

# 二阶非牛顿流体环管流动解析解

朱文辉 刘慈群

(渗流流体力学研究所, 1990年5月4日收到)

## 摘 要

本文采用积分变换的方法, 找到了一类非牛顿流体在环形管道中不定常流动的解析解, 并进行了数值计算, 详尽分析了非牛顿性系数和其他各参数对二阶流体不定常流动的影响。指出当二阶流体非牛顿系数相同时, 环管流与一般管流相比达到稳定的特征时间较短, 并且相应的速度分布、平均速度分布的数值均较小, 在外半径相同时, 环管流内壁的剪应力较之一般管流, 其大小随内半径的大小而变, 环管流的外壁剪应力总相应地小于内壁剪应力。

**关键词** 二阶流体 环管 非牛顿系数 几何因子 流动特征 积分变换

## 一、前 言

流体流动的非牛顿性, 已在许多工程问题中, 如管道设计、石油运输、高分子化学和聚合物加工等, 愈来愈受到人们的重视, 成为影响工程设计不可忽视的重要因素之一。由于实际过程中影响流动的因素很多, 如果不加以适当的简化, 即便是数值计算也会遇到很大的困难。韩式方<sup>[1],[2]</sup>等曾对二阶非牛顿流体的一般管流和环管流的非定常流动, 用变分近似方法进行了探讨; 刘慈群、黄军旗<sup>[3]</sup>曾对二阶非牛顿流体的一般非定常管流进行分析并得到了解析解。本文则对二阶非定常流体在环管中的非定常流动作了细致分析, 得到了简洁的解析结果, 这些结果在特殊情况下实际上包括了上述有关结果, 可为有关的工程问题提供简便可行的分析、比较依据。

## 二、数学模型及其解析结果

### 1. 基本方程

根据非牛顿流体力学的基本理论, 二阶流体的本构方程为<sup>[4]</sup>:

$$\tau = \eta_0 \mathbf{A}_1 + \beta_1 \mathbf{A}_1^2 + \beta_2 \mathbf{A}_2 \quad (2.1)$$

这里 $\eta_0$ 是特征粘度,  $\tau$ 是应力张量,  $\mathbf{A}_1$ 和 $\mathbf{A}_2$ 分别是一阶和二阶Rivlin-Ericksen张量,  $\beta_1$ 和 $\beta_2$ 是二阶非牛顿流体的物质常数。

对环管非定常流, 在流动为粘性层流流动的情况, 可以假定只有沿轴向 $z$ 的速度分量 $w$ 不为零, 且该速度分量只与半径 $r$ 有关, 即:

$$w=w(r, t) \quad (2.2)$$

$$u=v=0, \quad \frac{\partial w}{\partial \theta} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.3)$$

从(2.2)和(2.3)容易导出运动方程为:

$$\rho \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\tau_{rz}) \quad (2.4)$$

(2.2)和(2.3)代入(2.1)式可以得到如下动量方程组:

$$\begin{cases} \tau_{rr} = \beta_1 \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right) + 2\beta_2 \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 & (2.5) \\ \tau_{\theta\theta} = \tau_{z\theta} = \tau_{r\theta} = 0 & (2.6) \\ \tau_{zz} = \beta_1 \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right) & (2.7) \\ \tau_{rz} = \eta_0 \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \beta_2 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right) & (2.8) \end{cases}$$

将(2.8)代入运动方程(2.4)便得到此问题的基本控制方程为:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \beta_2 \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial w}{\partial r} \right) \right] \quad (2.9)$$

定解条件为初始时刻速度为零, 内外两壁遵循无滑移条件, 即:

$$\begin{cases} w(r_1, t) = 0 & (2.10) \\ w(r_2, t) = 0 & (2.11) \\ w(r, 0) = 0 & (2.12) \end{cases}$$

这里 $r_1$ 和 $r_2$ 分别是环管的内半径与外半径.

引进下列无量纲参数:

$$x=r/r_2, \quad T=\eta_0 t/\rho r_2^2,$$

$$\eta=r_1/r_2, \quad H_0=\beta_2/\rho r_2^2,$$

$$u = \eta_0 w / \left[ r_2^2 \left( \frac{\partial p}{\partial z} \right) \right], \quad F = \tau_{rz} / \left[ r_2 \left( \frac{\partial p}{\partial z} \right) \right]$$

该问题的数学模型简化为如下定解问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial T} = 1 + \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left( x \frac{\partial u}{\partial x} \right) + H_0 \frac{\partial}{\partial T} \left[ \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left( x \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] & (2.13) \\ u(1, T) = u(\eta, T) = 0 & (2.14) \\ u(x, 0) = 0 & (2.15) \end{cases}$$

## 2. 问题的求解

对于上面的定解问题我们可以找到其核函数为:

$$R_0(\rho_n x) = J_0(\rho_n x) Y_0(\rho_n) - J_0(\rho_n) Y_0(\rho_n x) \quad (2.16)$$

这里 $J_0(x)$ 和 $Y_0(x)$ 分别为第一和第二类Bessel函数,  $\rho_n$ 为下列特征方程的根:

$$J_0(\rho_n \eta) Y_0(\rho_n) - J_0(\rho_n) Y_0(\rho_n \eta) = 0 \quad (n=1, 2, \dots, \infty) \quad (2.17)$$

特征函数 $R_0(\rho_n x)$ 在对应边界条件下的范数为:

$$\frac{1}{N(\rho_n)} = \frac{\pi^2}{2} \frac{\rho_n^2 J_0^2(\rho_n \eta)}{J_0^2(\rho_n \eta) - J_0^2(\rho_n)} \quad (2.18)$$

利用核函数  $R_0(\rho_n x)$  对定解问题在区间  $[\eta, 1]$  上施行 Hankel 变换, 并利用关系式 (2.17) 及 Bessel 函数的性质:  $J'_0(x) = -J_1(x)$ ,  $Y'_0(x) = -Y_1(x)$  (2.19)

朗斯基关系<sup>[6]</sup>:

$$J_0(\rho_n)Y'_0(\rho_n) - Y_0(\rho_n)J'_0(\rho_n) = 2/\pi\rho_n \quad (2.20)$$

可以得到如下简洁的结果:

$$u(x, T) = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\rho_n \eta)}{J_0(\rho_n \eta) + J_0(\rho_n)} \cdot \frac{1}{\rho_n^2} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\rho_n^2 T}{1 + H_c \rho_n^2}\right) \right] \cdot R_0(\rho_n x) \quad (2.21)$$

另外, 若把原问题的解分解成两部分:

$$u(x, T) = u_1(x, T) + u_2(x, T)$$

其中,  $u_1(x, T) = [(1-x^2) - (1-\eta^2) \cdot \ln x / \ln \eta] / 4$  代表非齐次方程的特解,  $u_2(x, T)$  代表齐次初始问题的解, 原问题的解还可以表成:

$$u(x, T) = \frac{1}{4} [(1-x^2) - (1-\eta^2) \cdot \ln x / \ln \eta] - \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\rho_n \eta)}{J_0(\rho_n \eta) + J_0(\rho_n)} \cdot \frac{1}{\rho_n^2} \cdot \exp\left(-\frac{\rho_n^2 T}{1 + H_c \rho_n^2}\right) \cdot R_0(\rho_n x) \quad (2.22)$$

这实际上证明了如下的恒等式:

$$\frac{1}{4} [(1-x^2) - (1-\eta^2) \frac{\ln x}{\ln \eta}] = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\rho_n \eta)}{J_0(\rho_n \eta) + J_0(\rho_n)} \cdot \frac{R_0(\rho_n x)}{\rho_n^2} \quad (2.23)$$

依(2.2)和(2.22)式可以导出剪切应力和平均流速分布:

剪切应力分布为:

$$F = \frac{\partial u}{\partial x} + H_c \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) = -\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\rho_n \eta)}{J_0(\rho_n \eta) + J_0(\rho_n)} \cdot \frac{1}{\rho_n} \left[ 1 - \frac{1}{1 + H_c \rho_n^2} \cdot \exp\left(-\frac{\rho_n^2 T}{1 + H_c \rho_n^2}\right) \right] R_1(\rho_n x) \quad (2.24)$$

这里  $R_1(\rho_n x)$  是下列函数:

$$R_1(\rho_n x) = J_1(\rho_n x)Y_0(\rho_n) - J_0(\rho_n)Y_1(\rho_n x) \quad (2.25)$$

或者

$$F = -\frac{1}{4} [2x + (1-\eta^2)/(x \ln \eta)] + \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\rho_n \eta)}{J_0(\rho_n \eta) + J_0(\rho_n)} \cdot \frac{R_1(\rho_n x)}{\rho_n (1 + H_c \rho_n^2)} \cdot \exp\left(-\frac{\rho_n^2 T}{1 + H_c \rho_n^2}\right) \quad (2.26)$$

平均流速随时间的变化公式为:

$$u_a = \frac{1}{1-\eta^2} \int_{\eta}^1 u x dx$$

$$= \frac{4}{1-\eta^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\rho_n \eta) - J_0(\rho_n)}{J_0(\rho_n \eta) + J_0(\rho_n)} \cdot \frac{1}{\rho_n^4} \cdot \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\rho_n^2 T}{1+H_c \rho_n^2}\right) \right]$$

或者：
$$u_a = \frac{1}{8} [1 + \eta^2 + (1 - \eta^2) / \ln \eta]$$

$$- 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\rho_n \eta) - J_0(\rho_n)}{J_0(\rho_n \eta) + J_0(\rho_n)} \cdot \frac{1}{\rho_n^4 (1 - \eta^2)} \exp\left(-\frac{\rho_n^2 T}{1+H_c \rho_n^2}\right) \quad (2.27)$$

### 3. 对几种特殊情形的讨论

(i)  $H_c = 0$  的情况

$H_c = 0$  表明流体的非牛顿性消失，这时的解可以表达成如下形式：

$$u(x, T) = \frac{1}{4} [(1-x^2) - (1-\eta^2) \ln x / \ln \eta] - \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\rho_n \eta)}{J_0(\rho_n \eta) + J_0(\rho_n)} \cdot \frac{R_0(\rho_n x)}{\rho_n^2} \cdot \exp(-\rho_n^2 T) \quad (2.28)$$

可以看出这正是牛顿流体的环管流动解。

(ii)  $T \rightarrow \infty$  的情况

由于  $T \rightarrow \infty$  时， $\exp\left(-\frac{\rho_n^2 T}{1+H_c \rho_n^2}\right) \rightarrow 0$ ，速度、剪切应力及平均速度分布均趋于定常值，并且这个定常值不依赖于非牛顿流体的特性而与牛顿流体的结果相一致。

(iii)  $\eta \rightarrow 0$  的情形

当  $\eta \rightarrow 0$  时，由第二类 Bessel 函数在零点附近的性质可知：

$$J_0(\rho_n \eta) \rightarrow 1, \quad |Y_0(\rho_n \eta)| \gg |Y_0(\rho_n)| \quad (2.29)$$

于是原特征方程(2.17)便退化为：

$$Y_0(\rho_n \eta) J_0(\rho_n) = 0 \quad \text{或者} \quad J_0(\rho_n) = 0 \quad (2.30)$$

特征函数(2.16)式便退化成：

$$R_0(\rho_n x) = J_0(\rho_n x) Y_0(\rho_n) \quad (2.31)$$

另外，由朗斯基(Rosky)关系(2.20)及(2.19)可得：

$$Y_0(\rho_n) = 2/\pi \rho_n J_1(\rho_n) \quad (2.32)$$

在推导(2.31)和(2.32)的过程中均用到了(2.30)。

于是，(2.32)代入(2.31)可将  $R_1(\rho_n x)$  表成：

$$R_0(\rho_n x) = 2J_0(\rho_n x) / \pi \rho_n J_1(\rho_n) \quad (2.33)$$

$$\eta \rightarrow 0 \text{ 还有: } (1-\eta^2) / \ln \eta \rightarrow 0 \quad (2.34)$$

$$\text{利用(2.30): } \frac{J_0(\rho_n \eta)}{J_0(\rho_n \eta) + J_0(\rho_n)} \rightarrow 1 \quad (2.35)$$

(2.33)、(2.34)、(2.35)代入原问题的解便有

$$u(x, T) = \frac{1}{4} (1-x^2) - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\rho_n^3} \cdot \frac{J_0(\rho_n x)}{J_1(\rho_n)} \exp\left(-\frac{\rho_n^2 T}{1+H_c \rho_n^2}\right) \quad (2.36)$$

可以看到(2.30)和(2.34)正是文献[3]中的结果.但同时应当注意,由于 $\eta \rightarrow 0$ 时环管流必须满足内边界,上述的讨论应排除 $x=0$ 这一点.

### 三、数值结果及分析

我们对二阶非牛顿流体环管不定常流动的速度、剪切应力(轴向分量)及平均速度的分布作了数值计算,并考虑了不同的非牛顿系数 $H_0$ 和内外半径之比 $\eta$ 的变化对流动的影响.从这些结果可以清楚地看到二阶非牛顿流体各物理量的特征与牛顿流体的明显差别.表1列出了不同的 $\eta$ 值下特征函数 $R_0(\rho_n x)$ 的前十个特征根,可以看出 $\eta$ 增大时对应的特征根亦随之增大.

表1 不同 $\eta$ 值下特征函数 $R_0(\rho_n \eta)$ 的前十个根

$\eta \backslash \rho_n$	$\rho_1$	$\rho_2$	$\rho_3$	$\rho_4$	$\rho_5$	$\rho_6$	$\rho_7$	$\rho_8$	$\rho_9$	$\rho_{10}$
0.1	3.31397	6.85749	10.3774	13.8865	17.3897	20.8894	24.3868	27.8829	31.3779	34.8721
0.2	3.81588	7.78558	11.7321	15.6702	19.6041	23.5360	27.4667	31.3964	35.3255	39.2542
0.3	4.41242	8.93270	13.4342	17.9292	22.4217	26.9126	31.4027	35.8924	40.3817	44.8707
0.8	15.6981	31.4109	47.1206	62.8294	78.5378	94.2461	109.954	125.662	141.370	157.079
0.9	31.4116	62.8297	94.2463	125.663	157.079	188.495	219.911	251.327	282.743	314.159

随 $\eta$ 的增大,相应特征根增大.

表2  $\eta=1 \times 10^{-5}$ 时 $R_0(\rho_n \eta)$ 和 $J_0(\rho_n)=0$ 的前十个根

$\rho_n$	$\rho_1$	$\rho_2$	$\rho_3$	$\rho_4$	$\rho_5$	$\rho_6$	$\rho_7$	$\rho_8$	$\rho_9$	$\rho_{10}$
$R_0(\rho_n \eta)$	2.52293	5.64755	8.78635	11.9277	15.0700	18.2125	21.3550	24.4977	27.6404	30.7830
$J_0(\rho_n)$	2.40475	5.52012	8.65377	11.7915	14.9308	18.0710	21.2117	24.3524	27.4934	30.6345

表2表明, $\eta$ 很小时 $R_0(\rho_n \eta)=0$ 和 $J_0(\rho_n)=0$ 的根十分接近.

将计算结果绘成图1~7,分析有如下结论:

1. 在相同的环管形状下( $\eta$ 相同),随着流体非牛顿系数 $H_0$ 的增大,在起动后同一时刻速度分布趋于平缓,但最大速度的位置只与环管形状有关,一般说来最大速度的位置总是较靠近内壁.

2. 通常的计算中,级数求和只取前一两项即可,因此流动达到稳定的时间也只取决于前一两项.由于环管流动与一般管流比,对应的特征根较大,比较它们流动的特征时间:

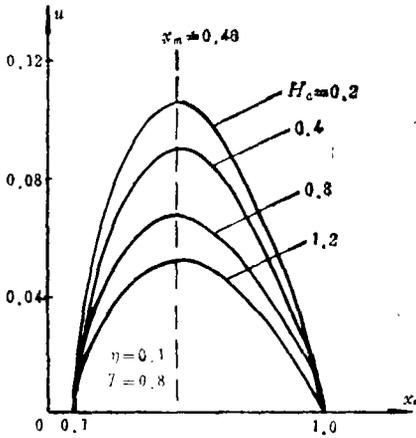
$$T' = H_0 + 1/\rho_n$$

在相同非牛顿系数时,环管流较一般管流略短一些.

3. 对几何形状相同的环管( $\eta$ 相同),任一确定位置的流动趋于定常的时间受到非牛顿系数的强烈影响, $H_0$ 越大,趋于定常的时间越长.

4. 对于形状一定的环管,在流体开始流动后某一相同的时刻,剪切应力的空间分布受非牛顿系数 $H_0$ 的影响很弱.

5. 同种非牛顿流体在不同形状的环管中流动,若其起动的的时间相等,则其剪切应力(轴



$x_m$  为对应时刻最大速度的位置  
图1 二阶非牛顿流体环管内速度剖面

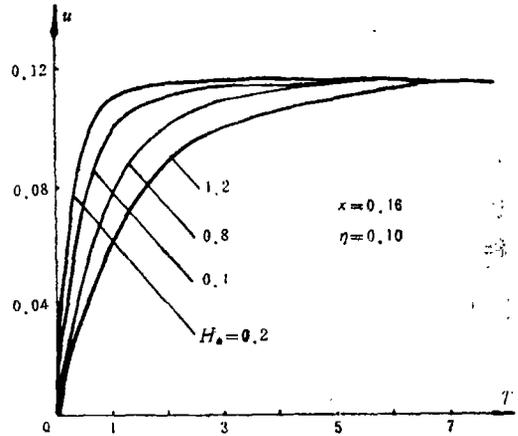


图2 不同非牛顿系数对流动的影响

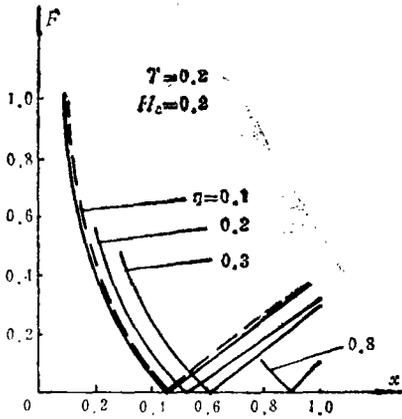


图3 不同形状环管中剪切应力的分布  
(虚线对应  $H_c=0.8$  的分布)

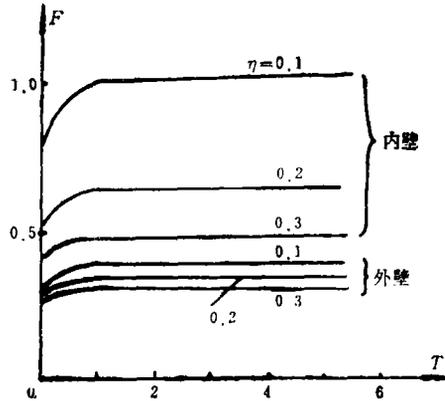


图4 不同环管形状对剪切应力变化的影响

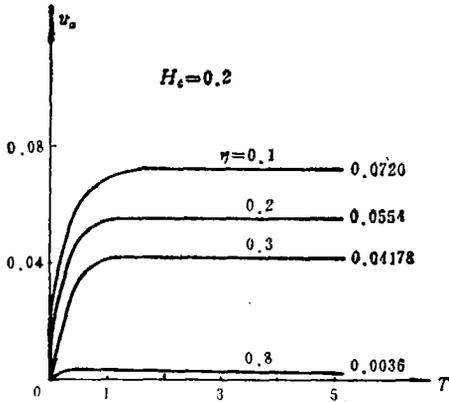


图5 不同环管形状对平均流速变化的影响

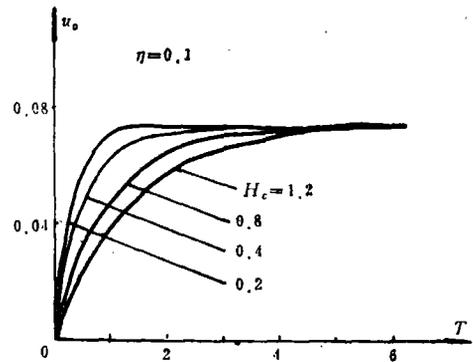


图6 不同非牛顿系数对平均流速的影响

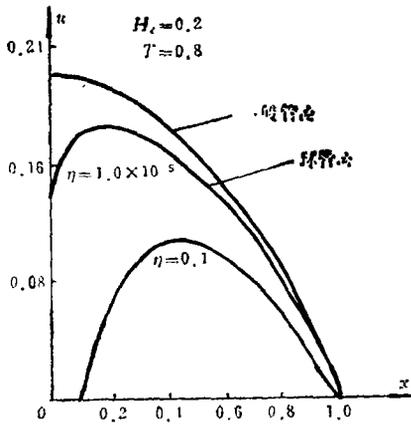


图7 一般管流和环管流速度剖面的比较

一般管流的速度剖面基本一致，但零点除外。

本文把一个复杂的问题以解析形式表达了它的解，既简洁又便于计算，同时得到用其他较复杂的方法才能得到的解，并在几种特殊情况下覆盖了同类问题的解，不失为有益的尝试。

### 参 考 文 献

- [ 1 ] 伍岳庆, 非牛顿流体管内非定常流动研究, 中科院成都分院硕士论文 (1988).
- [ 2 ] 韩飞宇, 非牛顿流体非定常流动研究, 中科院成都分院硕士论文 (1989).
- [ 3 ] 刘慈群等, 非牛顿流体管内不定常流的解析解, 应用数学和力学, 10(11) (1989), 939—946.
- [ 4 ] 陈文芳著, 《非牛顿流体力学》, 科学出版社(1984).
- [ 5 ] M.N.奥齐克西, 《热传导》, 高等教育出版社(1984).

## Analytical Solution of Flow of Second-Order Non-Newtonian Fluid through Annular Pipes

Zhu Wen-hui

Liu Ci-qun

(Institute of Porous Flow and Fluid Mechanics, Langfang)

### Abstract

This paper presents an analytical solution to the unsteady flow of one kind of second-order non-Newtonian fluid by the use of integral transformation, simulates the results, analyses the effect of non-Newtonian coefficient  $H_c$  and other parameters on the flow and shows that when  $H_c$  keeps the same the annular flow has a shorter characteristic time than the general pipe flow and the correspondent velocity and average velocity have a smaller value. When  $r_1/r_2$  ( $\eta$ ) remains unchanged, the shear stress of inner wall of annular flow changes with the inner radius  $r_1$  compared with the general pipe flow and is always smaller than that of the outer wall.

**Key words** integral transformation, shape factor, non-Newtonian coefficient, second-order fluids, annular pipe

向分量)沿径向的分布,形状极为相似,几乎在对应段可以通过平移得到。从剪应力为零处到外壁之间的剪应力分布(轴向分量)近似地为一根直线。

6. 随着 $\eta$ 的增大,内外两壁轴向剪切应力的差别迅速减小,流动剖面关于内外两壁的对称性增强。并且内壁剪切应力总比相应的外壁剪应力值大。

7. 平均速度趋于定常值的时间亦随 $H_c$ 的增大而增长,并且随着 $\eta$ 的增大,平均的速度定常值迅速减小。

8. 当 $\eta \rightarrow 0$ 时,环管流动的速度剖面与一