of thin rectangular plates. Its accuracy completely depends on the basis functions selected. This paper selects the superposition of sine series with polynomials as the basis functions of thin rectangular plates. The calculating formulae are not only simple and easily programmed, but also have high accuracy. Finally, two numerical results are given and compared with those obtained by the classical method.

Key words rectangular plate, bending, small deflection.