

理想弹塑性Ⅲ型扩展裂纹的 全新和精确分析*

易志坚

(重庆交通学院结构系, 1992年6月8日收到)

摘 要

本文采用线场分析方法对理想弹塑性Ⅲ型准静态扩展裂纹进行了分析. 本文的意义在于突破了小范围屈服理论的限制. 通过求得裂纹线附近塑性区应力和位移率的通解, 并将此通解(而不是过去一直采用的特解)与弹性场的精确解(而不是线弹性奇异 K 场)在裂纹线附近的弹塑性边界上匹配, 本文得出了裂纹线附近塑性区的应力变形场、塑性区的长度及弹塑性边界的单位法向量的全新和精确解答. 本文的分析放弃了小范围屈服理论的所有近似假定并且不再附加任何其它的近似假定, 本文的结果在裂纹线附近是足够精确的. 本文的结果表明: 对理想弹塑性Ⅲ型准静态扩展裂纹, 不存在“定常扩展状态”, 且裂纹线附近塑性应变不存在奇异性. 本文还对裂纹稳定扩展过程讨论了两种重要情形.

关键词 准静态扩展裂纹 裂纹线 弹塑性边界 精确解

一、引 言

Achenbach 和 Dunayevsky^[1] 以及 Guo 和 Li^[2] 对理想弹塑性Ⅲ型(即反平面)准静态扩展裂纹裂纹线附近的应力和变形场进行了研究. 但是他们的结果是在小范围屈服理论近似假定的基础上得到的. 小范围屈服理论假定: 裂纹前缘塑性区很小, 塑性区外的弹性场为裂纹的线弹性奇异 K 场, 且塑性区的存在使得裂纹的弹性场沿裂纹线向前移动了一微小距离. 显然文[1]、[2]的结果仅在塑性区足够小的情况下才近似成立. 但是, 对裂纹起裂后的持续扩展过程, 其外载 τ 都比较大, 基于小范围屈服条件的解答必然会引起较大误差. 作者本人在文[3]和[4]中, 分别对理想弹塑性Ⅲ型准静态扩展裂纹和静止裂纹作了更进一步的分析. 文[3]和文[4]不再按小范围屈服理论取裂纹的线弹性奇异 K 场为塑性区外的弹性场, 而是直接将无限板裂纹的精确弹性场(即 Westergaard 弹性场)与塑性场在裂纹线附近进行匹配, 因此文[3]、[4]的结果比文[1]、[2]更合理. 但是, 文[3]、[4]的分析仍没有放弃小范围屈服理论的另一近似假定, 也就是说文[3]、[4]仍采用了塑性区的存在使弹性场沿裂纹线移动了一距离这一假定. 因此文[3]、[4]的结果仍然只在塑性区足够小的情况下才近似成立. 进一步的分析表明: 文[3]、[4]之所以未能放弃小范围屈服关于弹性场应沿裂纹线移动

• 黄寿曾推荐.

一距离这一近似假定的根本原因,是采用了—个不恰当的塑性应力和变形场,这一不恰当场只不过是塑性场的一个特解,而并不是通解。因此从本质上讲,文[1~4]的结果都是不恰当的。

本文将求得塑性场的通解并使之与弹性精确场在裂纹线附近直接匹配而得出结果。本文的分析完全放弃了小范围屈服理论的近似假定,并且不再附加任何其它近似假定,本文的结果在裂纹线附近是足够精确的,本文并得出了一些重要结论。

二、基本方程

对图1或图2所示理想弹塑性Ⅲ型准静态扩展裂纹,固定坐标系 x_1, x_2, x_3 以裂纹中心为原点, x_3 平行于裂纹面,运动坐标系 x, y, z 以运动裂纹尖端为原点, x, y, z 分别平行于 x_1, x_2, x_3 ,裂尖位置为 $x_1 = a(t)$ 。不为零的应力分量和位移分量为 τ_{xz}, τ_{yz} 和 w , τ_{xz}, τ_{yz} 和 w 仅为 x 和 y 的函数。

平衡方程和Mises屈服条件分别为

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0 \quad (2.1)$$

$$\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 = k^2 \quad (2.2)$$

式中 k 为剪切屈服极限。

应变率定义为

$$\dot{\gamma}_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \dot{\gamma}_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.3a, b)$$

塑性流动理论的Prandtl-Reuss方程为

$$\dot{\gamma}_{xz} = \dot{\epsilon}_{xz}/G + \dot{\lambda} \tau_{xz} \quad (2.4a)$$

$$\dot{\gamma}_{yz} = \dot{\epsilon}_{yz}/G + \dot{\lambda} \tau_{yz} \quad (2.4b)$$

式中 G 为剪切弹性模量, λ 为塑性流动因子。以上各式中时间的物质导数为

$$(\dot{}) = \frac{\partial()}{\partial t} - \dot{a} \frac{\partial()}{\partial x} \quad (2.5)$$

式中, $\dot{a} = da/dt$ 为裂纹扩展速度。

三、裂纹线附近的应力和变形场

如前面所述,我们将采用弹性精确场(而不是线弹性奇异 K 场)与塑性场匹配。对图1示Ⅲ型中心裂纹无限板,采用Westergaard复应力函数,则可求得该问题既满足裂纹面边界条件又满足远场边界条件的弹性精确场,将求得的弹性精确应力和位移场按小 θ 的幂级数展开到裂纹线附近(与文[3],[4]类似),得

$$\tau_{xz} = \frac{\tau}{\sqrt{r(2a+r)}} \left[\frac{r-a}{2} - \frac{r(a+r)}{2(2a+r)} \right] \theta + O(\theta^3) \quad (3.1a)$$

$$\tau_{yz} = \frac{\tau}{\sqrt{r(2a+r)}} \left[(a+r) - \frac{2a^2r+a^3}{2(2a+r)^2} \cdot \theta^2 \right] + O(\theta^4) \quad (3.1b)$$

$$w = \frac{\tau}{G} \sqrt{r(2a+r)} \cdot \left[\frac{a+r}{2a+r} \right] \theta + O(\theta^3) \quad (3.2)$$

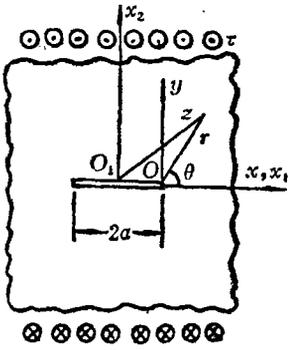


图1 III型中心裂纹无限板

系数相等可得一组方程, 解这组方程可得

$$\tau_0 = k, \tau_1 = -\frac{k}{x+L(t)}, \tau_2 = -\frac{1}{2} \frac{k}{[x+L(t)]^2} \quad (3.6a, b, c)$$

$$w_1 = \frac{k}{G} \left\{ -\frac{\dot{a}-\dot{L}(t)}{x+L(t)} \ln [x+L(t)] + \frac{A(t)}{x+L(t)} \right\} \quad (3.7)$$

将(3.6)、(3.7)式代入(3.3)、(3.4)式即得塑性区内的应力和位移率为

$$\tau_{xz} = -\frac{k}{x+L(t)} y + O(y^3) \quad (3.8a)$$

$$\tau_{yz} = k - \frac{1}{2} \frac{k}{[x+L(t)]^2} y^2 + O(y^4) \quad (3.8b)$$

$$w_1 = \frac{k}{G} \left\{ -\frac{\dot{a}-\dot{L}(t)}{x+L(t)} \ln [x+L(t)] + \frac{A(t)}{x+L(t)} \right\} y + O(y^3) \quad (3.9)$$

式中 $A(t)$ 和 $L(t)$ 为积分常数。

而文[2]、[3]的相应结果为

$$\tau_{xz} = -\frac{k}{x} y + O(y^3) \quad (3.10a)$$

$$\tau_{yz} = k - \frac{1}{2} \frac{k}{x^2} y^2 + O(y^4) \quad (3.10b)$$

$$w_1 = \frac{k}{G} \left[-\frac{\dot{a}}{x} \ln x + \frac{A(t)}{x} \right] y + O(y^3) \quad (3.11)$$

比较(3.8)、(3.9)与(3.10)、(3.11)发现, (3.10)和(3.11)式忽略了一积分常数 $L(t)$ 。因此(3.10)和(3.11)式仅为塑性区内应力和位移率在裂纹线附近邻域的一个特解, 而(3.8)和(3.9)式才是通解。文[3]未能从根本上放弃小范围屈服理论关于塑性区的存在将使弹性场沿裂纹线移动一距离的假定的根本原因正是采用了塑性区的特解(3.10)和(3.11)式。

这里我们必须指出, 过去一直认为正确的且一直采用的(比如文[1]采用的)塑性区的应力分量为

$$\tau_{xz} = -k \sin \psi, \tau_{yz} = k \cos \psi \quad (3.12a, b)$$

式中 $\psi = \arctg(y/x)$ 为极角。

事实上, 式(3.12a, b)仅为满足平衡方程(2.1)和屈服条件(2.2)式的一个特解而不是通解。如果将(3.12a, b)按小 y 的幂级数展开到裂纹线附近即得(3.10a, b)式。文[2]和文[3]有

(3.1)、(3.2)式在裂纹线附近 $r \rightarrow 0$ 至 $r \rightarrow \infty$ 邻域是精确的。

在裂纹线附近的塑性区, $y/x \ll 1$, $0 < x \leq x_p$, x_p 为裂纹的弹性边界, 由各场量关于 $y=0$ 的对称性和反对称性, 可将各场量展为

$$\tau_{xz} = \tau_1(x, t)y + O(y^3) \quad (3.3a)$$

$$\tau_{yz} = \tau_0(x, t) + \tau_2(x, t)y^2 + O(y^4) \quad (3.3b)$$

$$\dot{w} = \dot{w}_1(x, t)y + O(y^3) \quad (3.4)$$

$$\dot{\lambda} = \dot{\lambda}_0(x, t) + \dot{\lambda}_2(x, t)y^2 + O(y^4) \quad (3.5)$$

将(3.3)~(3.5)式代入(2.1)~(2.5)式, 由 y 的同次幂

意忽略积分常数 $L(t)$ 正是为了使(3.10a,b)与(3.12a,b)一致。因此取(3.12a,b)或(3.10a,b)式为塑性区的应力场是不恰当的。如果将(3.12a,b)或(3.10a,b)式与弹性应力场(无论是 K 场还是精确场)匹配,就必须采用塑性区的存在将使弹性场沿裂纹线移动一距离这一近似假定,否则便得不到结果。文[3]采用了这一不恰当的塑性应力场,因此文[3]不能从根本上放弃小范围屈服理论。

满足平衡方程和屈服条件的塑性应力场 τ_{xz} 和 τ_{yz} 的通解虽然很难求得,但通过本文的做法却容易求得其仅在裂纹线附近的通解(3.8)

式和与其相应的位移率(3.9)式。如果将(3.8)和(3.9)式与弹性场匹配,就无须再作塑性区的存在将使弹性场沿裂纹线移动一距离这一近似假定。

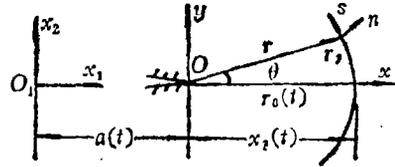


图2 运动裂纹尖端及裂纹线附近的弹塑性边界

裂纹线附近的弹塑性边界如图2所示,此时我们不再假定弹性场沿裂纹线移动一距离。由弹塑性边界 $r=r_p(\theta, t)$ 关于裂纹线对于 $\theta=0$ 的对称性,对于一个小 θ 有

$$r_p(\theta, t) = r_0(t) + r_2(t)\theta^2 + O(\theta^4) \quad (3.13)$$

由此可得弹塑性边界上任一点的单位法向量 $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$ 为

$$n_x = 1 - B_1^2 \theta^2 / 2 + O(\theta^4) \quad (3.14a)$$

$$n_y = B_1 \theta + O(\theta^3) \quad (3.14b)$$

式中

$$B_1 = 1 - 2r_2/r_0 \quad (3.15)$$

在弹塑性边界上

$$x = r_0 + r_0 \left(\frac{r_2}{r_0} - \frac{1}{2} \right) \theta^2 + O(\theta^4) \quad (3.16a)$$

$$y = r_0 \theta + O(\theta^3) \quad (3.16b)$$

弹塑性边界上应力的法向分量 σ_n 和切向分量 σ_s 分别为

$$\sigma_n = \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y, \quad \sigma_s = \tau_{xz} n_y - \tau_{yz} n_x \quad (3.17a, b)$$

将(3.1)、(3.13)和(3.14)式代入(3.17)式,可以得到弹性区应力无限趋于弹塑性边界的 σ_n 和 σ_s ,将(3.8)、(3.14)和(3.16)式代入(3.17)式,可以得到塑性区应力无限趋于弹塑性边界上的 σ_n 和 σ_s 。由弹塑性边界上应力的法向分量 σ_n 和切向分量 σ_s 的连续性,比较等式两端 θ 的常数项 θ^0 ,一次项 θ^1 及二次项 θ^2 的系数相等得

$$\frac{\tau(a+r_0)}{\sqrt{r_0(2a+r_0)}} = k \quad (3.18)$$

$$\frac{a-r_0}{2(a+r_0)} + \frac{r_0}{2(2a+r_0)} = \frac{r_0}{r_0+L} \quad (3.19)$$

$$\frac{2a^2 r_0 + a^3}{(2a+r_0)^2(a+r_0)} + \frac{2r_2(a+r_0)}{r_0(2a+r_0)} - \frac{2r_2}{a+r_0} = \frac{r_0^2}{(r_0+L)^2} \quad (3.20)$$

我们可以验证,此时弹性应力场(3.1)式在弹塑性边界上正好满足屈服条件(2.2)式的条件。求解(3.18)至(3.20)式可得

$$r_0(t) = x_p(t) = a(\sqrt{k^2/(k^2 - \tau^2)} - 1) \quad (3.21)$$

$$L(t) = a \left[\sqrt{\frac{k^2}{k^2 - \tau^2} \left(\frac{2\tau^2 - k^2}{k^2 - \tau^2} \right) + 1} \right] \quad (3.22)$$

$$\frac{r_2(t)}{r_0(t)} = \sqrt{\frac{k^2 - \tau^2}{k^2}} - \frac{k}{k + \sqrt{k^2 - \tau^2}} \quad (3.23)$$

式中 $r_0(t) = x_p(t)$ 为弹塑性边界在裂纹线上的长度, $a = a(t)$, $\tau = \tau(t)$ 为时间 t 的函数。

由于本文是采用弹性场的精确解与塑性场的通解匹配, 并且没有附加任何近似假定, 因此式(3.21)~(3.23)是足够精确的。

按文[3]的做法, 如果取塑性区应力场的特解(3.10)式与弹性场的精确解(3.1)在裂纹线附近的弹塑性边界上匹配, 就必须假定弹性场沿裂纹线移动了一距离 x_e 。文[3]的结果表明, 随着外载 τ 的增加, x_e 会增加, 当 τ 趋近于 k 时, x_e 会趋于无穷大, 显然这样的结果是不恰当的。

图3是本文的 x_p/a 随 τ/k 的变化和文[1~3]的相应结果的比较。

将(3.23)代入(3.14)和(3.15)我们可以得到裂纹线附近弹塑性边界的单位法向量。本文的结果表明, 随着外载 τ 的逐渐增加, 裂纹线附近弹塑性边界的曲率会逐渐变大, 可以预测, 弹塑性边界的形状会随外载 τ ($\tau \ll k$) 的增加逐渐由近似的圆形变成扁平图形。

由(3.2)和(2.5)式, 我们可以求得弹性区的位移率 w , 由弹性区位移率和塑性区位移率在弹塑性边界上的连续性, 可解得(3.9)式中的待定常数

$$A(t) = (\dot{a} - \dot{L}) \ln(r_0 + L) + (\dot{a} + \dot{r}_0) \quad (3.24)$$

于是由(3.9)和(3.24)式可求得裂纹线上塑性区的应变率, 将求得的应变率对时间 t 积分即得裂纹线上塑性区的应变为 ($t \geq t_p$):

$$\gamma_{yz}(x_1, 0, t) = \frac{k}{G} + \frac{k}{G} \int_{t_p}^t \left\{ \frac{1}{x_1 - a(t) + L(t)} \left[\ln \frac{x_1 - a(t) + L(t)}{r_0(t) + L(t)} \right. \right. \\ \left. \left. \cdot \left(\frac{dL(t)}{dt} - \frac{da(t)}{dt} \right) + \frac{da(t)}{dt} + \frac{dr_0(t)}{dt} \right] \right\} dt \quad (3.25)$$

上式已变换到了固定坐标系中, 式中 $x_1 = x + a(t)$, t_p 为弹塑性边界到达 x_1 且塑性应变开始积累的时间。由(3.25)式可以看出, 塑性应变没有奇异性, 这和以前的结果是完全不同的。以前的结果由于忽略了积分常数 $L(t)$, 因而其结果有奇异性。本文的结果才是正确的。

式(3.25)中的 $\dot{r}_0(t) = dr_0(t)/dt$, $\dot{L}(t) = dL(t)/dt$ 可以通过(3.21)和(3.22)对时间的导数表示成

$$\dot{r}_0(t) = \dot{a} \left[\frac{k}{\sqrt{k^2 - \tau^2}} - 1 \right] + a \left[\frac{\tau k \cdot \dot{\tau}}{(k^2 - \tau^2) \sqrt{k^2 - \tau^2}} \right] \quad (3.26)$$

$$\dot{L}(t) = \dot{a} \left[\frac{k}{\sqrt{k^2 - \tau^2} \left(\frac{2\tau^2 - k^2}{k^2 - \tau^2} \right) + 1} \right] + a \left[\frac{k(2\tau^3 + \tau k^2) \dot{\tau}}{\sqrt{k^2 - \tau^2} \cdot (k^2 - \tau^2)^2} \right] \quad (3.27)$$

其中, $\dot{a} = da/dt$, $\dot{\tau} = d\tau/dt$ 。

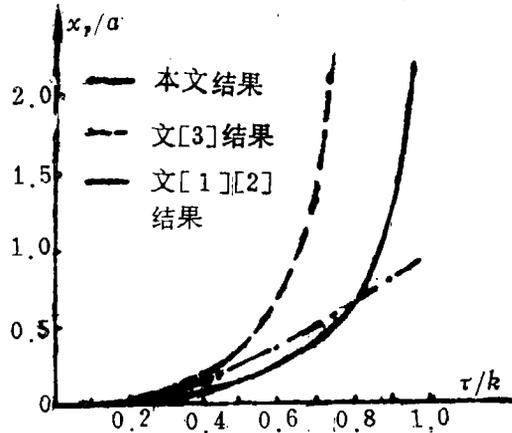


图3 x_p/a 随 τ/k 的变化

定常扩展状态是假想的裂纹稳定扩展过程中的一种理想状态。所谓定常扩展状态是指：对于一个跟随裂尖一起运动的观察者来说，所有各场量是不随时间变化的。显然对于定常扩展状态应该有 $\dot{a}=V=$ 常数， $\dot{r}_0(t)=0$ ， $\dot{L}(t)=0$ 。由(3.26)和(3.27)可知，要同时满足 $\dot{r}_0(t)=0$ 和 $\dot{L}(t)=0$ 是不可能的。因而很多研究者曾专门研究过的定常扩展状态，对本文研究的Ⅲ型准静态扩展裂纹是不存在的。

下面我们对裂纹稳定扩展过程讨论两种重要的特殊情形。

第一种情形是载荷变化率 $\dot{\tau}=0$ 而裂纹继续扩展而不会停止（即 $\dot{a}\neq 0$ ）的情形。当裂纹起裂后，要使裂纹继续扩展就必须不断地增加外载 τ 。但在裂纹扩展过程中，裂纹每扩展一确定的 Δa 长度所需的载荷增长量 $\Delta\tau$ 却将随裂纹的扩展而逐渐降低。当外载 τ 增大到某一极限值 $\tau=\tau_0$ （常数）后，只要保持 $\tau=\tau_0$ 不变，裂纹则会保持继续扩展而不会停止；除非将 τ 降低。因此这种情形非常重要，可以认为 τ_0 为一临界值，它是保持裂纹扩展而不会停止的最小外载。将 $\dot{\tau}=0$ ， $\tau=\tau_0$ 和 $\dot{a}\neq 0$ 代入(3.26)和(3.27)式然后再代入(3.25)式即得此情形裂纹线上塑性区的应变。

第二种情形是保持裂纹以等速 $\dot{a}=V$ （常数）扩展的情形。要使裂纹保持等速扩展，外载必须满足一定条件。将 $\dot{a}=V$ 代入(3.26)和(3.27)式即得此情形的 $\dot{r}_0(t)$ 和 $\dot{L}(t)$ ，然后将 $\dot{r}_0(t)$ ， $r_0(t)$ 和 $\dot{L}(t)$ ， $L(t)$ 代入(3.25)式即得此情形裂纹线上塑性区的应变。

我们可以将McClintock和Irwin^[5]建议的裂纹稳定扩展准则用于本文的问题。这个稳定扩展准则是指：当裂纹前缘一确定距离 x_f 处的塑性应变值达到临界值 ϵ_f 后裂纹就会扩展，如果塑性应变在 $x_1=a(t)+x_f$ 处的值小于 ϵ_f ，则裂纹停止扩展。但所得积分方程较难求解析解，可针对具体问题数值分析或实验研究。

四、结 论

通过本文的分析我们可以得出如下结论：

- (i) 本文的结果在裂纹线附近邻域是足够精确的。
- (ii) 由于以前的分析采用了塑性场的特解，因此其结果是不恰当的。
- (iii) 从式(3.8)和(3.25)我们发现，裂纹线附近塑性区的应力和应变不存在奇异性，这与以前的结果是完全不同的。本文的结果和以前的结果都是在小应变条件下得出的，所得应变应无奇异性。因此本文得到的应变无奇异性的解是合理的，而以前的结果却和小应变条件矛盾。导致以前所得应变奇异性解的根本原因是不恰当地采用了塑性场的特解。
- (iv) 对准静态反平面扩展裂纹，以前曾被许多研究者专门研究过的所谓“定常扩展状态”是不存在的。本文对稳定扩展过程讨论了两种重要和有意义的特殊情形。

参 考 文 献

- [1] Achenbach, J. D. and V. Dunayevsky., Crack growth under plane stress condition in an elastic-perfectly plastic material, *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 32 (1984), 89—100.
- [2] Guo Quan-xin (郭全信) and Li Ke-rong (李克荣), Plastic deformation ahead of a plane stress tensile crack growth in an elastic-perfectly plastic solid, *Engineering Fracture Mechanics*, 28 (1987), 139—146.

- [3] Yi Zhi-jian(易志坚), The more precise crack line analysis for an antiplane quasistatically propagating crack, *International Journal of Fracture*, 55 (1992), R9—R12.
- [4] Yi Zhi-jian(易志坚), The new and analytical solutions for Mode-Ⅲ crack in an elastic-perfectly plastic material, *Engineering Fracture Mechanics*, 42(5) (1992), 833—840.
- [5] McClintock, F. A. and G. R. Irwin, Plastic aspects of fracture mechanics, *Fracture Toughness Testing and Its Application*, ASTM STP 381 (1965), 84—113.

The Precise and New Analysis for a Mode Ⅲ Growing Crack in an Elastic-Perfectly Plastic Solid

Yi Zhi-jian

(*Bridge and Structural Engineering Department, Chongqing Jiaotong Institute, Chongqing*)

Abstract

The near crack line field analysis method has been used to investigate into Mode Ⅲ quasistatically propagating crack in an elastic-perfectly plastic material. The significance of this paper is that the usual small scale yielding theory has been broken through. By obtaining the general solutions of the stresses and the displacement rate of the near crack line plastic region, and by matching the general solutions with the precise elastic fields (not the usual elastic K -dominant fields) at the elastic-plastic boundary, the precise and new solutions of the stress and deformation fields, the size of the plastic region and the unit normal vector of the elastic-plastic boundary have been obtained near the crack line. The solutions of this paper are sufficiently precise near the crack line region because the roughly qualitative assumptions of the small scale yielding theory have not been used and no other roughly qualitative assumptions have been taken either. The analysis of this paper shows that the assuming "steady-state case" for stable crack growth, which has been discussed attentively in previous works, do not exist, and the plastic strains near the crack line do not have singularities. Two most important cases for stable crack growth have been discussed.

Key words quasistatically propagating crack, crack line, elastic-plastic boundary, precise solutions