应用数学和力学，第14卷第4期(1993年4月)　　　　　　　　应用数学和力学编委会编
Applied Mathematics and Mechanics　　　　　　　　　　　重庆出版社出版

分叉、突变、浑沌与稳定性的泛系逻辑守恒性*

吴　　陈

（镇江船舶学院计算机科学系，1992年1月16日收到）

摘　　要

在文献[4，5]中首先将泛系方法论的有关研究同非线性力学中的分叉、突变、浑沌与稳定性的研究结合起来，并在泛系方法论的意义下重新定义了有关的概念．本文在泛系方法论的框架下研究分叉、突变、浑沌与稳定性这些非线性力学现象的逻辑守恒规律．

关键词　泛系方法论　分叉　突变　浑沌与稳定性　非线性力学　泛系逻辑守恒规律

我们首先引进在文献[5]中已经给出的有关概念的定义．

设G是一给定的集合，$g\subset G^2$．如果$D^2\cap g=\phi$，则D称为g的一个泛浑沌或g的一个内稳定子．如果对于任意的$x\in\bar{D}$，$x\circ g\cap D\neq\phi$，则D称为g的一个泛吸引子或g的一个外稳定子．如果D是一个泛浑沌，而且又是一个泛吸引子，那么D称为g的一个泛系奇怪吸引子或核．

相关的概念如一般的奇怪吸引子、渐变和突变也在文献[5]中有了描述．

所谓奇怪吸引子意指一个子集$D\subset G$，满足性质：$D\circ g\subset D$，$g^t\cap I(D)=\phi$．这种子集之一相应于一个浑沌运动．$D\circ g\cap D=\phi$表示一个突变．

在下面，我们从泛系转化的观点来研究这些现象的守恒规律．

定理1　设F，G是两个集合，$f\subset F\times G$，$g\in P(G^2)$，$D\subset G$，$D^2\cap g=\phi$．如果f是一个映射，则$(f\circ D)^2\cap f\circ g\circ f^{-1}=\phi$．

证明　假设$(f\circ D)^2\cap f\circ g\circ f^{-1}\neq\phi$．那么存在$(x,y)$使得$(x,y)\in(f\circ D)^2$且$(x,y)\in f\circ g\circ f^{-1}$．从$(x,y)\in(f\circ D)^2$我们得到，$x$，$y\in f\circ D$．因而存在$t_1$，$t_2\in D$，使得$(x,t_1)$，$(y,t_2)\in f$．因为$(x,y)\in f\circ g\circ f^{-1}$，我们知，存在$(t,v)\in g$使得$(x,t)$，$(y,v)\in f$．依照$f$是一个映射的条件，我们得到，$t_1=t$，$t_2=v$．因此，$(t_1,t_2)\in g$．这与$D^2\cap g=\phi$相矛盾．

定理2　设F和G是两个给定的集合，$f\subset F\times G$，$g\in P(G^2)$，$D\subset G$，$D^2\cap g=\phi$．如果$f\circ D\cap f\circ\bar{D}=\phi$，则$(f\circ D)^2\cap f\circ g\circ f^{-1}=\phi$．

证明　假设$(f\circ D)^2\cap f\circ g\circ f^{-1}\neq\phi$．则存在$(x,y)$使得$(x,y)\in(f\circ D)^2$且$(x,y)\in f\circ g\circ f^{-1}$．因此，$x$，$y\in f\circ D$且存在$(t_1,t_2)\in g$使得$(x,t_1)$，$(y,t_2)\in f$．因为$D^2\cap g=\phi$，依照条件$(t_1,t_2)\in g$我们有$t_1\notin D$或$t_2\notin D$．不失一般性，我们假设$t_1\notin D$，即$t_1\in\bar{D}$．这样$x\in f\circ\bar{D}$且$x\in(f\circ D)$

* 钱伟长推荐．

$\cap(f\circ D)$。这与$f\circ D\cap f\circ\bar{D}=\phi$相矛盾．同理，我们能够证明$t_2\notin D$的情形．

定理3 设F，G是两个给定的集合，$f\subset F\times G$是一个隐模拟，$g\in P(G^2)$，$D\subset G$，$\forall x\in\bar{D}$，$x\circ g\cap D\neq\phi$．如果$f\circ D\neq F$，那么对于$\forall z\in\overline{f\circ D}$，$(z\circ f\circ g\circ f^{-1})\cap f\circ D\neq\phi$．

证明 设$z\in\overline{f\circ D}\neq\phi$．因为$f$是一个隐模拟，我们知，$z\circ f\neq\phi$．因而存在$t\in\bar{D}$使得$(z,t)\in f$．因为$t\circ g\cap D\neq\phi$，我们知，存在$r\in D$，使得$(t,r)\in g$．因为$r\circ f^{-1}=f\circ r\neq\phi$，我们得到$z\circ f\circ g\circ f^{-1}\cap f\circ D\neq\phi$．

命题1 如果$f\subset F\times G$是一个赋形，那么，$\bar{D}\circ f=\overline{D\circ f}$，其中$D\subset F$，$D\circ f\neq G\neq\bar{D}\circ f$．

证明 令$y\in\overline{D\circ f}$，即$y\notin D\circ f$．那么$f\circ y\neq\phi$，因为f是一个赋形．也就是说，存在$z\in\bar{D}$使得$(z,y)\in f$．因而$y\in\bar{D}\circ f$．因为y为任意的，所以我们有$\overline{D\circ f}\subset\bar{D}\circ f$．

相反地，令$y\in\bar{D}\circ f$．那么存在$z\in\bar{D}$，使得$(z,y)\in f$．因为f是一个赋形，那么不存在任何其它的元素t使得$(t,y)\in f$．也就是，当$(t,y)\in f$时，$t=z$．因而$y\in\overline{D\circ f}$．因为y为任意的，所以$\bar{D}\circ f\subset\overline{D\circ f}$．

总之，我们得到$\bar{D}\circ f=\overline{D\circ f}$．

从命题1我们可以改进定理3中的条件和结果．这里省略．

在上面，我们已经给出了泛浑沌和泛吸引子分别具有守恒性的条件．综合这些定理的条件，我们可以得到泛系奇怪吸引子或核的守恒规律．

在下面，我们来研究其它现象的守恒规律．

定理4 令F，G为两个给定的集合，$f\subset F\times G$，$g\in P(G^2)$，$D\subset G$，$D\circ g\subset D$．如果$F\circ(f-(f\circ D)\times D)\cap\bar{D}=\phi$，那么，$(f\circ D)\circ f\circ g\circ f^{-1}\subset f\circ D$，其中$\bar{D}$是$D$的补集．

证明 因为$F\circ(f-(f\circ D)\times D)\cap\bar{D}=\phi$，我们有$F\circ(f-(f\circ D)\times D)\subset D$，$(f\circ D)\circ f\subset D$．因而$(f\circ D)\circ f\circ g\circ f^{-1}=((f\circ D)\circ f)\circ g\circ f^{-1}\subset D\circ g\circ f^{-1}\subset D\circ f^{-1}=f\circ D$．定理证毕．

定理5 令F，G为两个集合，$f\subset F\times G$，$g\in P(G^2)$，$D\subset G$，$D\circ g\subset D$．如果对于任意的$(x,y)\in f$，当$y\in D$时，$x\circ f\subset D$，那么$(f\circ D)\circ f\circ g\circ f^{-1}\subset f\circ D$．

证明 因为对任意的$(x,y)\in f$，当$y\in D$时，$x\circ f\subset D$，所以$(f\circ D)\circ f=\bigcup(x\circ f)((x,y)\in f,y\in D)\subset D$．因而，$(f\circ D)\circ f\circ g\circ f^{-1}=((f\circ D)\circ f)\circ g\circ f^{-1}\subset D\circ g\circ f^{-1}\subset D\circ f^{-1}=f\circ D$．定理证毕．

定理6 令F，G为两个给定的集合，$f\subset F\times G$，$g\in P(G^2)$，$D\subset G$，$D\circ g=D$．如果$(f\circ D)\circ f=D$，则$(f\circ D)\circ f\circ g\circ f^{-1}=f\circ D$．

证明 因为$(f\circ D)\circ f\circ g\circ f^{-1}=((f\circ D)\circ f)\circ g\circ f^{-1}=D\circ g\circ f^{-1}=D\circ f^{-1}=f\circ D$，所以定理证毕．

上面的三个定理部分地推广了文献[4]中给出的渐变突变的显微守恒规律．

定理7 令F，G为两个给定的集合，$f\subset F\times G$，$g\in P(G^2)$，$D\subset G$，$D\circ g\cap D=\phi$．如果f满足$(f\circ D)\circ f=D$，$f\circ\bar{D}\cap f\circ D=\phi$，那么$(f\circ D)\circ f\circ g\circ f^{-1}\cap(f\circ D)=\phi$．

证明 依照假设$(f\circ D)\circ f=D$，我们得到$(f\circ D)\circ f\circ g\circ f^{-1}=D\circ g\circ f^{-1}=(D\circ g)\circ f^{-1}=f\circ(D\circ g)$．因为$D\circ g\cap D=\phi$，所以$D\circ g\subset\bar{D}$．因而我们得到$(f\circ D)\circ f\circ g\circ f^{-1}\cap(f\circ D)=D\circ g\circ f^{-1}\cap f\circ D=(D\circ g)\circ f^{-1}\cap(f\circ D)=f\circ(D\circ g)\cap(f\circ D)\subset(f\circ\bar{D})\cap(f\circ D)=\phi$．因而$(f\circ D)\circ f\circ g\circ f^{-1}\cap(f\circ D)=\phi$．定理证毕．

这个定理也是文献[4]中给出的渐变突变显微守恒规律的推广．

定理8 令F，G为两个给定的集合，$f\subset F\times G$，$g\in P(G^2)$，$D\subset G$，$D\circ g\subset D$，$g^t\cap I(D)=\phi$．如果f是G上的一个赋形，覆盖G，那么，$(f\circ D)\circ f\circ g\circ f^{-1}\subset f\circ D$，$(f\circ g\circ f^{-1})^t\cap I(f\circ D)=\phi$．

证明 定理的前部分可以由文献[4]中给出的渐变突变守恒规律证明．现在我们来证明$(f\circ g\circ f^{-1})^t\cap I(f\circ D)=\phi$．假设$(f\circ g\circ f^{-1})^t\cap I(f\circ D)\neq\phi$，那么存在$(x,x)$使得$(x,x)\in I(f\circ D)$且$(x,x)\in(f\circ g\circ f^{-1})^t$．由于$(x,x)\in(f\circ g\circ f^{-1})^t$，我们知道，存在某个非负的整数$i$，使得$(x,x)\in(f\circ g\circ f^{-1})^{(i)}$．依$f$是覆盖$G$的$G$上的一个赋形的条件，我们有$(f\circ g\circ f^{-1})^{(i)}=f\circ g^{(i)}\circ f^{-1}$．因此，存在$(t_1,t_2)\in g^{(i)}$，使得$(x,t_1)$，$(x,t_2)\in f$．因为$f$是覆盖$G$的$G$上的一个赋形，所以$t_1=t_2=t$．即$(t,t)\in g^{(i)}$．因为$f$是一个赋形，我们得到$(f\circ D)\circ f\subset D$．因而$t\in D$．这与$g^t\cap I(D)=\phi$相矛盾．定理证毕．

上面的定理给出了奇怪吸引子具有守恒性的一个充分条件．

从上述定理的证明过程中，我们可以得到下述结果：

定理9 在上述定理的条件下，如果$f^{-1}\circ f=I(G)$，那么$(f\circ D)\circ f\circ g\circ f^{-1}\subset f\circ D$，$(f\circ g\circ f^{-1})^t\cap I(f\circ D)=\phi$成立．

证明 我们只须证明$f^{-1}\circ f=I(G)$等价于f是G上的一个覆盖G的赋形．

令(x,y)，$(x,z)\in f\subset F\times G$．如果$y\neq z$，则$(y,z)\in f^{-1}\circ f=I(G)$．这是不可能的．因此$y=z$．因而$f$是$G$上的一个覆盖$G$的赋形．这样，我们证明了$f^{-1}\circ f=I(G)$等价于$f$是$G$上的一个覆盖$G$的赋形．

定理10 设F，G是两个给定的集合，$f\subset F\times G$，$g\in P(G^2)$，$D\subset G$，$D\circ g\subset D$，$g^t\cap I(D)=\phi$．如果$f^{-1}\circ f\subset I(G)$，$(f\circ D)\circ f\subset D$且对于任意的$x\in f\circ D$，$|x\circ f|=1$，那么$(f\circ D)\circ f\circ g\circ f^{-1}\subset f\circ D$，$(f\circ g\circ f^{-1})^t\cap I(f\circ D)=\phi$．

证明 因为$(f\circ D)\circ f\subset D$，我们得到$(f\circ D)\circ f\circ g\circ f^{-1}=(f\circ D)\circ f\circ g\circ f^{-1}\subset D\circ g\circ f^{-1}=(D\circ g)\circ f^{-1}\subset D\circ f^{-1}=f\circ D$．现在我们来证明$(f\circ g\circ f^{-1})^t\cap I(f\circ D)=\phi$．假设$(f\circ g\circ f^{-1})^t\cap I(f\circ D)\neq\phi$．那么，存在$(x,x)$使得$(x,x)\in I(f\circ D)$且$(x,x)\in(f\circ g\circ f^{-1})^t$．从$(x,x)\in(f\circ g\circ f^{-1})^t$我们知道，存在某个非负整数$i$使得$(x,x)\in(f\circ g\circ f^{-1})^{(i)}$．$(x,x)\in(f\circ g\circ f^{-1})^{(i)}\subset f\circ g^{(i)}\circ f^{-1}$．$(x,x)\in f\circ g^{(i)}\circ f^{-1}$．依定义，我们知，存在$(t_1,t_2)\in g^{(i)}$使得$(x,t_1)$，$(x,t_2)\in f$．又依$(x,x)\in I(f\circ D)$我们得到$x\in f\circ D$．因为$|x\circ f|=1$，所以$t_1=t_2=t$．因此$(t,t)\in g^{(i)}$．从$(f\circ D)\circ f\subset D$，我们有$t\in D$．这样，$g^t\cap I(D)\neq\phi$．这与定理的条件相矛盾．定理证毕．

参 考 文 献

[1] 吴学谋，泛系方法论：概念，定理与应用(Ⅰ)—(Ⅶ)，科学探索学报，(1,2,4) (1982)，33—56，93—106，123—132；(1，4) (1983)，125—137，97—104；(1) (1984)，131—138．

[2] 吴学谋，泛系识别理论与大系统泛系运筹学的研究与应用(Ⅰ)，应用数学和力学，5(1) (1984)，19—32．

[3] 吴学谋，不动泛系定理与泛权网络的泛系突变分析，数学研究与评论 (1) (1981)，79—84．

[4] 吴学谋，泛系方法论与泛系突变分析，《中国力学会分叉、突变与稳定性学术会议论文汇编》(1983)，121—129．

[5] 吴学谋，泛系方法论与非线性分析：关于分叉、突变、浑沌与稳定性的一些新研究，《国际非线性力学会议文集》，科学出版社 (1985)，138—144．

[6] 朱照宣，非线性力学中的浑沌，《中国力学会分叉、突变与稳定性学术会议论文汇编》(1983)，17—23．

[7] 高隆颖、王书基，泛对称与不动泛系定理，应用数学和力学，5(5) (1984)，743—748．

[8] 李贵华，不动泛系定理中的结构和数量特征描述，应用数学和力学，5(6) (1984)，887—894．

[9] 吴陈，泛系关系族的泛对称与不动泛系定理，应用数学和力学，6(10) (1985)，923—928．

Pansystems Logic Conservation of Bifurcation, Catastrophe, Chaos and Stability

Wu Chen

(*Department of Computer Science & Engineering, Zhenjiang Shipbuilding Institute, Zhenjiang, Jiangsu*)

Abstract

It is in references [4, 5] that the combination of the relative researches of pansystems methodology and the researches of bifurcation, catastrophe, chaos and stability in nonlinear mechanics was put forward and the concepts were redefined from the point of view of pansystems methodology. The present paper studies the logic conservation law of these nonlinear mechanics phenomena under the framework of pansystems methodology.

Key words pansystems methodology, bifurcation, catastrophe, chaos and stability, nonlinear mechanics, pansystems logic conservation law