

# 圆锥形血管中的振荡发展流动\*

岑人经 秦 婵

(华南理工大学, 1991年12月27日收到)

## 摘 要

本文在小锥度角的假设下, 研究了圆锥形血管的非定常振荡的发展流动问题, 导得了相应的速度分布公式。分析表明, 所有收缩的圆锥形血管的流动都是发展流动, 而且锥度角对发展流动的影响随着锥度角的增大而增大。

**关键词** 锥形血管 发展流动 振荡流动

## 一、前 言

关于锥形管道流动问题, 已有不少学者作过研究, 例如 Blasius (1910)、Слезкин (1955)<sup>[1]</sup>、Oka(1964)<sup>[2]</sup>、Wiggert 和 Keitzer (1967)<sup>[3]</sup>、Hall(1974)<sup>[4]</sup>及 Grotberg (1983)<sup>[5]</sup>等人。但所有这些研究, 大都是针对形成流动 (developed flow) 情况进行的, 而从发展流动的情况 (developing flow) 出发来研究锥形血管的尚少见到。众所周知, 实际血管是圆锥形的, 并且 McDonald<sup>[6]</sup> 所作的估算及 Schultz<sup>[7]</sup> 的实验都已证实, 所有大血管的流动都属于入口区域的发展流动。因此, 对哺乳动物血液循环系统而言, 锥形血管发展流动问题的研究具有重要意义。本文在小锥度角的假定下, 研究了锥形血管入口区域内的不定常振荡发展流动问题, 导得了相应的速度分布公式。分析表明, 所有锥形血管中的流动都是发展流动, 也就是说, 在收缩的圆锥形管道中 (converging tapered vessel) 不存在形成流动。由于大血管实际上都是有锥度的, 所以本文的这一结论既与文献[6]、[7]的估算和实验相一致, 还在理论上阐明了大血管的血液流动都是发展流动的原因。

## 二、运动方程与边界条件

假定血液是粘性不可压缩的牛顿流体, 它在圆锥形血管中作轴对称的层流流动。在管道流动中, 通常轴向流速远大于径向流速, 轴向速度沿轴向的变化远小于沿径向的变化。所以, 当忽略体积力的影响, 并采用圆柱坐标系  $(x, r, \theta)$  时, 可直接由 Navier-Stokes 方程和连续性方程得<sup>[8]</sup>

\* 周履推荐。

国家自然科学基金资助项目。

$$\begin{cases} \frac{\partial V_z}{\partial t} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 V_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) \end{cases} \quad (2.1)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial r} = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial V_z}{\partial x} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV_r) \end{cases} \quad (2.3)$$

式中,  $V_z = V_z(r, x, t)$ ,  $V_r = V_r(r, x, t)$ ,  $p = p(x, t)$ ,  $\rho$  是血液密度,  $\nu$  是血液运动粘性系数.

下面按我们研究的情况来确定上述方程组的边界条件.

设血管是一根足够长的、薄壁的、圆锥形的、逐渐缩细的直管, 圆锥管的半顶角(锥度角)  $\beta$  很小, 如图1所示. 据此可得此锥形血管的壁面方程为

$$r = R_0 - \beta x \quad (2.4)$$

再由壁面的不渗透及不滑动 (nonporous and no-slip) 的条件得

$$V_z|_{r=R_0-\beta x} = 0 \quad (2.5)$$

$$V_r|_{r=R_0-\beta x} = 0 \quad (2.6)$$

我们假定血管入口是喇叭形的, 入口处的速度是均匀的, 只随时间作周期性变化, 这样, 其入口条件可表示为

$$V_z|_{x=0} = U_0 \left[ 1 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t) \right] \quad (2.7)$$

$$p|_{x=0} = p_0 \left[ 1 + \sum_{k=1}^n (g_k \cos k\omega t + h_k \sin k\omega t) \right] \quad (2.8)$$

式中,  $U_0$  是血管入口处的特征速度;  $p_0$  是血管入口处流体的压力,  $\omega$  是振荡圆频率,  $a_k, b_k, g_k, h_k$  均为待定常数.

### 三、运动方程的解

为了求解上述非线性方程组(2.1)、(2.2)、(2.3), 我们应用文献[8]的线化方法, 即令

$$U_0 \frac{\partial V_z}{\partial x} \approx V_z \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} \quad (3.1)$$

则方程组(2.1)、(2.2)、(2.3)被线化为

$$\begin{cases} \frac{\partial V_z}{\partial t} + U_0 \frac{\partial V_z}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) \end{cases} \quad (3.2)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial r} = 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial V_z}{\partial x} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV_r) \end{cases} \quad (3.4)$$

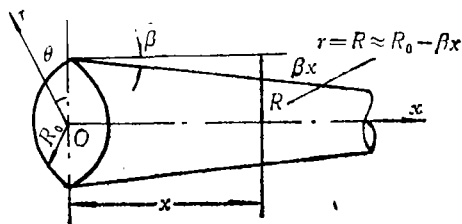


图 1

由于锥形血管中的脉动血流是周期性的振荡流动, 因此可以把它看成是定常流动和振荡流动的组合, 在数学上可表述为<sup>[8]</sup>

$$V_z(r, x, t) = V_{z_1}(r, x) + V_{z_2}(r, x, t) \quad (3.5)$$

$$V_r(r, x, t) = V_{r_1}(r, x) + V_{r_2}(r, x, t) \quad (3.6)$$

$$p(x, t) = p_1(x) + p_2(x, t) \quad (3.7)$$

把式(3.5)、(3.6)、(3.7)分别代入式(3.2)、(3.3)、(3.4)和式(2.5)、(2.6)、(2.7)、(2.8)之后并加以整理便得如下两组线性偏微分方程组:

$$(I) \begin{cases} U_0 \frac{\partial V_{z_1}}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V_{z_1}}{\partial r} \right) \end{cases} \quad (3.8)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial p_1}{\partial r} = 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial V_{z_1}}{\partial x} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_{r_1}) \end{cases} \quad (3.10)$$

相应的边界条件是

$$V_{z_1}|_{r=R_0-\beta x} = 0 \quad (3.11)$$

$$V_{r_1}|_{r=R_0-\beta x} = 0 \quad (3.12)$$

$$V_{z_1}|_{x=0} = U_0 \quad (3.13)$$

$$p_1|_{x=0} = p_0 \quad (3.14)$$

和

$$(II) \begin{cases} \frac{\partial V_{z_2}}{\partial t} + U_0 \frac{\partial V_{z_2}}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_2}{\partial x} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V_{z_2}}{\partial r} \right) \end{cases} \quad (3.15)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial p_2}{\partial r} = 0 \end{cases} \quad (3.16)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial V_{z_2}}{\partial x} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_{r_2}) \end{cases} \quad (3.17)$$

相应的边界条件是

$$V_{z_2}|_{r=R_0-\beta x} = 0 \quad (3.18)$$

$$V_{r_2}|_{r=R_0-\beta x} = 0 \quad (3.19)$$

$$V_{z_2}|_{x=0} = U_0 \sum_{k=1}^n (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t) \quad (3.20)$$

$$p_2|_{x=0} = p_0 \sum_{k=1}^n (g_k \cos k\omega t + h_k \sin k\omega t) \quad (3.21)$$

于是锥形血管中发展流动的求解问题便变成对方程组(I)、(II)的求解问题. 这就是说, 有锥度角的非等圆截面直管的入口区域内的血液流动问题可以用两个数学模型来描述: 一个是定常流动的数学模型, 一个是非定常流动的数学模型. 从数学角度来看, 这种描述方式和无锥度角的等圆截面直管中的入口区域内的血液流动是基本相同的, 但是两者的边界条件是截然不同的. 也就是说, 锥度角对血液流动的影响是通过边界条件来体现的. 应用虚宗量 Bessel 函数方法<sup>[8]</sup>, 分别对方程组(I)和(II)求出满足边界条件(3.11)~(3.14)和(3.18)~(3.21)的解, 便可求得 $V_{z_1}$ 和 $V_{z_2}$ , 再由式(3.5)便可进一步求得锥形血管入口区域中血液

的发展流动的轴向速度分布公式为

$$\begin{aligned}
 \frac{V_z}{U_0} = & 2 \left[ 1 - \frac{r^2}{(1 - \beta x/R_0)^2 R_0^2} \right] - 4 \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{y_q^2} \left( 1 - \frac{J_0[y_q r/R_0(1 - \beta x/R_0)]}{J_0(y_q)} \right) \\
 & \cdot \exp \left( - \frac{y_q^2 x}{(1 - \beta x/R_0)^2 R_n R_0} \right) + \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=1}^n (a_k - i b_k) \exp(i k \omega t) \right. \\
 & \cdot \left( 1 + \frac{1}{J_2[\sqrt{i^3 k} \alpha (1 - \beta x/R_0)]} \left[ J_0(\sqrt{i^3 k} \alpha r/R_0) \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{2 J_1[\sqrt{i^3 k} \alpha (1 - \beta x/R_0)]}{(1 - \beta x/R_0) \sqrt{i^3 k} \alpha} \right] \right) \left. \right\} \\
 & + 2 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=1}^n \sum_{q=1}^{\infty} \frac{y_q (a_k - i b_k) (J_0[y_q r/R_0(1 - \beta x/R_0)] - 2 J_1(y_q)/y_q)}{[y_q^2 + i k \alpha^2 (1 - \beta x/R_0)^2] J_1(y_q)} \right. \\
 & \left. \cdot \exp \left( - \frac{y_q^2 + i k \alpha^2 (1 - \beta x/R_0)^2 x}{(1 - \beta x/R_0)^2 R_n R_0} + i k \omega t \right) \right\} \quad (3.22)
 \end{aligned}$$

式中,  $y_q$  是二阶第一类 Bessel 函数的根,  $J_0, J_1, J_2$  分别是零阶、一阶、二阶第一类 Bessel 函数,  $\alpha = R_0 \sqrt{\omega/\nu}$  是 Womersley 数,  $R_n = U_0 R_0/\nu$  是 Reynolds 数,  $\operatorname{Re}$  是对函数取实部的符号。显然, 分别应用式(3.2)、(3.4)便可求得径向速度  $V_r$  和压力  $p$ , 这个问题我们将在另一篇文章中叙述。

#### 四、结果的分析与讨论

##### 1. 结果的比较

(a) 由式(3.22)看出, 当忽略锥度角  $\beta$  (即  $\beta=0$ ) 时, 式(3.22)变为

$$\begin{aligned}
 \frac{V_z}{U_0} = & 2 \left[ 1 - \frac{r^2}{R_0^2} \right] - 4 \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{y_q^2} \left( 1 - \frac{J_0(y_q r/R_0)}{J_0(y_q)} \right) \exp \left( - \frac{y_q^2 x}{R_n R_0} \right) \\
 & + \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=1}^n (a_k - i b_k) \exp(i k \omega t) \left( 1 + \frac{1}{J_2(\sqrt{i^3 k} \alpha)} \left[ J_0(\sqrt{i^3 k} \alpha r/R_0) \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{2 J_1(\sqrt{i^3 k} \alpha)}{\sqrt{i^3 k} \alpha} \right] \right) \right\} + 2 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=1}^n \sum_{q=1}^{\infty} \frac{y_q (a_k - i b_k)}{(y_q^2 + i k \alpha^2) J_1(y_q)} \right. \\
 & \left. \cdot \left( J_0(y_q r/R_0) - \frac{2 J_1(y_q)}{y_q} \right) \exp \left( - \frac{y_q^2 + i k \alpha^2 x}{R_n R_0} + i k \omega t \right) \right\} \quad (4.1)
 \end{aligned}$$

这和文献[8]给出的无锥度角的等圆截面直管的速度分布公式是完全一致的。

(b) 当取为定常流动情况, 即当取各物理量和时间  $t$  无关时, 式(3.22)变为

$$\frac{V_z}{U_0} = 2 \left[ 1 - \frac{r^2}{(1 - \beta x/R_0)^2 R_0^2} \right]$$

$$-4 \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{y_q^2} \left( 1 - \frac{J_0[y_q r/R_0(1-\beta x/R_0)]}{J_0(y_q)} \right) \exp\left(-\frac{y_q^2 x}{(1-\beta x/R_0)^2 R_n R_0}\right) \quad (4.2)$$

这和文献[9]给出的锥形血管中定常血流的发展流动速度分布公式是完全一致的。

(c) 当取为定常流动状态且忽略锥度角的影响时,即在公式(3.22)中取所有物理量与时间 $t$ 无关,且令 $\beta=0$ ,则有:

$$\frac{V_z}{U_0} = 2 \left[ 1 - \frac{r^2}{R_0^2} \right] - 4 \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{y_q^2} \left( 1 - \frac{J_0(y_q r/R_0)}{J_0(y_q)} \right) \exp\left(-\frac{y_q^2 x}{R_n R_0}\right) \quad (4.3)$$

式(4.3)和文献[10]中的等圆截面直管的定常发展流动的  $\text{Tapr}^{[10]}$  公式也是完全一致的。

(d) Atabek 等人<sup>[11]</sup>曾对无锥度的等圆截面直管的发展流动得出一组实验曲线,对本文公式(3.22)进行数值计算,结果表明本文公式当 $\beta=0$ 时的计算曲线与 Atabek 的实验曲线是相当吻合的,如图2所示。

## 2. 结果的分析

(a) 由式(3.22)看出, $\beta x/R_0 \neq 1$ ,即 $x \neq R_0/\beta$ ,否则式(3.22)没有意义。那么 $x$ 的取值范围如何?由图1看到,要使锥形管流动有意义,必须保持 $r > 0$ ,即

$$\begin{aligned} R_0 - \beta x &> 0 \\ \text{或} \quad x &< R_0/\beta \end{aligned} \quad (4.4)$$

这表明收缩的圆锥形直管的有效长度是由该管入口截面的半径和锥度角两者确定的,锥度角越大,其有效长度越短。

(b) 由形成流动的定义可知,流体在管道中的流动是形成流动的充要条件是 $\partial V_z/\partial x = 0$ ,但由式(3.22)看出,在任何情况下,由于式中都有一项与 $x$ 相关(因为不存在 $\beta=0$ 的情况),因此在任何情况下都存在 $\partial V_z/\partial x \neq 0$ 。这表明在任何情况下,在收缩的圆锥形管中的发展流动都不可能变成为形成流动,或者说,所有收缩的圆锥形直管的流动都是发展流动。

关于这一结论可作如下的物理解释:

① 收缩的圆锥形管的圆截面积是沿轴向而逐渐减少的。由连续性方程知,为了保持通过每个截面的流量相等,其沿轴向的每个截面的中心流速必须越来越大,因而不存在 $\partial V_z/\partial x = 0$ 这一情况。

② 由于圆锥形管是有限长度管(见式(4.4)),而发展流动所在的入口区域长度通常又是相当长的,这一入口长度实际上比之圆锥形管的有效长度还要长。所以圆锥形管中的流动无法出现形成流动。

③ 式(4.4)改用无量纲形式,则可表示为

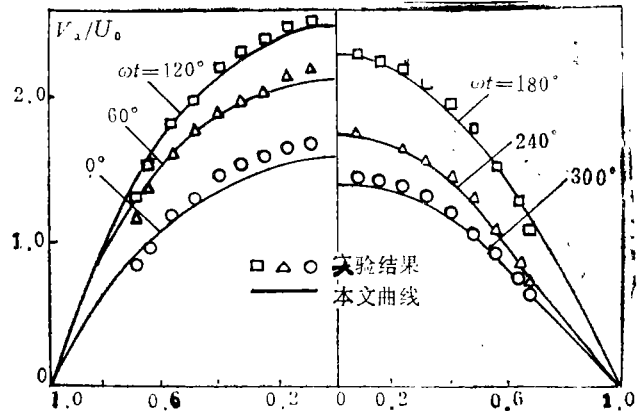


图2 轴向速度分布( $x/R_n R_0=0.115$ ,  $\alpha=5$ ,  $\beta=0^\circ$ )

$$\frac{x}{R_n R_0} < \frac{1}{\beta R_n} \tag{4.5}$$

由形成流动与发展流动的关系可知，它们同时存在于同一管道的情况是，当 $x/R_n R_0 \rightarrow \infty$ 时，发展流动才变为形成流动。但是，从式(4.5)看到，若要使 $x/R_n R_0 \rightarrow \infty$ ，则必须存在 $\beta \rightarrow 0$ ，但此时锥形管就变成无锥度管（即等圆截面直管）了。反过来说，由于 $\beta \neq 0$ ，就不存在 $x/R_n R_0 \rightarrow \infty$ 的情况（这时不等式(4.5)的右端是一有限值），这说明在收缩的锥形管中不存在形成流动，也就是说，所有收缩的锥形管的流动都是发展流动！

(c) 关于大血管中的血液流动都是发展流动这一事实曾由McDonald(1964)<sup>[6]</sup>作出的一个近似计算予以确认，还由Schultz(1972)<sup>[7]</sup>对主动脉的血流速度分布进行的实验测量获得验证。但对这一事实产生的原因却尚未有人论证过。鉴于大血管都是有锥度的收缩的圆管，因此，本文的上述结果分析，可以认为是对大血管中的血液流动是发展流动的原因所作出的理论上的论证。

### 3. 锥度角对流场的影响

为了分析锥度角对流场的影响，我们在 $\beta=0^\circ, 0.25^\circ, 0.50^\circ, 0.75^\circ; \alpha=5; n=1;$   
 $a_1=-0.123, b_1=0.321$ 等条件下对本文公式(4.22)作了数值计算，得到了几组锥形血管中

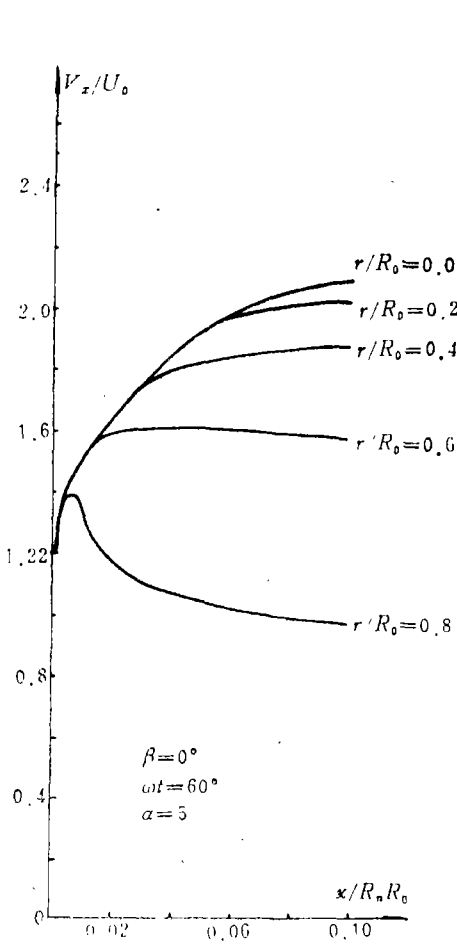


图3  $\beta=0^\circ$ 时轴向速度分布

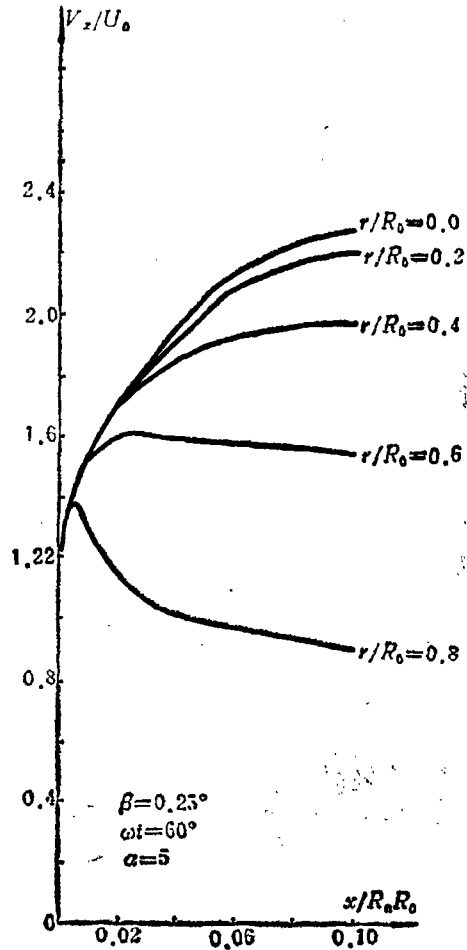


图4  $\beta=0.25^\circ$ 时轴向速度分布

血流速度沿管轴方向变化的曲线,如图3、4、5、6所示。对这些曲线进行分析比较可以看出:

(a) 各组曲线的斜率随着 $\beta$ 角的增大而增大,这表明发展流动的轴向速度沿轴向的变化是随着 $\beta$ 角的增大而增大的。

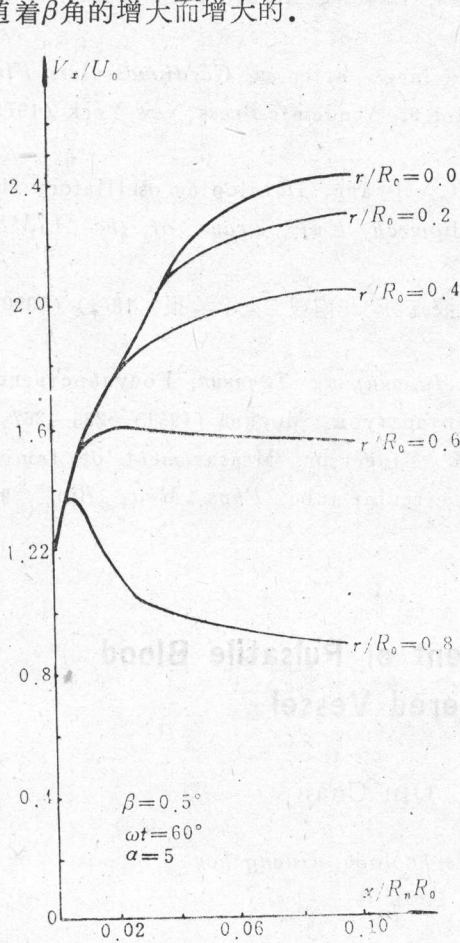


图5  $\beta=0.5^\circ$ 时轴向速度分布

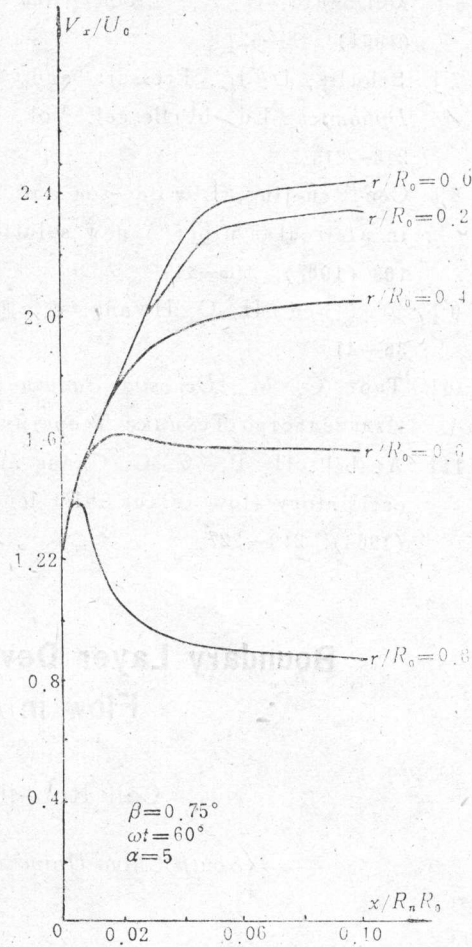


图6  $\beta=0.75^\circ$ 时轴向速度分布

(b) 每组曲线族中的各条曲线间的间距是随着 $\beta$ 角的增大而增大。这表明发展流动的轴向速度沿径向的变化(即各流层间的轴向速度的变化)随 $\beta$ 角的增大而增大。

(c)  $\beta$ 角对流场速度的上述影响,当 $\beta < 0.5^\circ$ 时,尚不太明显;但当 $\beta \geq 0.5^\circ$ 时,这种影响就会变得很显著。

### 参 考 文 献

- [1] Слезкин Н. А., *Динамика Вязкой Несжимаемой Жидкости*, Государственное Издательство Техничко-Теоретической Литературы, Москва (1955), 350—384.
- [2] Ока, S., The steady slow motion of a viscous fluid through a tapered tube, *J. Phys. Soc. Japan*, 19(8) (1964), 1481—1484.
- [3] Wiggert, D. C. and W. F. Keitzer, Pulsatile flow in cylindrical and tapered rubber tubing, *Biomechanics Monograph*, ASME, (1967), 125—136.
- [4] Hall, P., Unsteady viscous flow in a slowly varying cross-section, *J. Fluid*

- Mech.*, 64 (1974), 209—226.
- [ 5 ] Grotberg, J.B., Oscillatory flow in a tapered channel, *Biomechanics Symposium*, AMD-Vol. 56, ASME (1983), 95—96.
- [ 6 ] McDonald, D. A., *Blood Flow in Arteries*, Edward Arnold Publishers, London (1964), 48—52.
- [ 7 ] Schultz, D. L., Pressure and flow in large arteries, *Cardiovascular Fluid Dynamics*, Ed. by Bergel, Vol. I, Chapter 9, Academic Press, New York (1972), 213—215.
- [ 8 ] Cen Ren-jing, Liu Bao-sen and Ned H. C. Hwang, Developing oscillatory flow in a circular pipe: A new solution, *J. Biomech. Eng., Trans. of the ASME*, 109 (1987), 340—345.
- [ 9 ] 秦婵, Ned H. C. Hwang, 锥形血管中的血液流动, 华南理工大学学报, 18(1) (1990), 35—41.
- [ 10 ] Тарг С. М., *Основные Задачи Теории Ламинарных Течений*, Государственное Издательство Техничко-Теоретической Литературы, Москва (1951), 225—267.
- [ 11 ] Atabek, H. B., C. C. Chang and L. M. Fingerson, Measurement of laminar oscillatory flow in the inlet length of a circular tube, *Phys. Med. Biol.*, 9(2) (1964), 219—227.

## Boundary Layer Development of Pulsatile Blood Flow in a Tapered Vessel

Cen Ren-jing      Qin Chan

(South China University of Technology, Guangzhou)

### Abstract

Assuming that the tapered angle is small, the problems of developing flow under unsteady oscillatory condition are studied in this paper. The formula of velocity distribution is obtained. The analyses for the results show that the blood flow in a converging tapered vessel remains a developing flow throughout the length, and the effects of tapered angle on the developing flow are increased with the increment of the tapered angle.

**Key words** tapered vessel, developing flow, blood flow, oscillatory flow