应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

控制系统实的第二标准型绝对稳定的显式准则*

高国成

(山东矿业学院济南分院，1990年11月12日收到)

摘　要

本文给出的非线性控制系统实的第二标准型绝对稳定的显式准则，包含并改进了文[1]所得到的判别准则。将本文准则应用于著名的飞机纵向运动方程，所得结果包含并改进了文[1,2,3,4]中所得到的相应结论。

关键词　自治系统　非线性控制系统　运动方程　正定函数　绝对稳定性

一、引　理

考虑控制系统实的第二标准型[5]

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}&=Ax+e\sigma\\ \dot{\sigma}&=\beta^T x-p\sigma-rf(\sigma)\end{aligned}\right\}\tag{1.1}$$

其中$x^T=(x_1,\cdots,x_n)$，$\beta^T=(\beta_1,\cdots,\beta_n)$，$e^T=(1,\cdots,1)$，$A=\mathrm{diag}(-\rho_1,\cdots,-\rho_n)$，$\rho_i>0$，$\beta_i$为实数$(i=1,\cdots,n)$，$p>0$，$r>0$；$f(\sigma)$连续，满足$f(0)=0$；$\sigma f(\sigma)>0(\sigma\neq0)$。

下列著名的飞机纵向运动方程[5]是(1.1)的特例

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_i&=-\rho_i x_i+\sigma\qquad(i=1,2,3,4)\\ \dot{\sigma}&=\sum_{i=1}^{4}\beta_i x_i-rp_2\sigma-f(\sigma)\end{aligned}\right\}\tag{1.2}$$

其中　$\rho_i>0$，β_i为实数$(i=1,2,3,4)$，$rp_2>0$，$f(\sigma)$连续，满足$f(0)=0$；$\sigma f(\sigma)>0(\sigma\neq0)$。

引理1[1]　系统(1.1)平凡解绝对稳定的一个必要条件是

$$p-\sum_{i=1}^{n}\frac{\beta_i}{\rho_i}\geqslant0\tag{1.3}$$

引理2[1]　如果在系统(1.1)中，$\beta_i\neq0(i=1,\cdots,m)$，$\beta_j=0(j=m+1,\cdots,n;\ 1\leqslant m\leqslant n)$，那么系统(1.1)平凡解绝对稳定性与下列系统平凡解的绝对稳定性等价：

---

* 李骊推荐。

$$\left.\begin{aligned}&\dot{x}_i=-\rho_i x_i+\sigma \qquad (\rho_i>0, i=1,\cdots,m)\\&\dot{\sigma}=\sum_{i=1}^{m}\beta_i x_i-p\sigma-rf(\sigma) \qquad (p>0,\ r>0)\end{aligned}\right\}$$

对于给定的正定对称矩阵B和常数 $\varepsilon\geqslant0$，$\alpha\geqslant0$，$K>0$，选取(1.1)的正定无穷大V函数如下：

$$V=x^TGx+\alpha(\beta^TA^{-1}x-\sigma)^2+K\sigma^2+2\varepsilon\int_0^\sigma f(\sigma)d\sigma \tag{1.4}$$

其中 $A^TG+GA=-B$。

令$p_1=p-\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\beta_i}{\rho_i}$，$u_1^T=K\beta^T+\alpha p_1\beta^TA^{-1}+c^TG$；$u_2^T=\varepsilon\beta^T+r\alpha\beta^TA^{-1}$；

$$R=\begin{pmatrix}2\varepsilon r & \alpha r+Kr+\varepsilon p & -u_2^T\\ \alpha r+Kr+\varepsilon p & 2(\alpha p_1+Kp) & -u_1^T\\ -u_2 & -u_1 & B\end{pmatrix},\quad h=\begin{cases}\dfrac{f(\sigma)}{\sigma} & (\sigma\neq0)\\ 0 & (\sigma=0)\end{cases};$$

$$Q(h)=\begin{pmatrix}2\varepsilon rh^2+2(\alpha r+Kr+\varepsilon p)h+2(\alpha p_1+Kp) & -hu_2^T-u_1^T\\ -hu_2-u_1 & B\end{pmatrix}$$

计算得：

$$-\dot{V}|_{(1.1)}=\begin{pmatrix}f(\sigma)\\ \sigma\\ x\end{pmatrix}^T R\begin{pmatrix}f(\sigma)\\ \sigma\\ x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sigma\\ x\end{pmatrix}^T Q(h)\begin{pmatrix}\sigma\\ x\end{pmatrix}$$

若用 $R\binom{i}{j}$表示从矩阵R中去掉第i行和第j列后得到的子矩阵，则有[6]

$$\det Q(h)=h^2\det R\binom{2}{2}+2h\det R\binom{1}{2}+\det R\binom{1}{1}$$

引理3 系统(1.1)平凡解绝对稳定的充分条件是下列各式同时成立：

(1) $$\det R\binom{1}{1}=\det\begin{pmatrix}2(\alpha p_1+Kp) & -u_1^T\\ -u_1 & B\end{pmatrix}\geqslant0 \tag{1.5}$$

(2) $$\det R\binom{2}{2}=\det\begin{pmatrix}2\varepsilon r & -u_2^T\\ -u_2 & B\end{pmatrix}\geqslant0 \tag{1.6}$$

(3) $$\det R\binom{1}{2}=\det\begin{pmatrix}\alpha r+Kr+\varepsilon p & -u_1^T\\ -u_2 & B\end{pmatrix}>0 \tag{1.7}$$

二、判别准则

准则 Ⅰ[7] 若β_i不变号($i=1,\cdots,n$)，那么系统(1.1)平凡解绝对稳定的充要条件是：

$$p_1\geqslant0 \tag{2.1}$$

若在系统(1.1)中β_i变号，不失一般性可设β_i已排成如下的顺序：

$$\left.\begin{aligned}&\beta_1>0,\cdots,\beta_s>0;\ \beta_{s+1}<0,\cdots,\beta_m<0;\\&\beta_{m+1}=\cdots=\beta_n=0 \quad (1\leqslant s<m\leqslant n)\end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

准则 Ⅱ[7] 如果在系统(1.1)中，β_i 具有 (2.2) 所示的符号且 $\rho_1=\cdots=\rho_m$，那么系统

(1.1)平凡解绝对稳定的充分条件是：

$$p_1>0 \tag{2.3}$$

若在系统(1.1)中，β_l具有(2.2)所示的符号。

令 $\Lambda_j=\left\{\lambda \mid \lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_s),\ \lambda_l\text{取0或1且满足}\sum_{l=1}^{s}\frac{\lambda_l\beta_l}{\rho_l}+\frac{\beta_j}{\rho_j}\leqslant 0\right\}$;

$$t_{1j}=\sum_{l=1}^{s}\frac{\beta_l}{\rho_l(\rho_l+\lambda_l\rho_j)};\quad t_{2j}=\sum_{l=1}^{s}\frac{\beta_l}{\rho_l+\lambda_l\rho_j};$$

$$t_{3j}=\sum_{l=1}^{s}\frac{\rho_l\beta_l}{(\rho_l+\lambda_l\rho_j)^2};\quad a_{0j}=\beta_j+\sum_{l=1}^{s}\frac{\rho_j\lambda_l\beta_l}{\rho_l};$$

$$b_{0j}=\frac{\beta_j}{\rho_j}+\sum_{l=1}^{s}\frac{\rho_j\lambda_l\beta_l}{\rho_l^2};\quad q_j=-2\rho_j a_{0j};$$

$$a_{1j}=\sum_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{m}\frac{|\beta_l|}{2\rho_l};\quad b_{1j}=\sum_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{m}\frac{|\beta_l|}{2\rho_l^3};$$

$$c_{1j}=\sum_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{m}\frac{|\beta_l|}{2\rho_l^2};\quad A_j=q_ja_{1j}+a_{0j}^2;$$

$$B_j=q_jb_{1j}+b_{0j}^2;\quad C_j=q_jc_{1j}+a_{0j}b_{0j};$$

$$t'_{1j}=A_j[q_j(1+t_{1j})-C_j];$$

$$t'_{2j}=q_j\left(t_{2j}-\sum_{l=1}^{m}\frac{\beta_l}{\rho_l}\right)-A_j;$$

$$\Delta_{0j}=A_j[A_j-2q_j(t_{2j}-t_{3j})];\quad \Delta_{1j}=(A_jB_j-C_j^2)(A_jB_j\Delta_{0j}-t'^2_{1j});$$

$$\Delta_{2j}=(\sqrt{A_jB_j}-C_j)[2\sqrt{A_jB_j}\,\Delta_{0j}-(\sqrt{A_jB_j}+C_j)t'^2_{2j}]$$

$$M_{j\lambda}=\begin{cases}t_{2j}-a_{1j}-\sum_{l=1}^{m}\frac{\beta_l}{\rho_l}+\sqrt{a_{1j}[a_{1j}-2(t_{2j}-t_{3j})]}, & \text{当}a_{0j}=0\text{时}\\[2mm]\frac{t'_{2j}+\sqrt{\Delta_{0j}}}{q_j}, & \text{当}a_{0j}<0,\ t'_{1j}\leqslant -C_j\sqrt{\Delta_{0j}}\text{时}\\[2mm]\frac{A_jB_jt'_{2j}-C_jt'_{1j}+\sqrt{\Delta_{1j}}}{q_jA_jB_j}, & \text{当}a_{0j}<0,-C_j\sqrt{\Delta_{0j}}<t'_{1j}\leqslant\frac{(\sqrt{A_jB_j}+C_j)t'_{2j}+\sqrt{\Delta_{2j}}}{2}\text{时}\\[2mm]\frac{(\sqrt{A_jB_j}-C_j)(\Delta_{0j}-t'^2_{2j})}{2q_j(t'_{1j}-\sqrt{A_jB_j}\,t'_{2j})}, & \text{当}a_{0j}<0,t'_{2j}\leqslant 0,\ t'_{1j}>\frac{(\sqrt{A_jB_j}+C_j)t'_{2j}+\sqrt{\Delta_{2j}}}{2}\text{时}\\[2mm]\frac{(\sqrt{A_jB_j}-C_j)(\Delta_{0j}-t'^2_{2j})}{2q_j(t'_{1j}-\sqrt{A_jB_j}\,t'_{2j})}, & \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
\text{当}\, a_{0j}<0,\, t'_{2j}>0,\ \dfrac{(\sqrt{A_jB_j}+C_j)t'_{1j}+\sqrt{\Delta_{2j}}}{2}<t'_{1j}<\dfrac{\sqrt{A_jB_j}(\Delta_{0j}+t'^{2}_{2j})}{2t'_{2j}}\ \text{时} \\
\dfrac{(\sqrt{A_jB_j}-C_j)t'_{2j}}{q_j\sqrt{A_jB_j}},\quad \text{当}\, a_{0j}<0,\, t'_{2j}>0,\, t'_{1j}\geqslant\dfrac{\sqrt{A_jB_j}(\Delta_{0j}+t'^{2}_{2j})}{2t'_{2j}}\ \text{时}
\end{cases}
$$

其中 $j=s+1,\cdots,m$。

$$M_i=\left\{\mu \mid \mu=(\mu_{s+1},\cdots,\mu_m),\ \mu_l\text{取0或1且满足}\sum_{l=s+1}^{m}\frac{\mu_l\beta_l}{\rho_l}+\frac{\beta_i}{\rho_i}\geqslant 0\right\};$$

$$t_{1i}=\sum_{l=s+1}^{m}\frac{\beta_l}{\rho_l(\rho_i+\mu_l\rho_i)};\quad t_{2i}=-\sum_{l=s+1}^{m}\frac{\rho_i\beta_l}{\rho_l(\rho_i+\mu_l\rho_i)};$$

$$t_{3i}=-\sum_{l=s+1}^{m}\frac{\mu_l\rho_i\beta_l}{(\rho_i+\rho_l)^2};\quad a_{0i}=\beta_i+\sum_{l=s+1}^{m}\frac{\mu_l\rho_i\beta_l}{\rho_l};$$

$$b_{0i}=\frac{\beta_i}{\rho_i}+\sum_{l=s+1}^{m}\frac{\mu_l\rho_i\beta_l}{\rho_l^2};\quad q_i=2\rho_i a_{0i};$$

$$a_{1i}=\sum_{\substack{l=1\\ l\neq i}}^{m}\frac{|\beta_l|}{2\rho_l};\quad b_{1i}=\sum_{\substack{l=1\\ l\neq i}}^{m}\frac{|\beta_l|}{2\rho_l^3};$$

$$c_{1i}=\sum_{\substack{l=1\\ l\neq i}}^{m}\frac{|\beta_l|}{2\rho_l^2};\quad A_i=q_i a_{1i}+a_{0i}^2;$$

$$B_i=q_i b_{1i}+b_{0i}^2;\quad C_i=q_i c_{1i}+a_{0i}b_{0i};$$

$$t'_{1i}=A_i[q_i(1+t_{1i})+C_i];\quad t'_{2i}=q_i t_{2i}-A_i;$$

$$\Delta_{0i}=A_i(A_i-2q_i t_{3i});\quad \Delta_{1i}=(A_iB_i-C_i^2)(A_iB_i\Delta_{0i}-t'^{2}_{1i});$$

$$\Delta_{2i}=(\sqrt{A_iB_i}-C_i)[2\sqrt{A_iB_i}\,\Delta_{0i}-(\sqrt{A_iB_i}+C_i)t'^{2}_{1i}]$$

$$
N_{i\mu}=\begin{cases}
t_{2i}-a_{1i}+\sqrt{a_{1i}(a_{1i}-2t_{3i})}, & \text{当}\, a_{0i}=0\ \text{时} \\
\dfrac{t'_{2i}+\sqrt{\Delta_{0i}}}{q_i}, & \text{当}\, a_{0i}>0,\ t'_{1i}\leqslant -C_i\sqrt{\Delta_{0i}}\ \text{时} \\
\dfrac{A_iB_it'_{2i}-C_it'_{1i}+\sqrt{\Delta_{1i}}}{q_iA_iB_i}, & \text{当}\, a_{0i}>0,\ -C_i\sqrt{\Delta_{0i}}<t'_{1i}\leqslant\dfrac{(\sqrt{A_iB_i}+C_i)t'_{2i}+\sqrt{\Delta_{2i}}}{2}\ \text{时} \\
\dfrac{(\sqrt{A_iB_i}-C_i)(\Delta_{0i}-t'^{2}_{2i})}{2q_i(t'_{1i}-\sqrt{A_iB_i}\,t'_{2i})}, & \text{当}\, a_{0i}>0,\ t'_{2i}\leqslant 0,\ t'_{1i}>\dfrac{(\sqrt{A_iB_i}+C_i)t'_{2i}+\sqrt{\Delta_{2i}}}{2}\ \text{时} \\
\dfrac{(\sqrt{A_iB_i}-C_i)(\Delta_{0i}-t'^{2}_{2i})}{2q_i(t'_{1i}-\sqrt{A_iB_i}\,t'_{2i})}, &
\end{cases}
$$

$$\begin{cases} \text{当} a_{0i}>0,\ t'_{2i}>0,\ \dfrac{(\sqrt{A_iB_i}+C_i)t'_{2i}+\sqrt{\Delta_{2i}}}{2}<t'_{1i}<\dfrac{\sqrt{A_iB_i}(\Delta_{0i}+t'^2_{2i})}{2t'_{2i}} \text{时} \\ \dfrac{(\sqrt{A_iB_i}-C_i)t'_{2i}}{q_i\sqrt{A_iB_i}}, \quad \text{当} a_{0i}>0,\ t'_{2i}>0,\ t'_{1i}\geqslant\dfrac{\sqrt{A_iB_i}(\Delta_{0i}+t'^2_{2i})}{2t'_{2i}} \text{时} \end{cases}$$

其中　$i=1,\cdots,s$。

准则Ⅲ　如果在系统(1.1)中，β_i具有(2.2)所示的符号，且$\rho_i(i=1,\cdots,m)$ 不全相等，那么下列两条件之一成立时，(1.1)的平凡解为绝对稳定。

(i)　$$P_1>\min_{s+1\leqslant j\leqslant m}\ \min_{\lambda\in\Lambda_j} M_{j\lambda} \tag{2.4}$$

(ii)　$$p_1>\min_{1\leqslant i\leqslant s}\ \min_{\mu\in M_i} N_{i\mu} \tag{2.5}$$

由于Λ_j，M_i都是布尔数组集，且都只有有限个点。因此当ρ_i，β_i，p给定时，用计算机来判断条件(2.4)和(2.5)是很方便的。

文[2]给出的系统(1.1)平凡解绝对稳定的充分条件为

$$p-\sum_{i=1}^{n}\frac{1+\operatorname{sgn}\beta_i}{2\rho_i}\beta_i>0 \tag{2.6}$$

文[1]给出的系统(1.1)平凡解绝对稳定的判别准则为：

1°　当β_i不变号时，(1.1)平凡解绝对稳定的充要条件是

$$p-\sum_{i=1}^{n}\frac{\beta_i}{\rho_i}\geqslant 0 \tag{2.7}$$

2°　当β_i变号且已排成(2.2)顺序时，那么下列两条件之一成立时，(1.1)的平凡解为绝对稳定。

(i)　$$p-\min_{s+1\leqslant j\leqslant m}\ \min_{\lambda\in\Lambda_j}\sum_{i=1}^{s}\frac{\beta_i\rho_i}{(\rho_i+\lambda_i\rho_j)^2}>0 \tag{2.8}$$

(ii)　$$p-\sum_{i=1}^{s}\frac{\beta_i}{\rho_i}-\min_{1\leqslant i\leqslant s}\ \min_{\mu\in M_i}\sum_{j=s+1}^{m}\frac{\mu_j\beta_j(2\rho_i+\rho_j)}{(\rho_i+\rho_j)^2}>0 \tag{2.9}$$

因 $$M_{j\lambda}\leqslant t_{2j}-a_{1j}-\sum_{l=1}^{m}\frac{\beta_l}{\rho_l}+\sqrt{a_{1j}[a_{1j}-2(t_{2j}-t_{3j})]}$$

$$\leqslant t_{2j}-a_{1j}-\sum_{l=1}^{m}\frac{\beta_1}{\rho_l}+a_{1j}-(t_{2j}-t_{3j})=-\sum_{l=1}^{m}\frac{\beta_l}{\rho_l}+\sum_{l=1}^{s}\frac{\rho_l\beta_l}{(\rho_l+\lambda_l\rho_j)^2},$$

$$N_{i\mu}\leqslant t_{2i}-a_{1i}+\sqrt{a_{1i}(a_{1i}-2t_{3i})}$$

$$\leqslant t_{2i}-a_{1i}+a_{1i}-t_{3i}=-\sum_{l=s+1}^{m}\frac{\beta_l}{\rho_l}+\sum_{l=s+1}^{m}\frac{\mu_l(2\rho_i+\rho_l)\beta_l}{(\rho_i+\rho_l)^2}$$

所以我们的准则Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ包含和改进了文[1]的判别准则从而也包含和改进了文[2]中关于(1.1)的平凡解绝对稳定的充分准则(2.6)。

将本节中的准则直接应用于飞机纵向运动方程 (1.2)，就得到飞机纵向运动方程的绝对

稳定性准则。所得结论包含并改进了文[1]从而也包含和改进了文[2,3,4]中关于(1.2)的绝对稳定性准则。

考虑文[1]中的例子：$\beta_1=5$，$\rho_1=9$，$\beta_2=4$，$\rho_2=8$；$\beta_3=-2$，$\rho_3=6$；$\beta_4=-3$，$\rho_4=15$。当$rp_2\leqslant 0.7770138$ 时，文[1,2,3,4]的判别准则均失效。而利用本文的判别准则Ⅱ($n=4$，$p=rp_2$)得到系统平凡解绝对稳定的充分条件为($i=1,\mu=(1,1)$)$rp_2>0.523054740$。由引理1给出的系统平凡解不绝对稳定的条件是$rp_2<47/90=0.5\dot{2}$。

本文准则由系统参数直接给出实用方便，若借助于计算机则较易判断。

三、判别准则的证明

准则Ⅱ的证明：根据引理2，我们只需证当$m=n$时准则成立即可。现设$m=n$。

(i) 当(2.4)成立时，不妨设

$$\min_{s+1\leqslant j\leqslant n}\min_{\lambda\in\Lambda_j}M_{j\lambda}=\min_{\lambda\in\Lambda_n}M_{n\lambda}=M_{n\bar{\lambda}}$$

这里 $\bar{\lambda}\in\Lambda_n$。为避免记号过于复杂仍记$\bar{\lambda}=\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_s)$。取

$$B=\begin{pmatrix}2\rho_1\beta_1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & (\rho_1+\rho_n)g_{1n}\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & \cdots & 2\rho_s\beta_s & 0 & \cdots & 0 & (\rho_s+\rho_n)g_{sn}\\ 0 & \cdots & 0 & 2\rho_{s+1}|\beta_{s+1}| & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 2\rho_{n-1}|\beta_{n-1}| & 0\\ (\rho_1+\rho_n)g_{1n} & \cdots & (\rho_s+\rho_n)g_{sn} & 0 & \cdots & 0 & 2\rho_n|\beta_n|\end{pmatrix}$$

这里
$$g_{in}=\begin{cases}-\dfrac{2\theta_i\sqrt{\beta_i\rho_i|\beta_n|\rho_n}}{(\rho_i+\rho_i)} & (\text{当}i=1,2,\cdots,s\text{时})\\ 0 & (\text{当}i=s+1,\cdots,n\text{时})\end{cases}$$

θ_i 待定且满足$\sum_{i=1}^{s}\theta_i^2<1$。

由于 $2\rho_n|\beta_n|-\sum_{i=1}^{s}\dfrac{(\rho_i+\rho_n)^2g_{in}^2}{2\rho_i\beta_i}=2\rho_n|\beta_n|\left(1-\sum_{i=1}^{s}\theta_i^2\right)>0$故$B$正定。

1° $a_{0n}<0$。取$\theta_i=\dfrac{\lambda_i\sqrt{\beta_i\rho_i|\beta_n|}\rho_n}{|\beta_n|\rho_i}$ $(i=1,\cdots,s)$，则$\sum_{i=1}^{s}\theta_i^2=\sum_{i=1}^{s}\dfrac{\lambda_i\beta_i\rho_n}{|\beta_n|\rho_i}<1$。

因 $C_n=q_nc_{1n}+a_{0n}b_{0n}=q_n\left[\sum_{i=1}^{s}\dfrac{(1-\lambda_i)\beta_i}{2\rho_i^2}+\sum_{i=s+1}^{n}\dfrac{|\beta_i|}{2\rho_i^2}\right]>0$，故存在 $a\geqslant 0$，

$\varepsilon=\dfrac{q_n+C_na}{A_n}r\geqslant 0$，$K=\dfrac{C_np_1a+qp_1-t'_{2n}}{A_n}>0$使(1.5)～(1.7)成立的充分条件是存在$a\geqslant 0$使下列各式成立：

$$\begin{aligned}&(A_nB_n-C_n^2)p_1^2a^2-2p_1[t'_{1n}-C_nt'_{2n}+q_nC_np_1]a\\&\quad-(q_np_1-t'_{2n})^2+\Delta_{0n}\leqslant 0\end{aligned}\tag{3.1}$$

$$C_n p_1 \alpha + q_n p_1 - t'_{2n} > 0 \tag{3.2}$$

$$(\sqrt{A_n B_n} - C_n)\alpha \leqslant q_n \tag{3.3}$$

$$(A_n B_n - C_n^2) p_1 \alpha^2 - (t'_{1n} - C_n t'_{2n} + 2q_n C_n p_1)\alpha - q_n(q_n p_1 - t'_{2n}) < 0 \tag{3.4}$$

由于$\rho_i(i=1,\cdots,n)$不全相等，所以我们有：

$$A_n B_n - C_n^2 = q_n^2(a_{1n} b_{1n} - c_{1n}^2) + q_n(\sqrt{a_{1n}}\,|b_{0n}| - |a_{0n}|\sqrt{b_{1n}})^2 + 2q_n(|a_{0n} b_{0n}|\sqrt{a_{1n} b_{1n}} - c_{1n} a_{0n} b_{0n}) > 0$$

$$\Delta_{0n} = A_n[A_n - 2q(t_{2n} - t_{3n})]$$

$$= q_n A_n\left[\frac{a_{0n}^2}{q_n} + \sum_{i=s+1}^{n-1}\frac{|\beta_i|}{2\rho_i} + \sum_{i=1}^{s}\frac{(\rho_i - \lambda_i \rho_n)^2 \beta_i}{2\rho_i(\rho_i + \lambda_i \rho_n)^2}\right] > 0$$

$$t'^2_{2n} - \Delta_{0n} = -q_n^2\left[\left(2a_{1n} - \frac{a_{0n}}{\rho_n}\right)\sum_{i=1}^{s}\frac{(1-\lambda_i)\rho_i^2 + \lambda_i \rho_n^2}{\rho_i(\rho_i + \lambda_i \rho_n)^2}\beta_i - \left(\sum_{i=1}^{s}\frac{(1-\lambda_i)\rho_i + \lambda_i \rho_n}{\rho_i(\rho_i + \lambda_i \rho_n)}\beta_i\right)^2\right]$$

$$\leqslant -q_n^2\left(\sum_{i=s+1}^{n-1}\frac{|\beta_i|}{\rho_i} - \frac{a_{0n}}{\rho_n}\right)\sum_{i=1}^{s}\frac{(1-\lambda_i)\rho_i^2 + \lambda_i \rho_n^2}{\rho_i(\rho_i + \lambda_i \rho_n)^2}\beta_i < 0$$

因此存在$\alpha \geqslant 0$使(3,1)～(3.4)成立的充分各件是下列各式都成立：

(1) $p_1 > 0$

(2) $p_1 \begin{cases} \geqslant \dfrac{A_n B_n t'_{2n} - C_n t'_{1n} + \sqrt{\Delta_{1n}}}{q_n A_n B_n} & (\text{当} t'^2_{1n} \leqslant A_n B_n \Delta_{0n} \text{时}) \\ > 0 & (\text{当} t'^2_{1n} > A_n B_n \Delta_{0n} \text{时}) \end{cases}$

(3) $p_1 > \begin{cases} \dfrac{A_n B_n t'_{2n} - C_n t'_{1n} + \sqrt{\Delta_{3n}}}{2q_n A_n B_n} & (\text{当} t'^2_{1n} \leqslant A_n B_n t'^2_{2n} \text{时}) \\ 0 & (\text{当} t'^2_{1n} > A_n B_n t'^2_{2n} \text{时}) \end{cases}$

(4) $p_1 > \max\left\{\dfrac{A_n B_n t'_{2n} - C_n t'_{1n}}{q_n A_n B_n},\ 0\right\}$

(5) $p_1 > \begin{cases} \dfrac{(2A_n B_n - C_n^2) t'_{2n} - C_n t'_{1n}}{2q_n A_n B_n} & (\text{当} t'^2_{1n} \leqslant C_n^2 t'^2_{2n} \text{时}) \\ \dfrac{A_n B_n t'_{2n} - C_n t'_{1n}}{q_n A_n B_n} & (\text{当} t'_{1n} > C_n |t'_{2n}| \text{时}) \\ \dfrac{t'_{2n}}{q_n} & (\text{当} t'_{1n} < -C_n |t'_{2n}| \text{时}) \end{cases}$

(6) $p_1 > \begin{cases} \dfrac{t'_{1n} - C_n t'_{2n}}{2q_n \sqrt{A_n B_n}} & (\text{当 } t'_{1n} \leqslant \sqrt{A_n B_n}\, t'_{2n} \text{时}) \\ 0 & (\text{当 } t'_{1n} > \sqrt{A_n B_n}\, t'_{2n} \text{时}) \end{cases}$

$$(7)\quad p_1 \geqslant \begin{cases} \dfrac{t'_{1n}-C_n t'_{2n}}{q_n\sqrt{A_nB_n}} & \left(\text{当 } t'_{1n}\leqslant \dfrac{(\sqrt{A_nB_n}+C_n)t'_{2n}+\sqrt{\Delta_{2n}}}{2}\text{时}\right) \\ \dfrac{(\sqrt{A_nB_n}-C_n)(\Delta_{0n}-t'^2_{2n})}{2q_n(t'_{1n}-\sqrt{A_nB_n}\,t'_{2n})} & \left(\text{当 } t'_{1n}> \dfrac{(\sqrt{A_nB_n}+C_n)t'_{2n}+\sqrt{\Delta_{2n}}}{2}\text{时}\right) \end{cases}$$

$$(8)\quad p_1 > \frac{(\sqrt{A_nB_n}-C_n)t'_{2n}}{q_n\sqrt{A_nB_n}}$$

$$(9)\quad p_1 > \begin{cases} \dfrac{t'_{2n}+\sqrt{\Delta_{0n}}}{q_n} & (\text{当 } t'_{1n}\leqslant -C_n\sqrt{\Delta_{0n}}\text{时}) \\ \dfrac{C_n t'_{2n}-t'_{1n}}{q_n C_n} & (\text{当 } t'_{1n}> -C_n\sqrt{\Delta_{0n}}\text{时}) \end{cases}$$

$$(10)\quad p_1 > \begin{cases} \dfrac{C_n t'_{2n}-t'_{1n}}{2q_n C_n} & (\text{当 } t'_{1n}> -C_n t'_{2n}\text{时}) \\ \dfrac{t'_{2n}}{q_n} & (\text{当 } t'_{1n}\leqslant -C_n t'_{2n}\text{时}) \end{cases}$$

其中　$\Delta_{3n}=(A_nB_n-C_n^2)(A_nB_nt'^2_{2n}-t'^2_{1n})$

（Ⅰ）当 $t'_1\leqslant -C_n\sqrt{\Delta_{0n}}$ 时，可令$\alpha=0$。

（Ⅱ）当$-C_n\sqrt{\Delta_{0n}}<t'_{1n}\leqslant \dfrac{(\sqrt{A_nB_n}+C_n)t'_{2n}+\sqrt{\Delta_{2n}}}{2}$时，我们有

$$\frac{(\sqrt{A_nB_n}-C_n)t'_{2n}}{q_n\sqrt{A_nB_n}} \begin{cases} \leqslant \dfrac{t'_{1n}-Ct'_{2n}}{q_n\sqrt{A_nB_n}} & (\text{当 } t'_{1n}\geqslant \sqrt{A_nB_n}\,t'_{2n}\text{时}) \\ < \dfrac{A_nB_nt'_{2n}-C_nt'_{1n}+\sqrt{\Delta_{1n}}}{q_nA_nB_n} & (\text{当 } t'_{1n}\leqslant \sqrt{A_nB_n}\,t'_{2n}\text{时}) \end{cases}$$

$$\frac{A_nB_nt'_{2n}-C_nt'_{1n}+\sqrt{\Delta_{1n}}}{q_nA_nB_n} > \begin{cases} \dfrac{t'_{1n}-C_nt'_{2n}}{q_n\sqrt{A_nB_n}}\geqslant 0\geqslant \dfrac{C_nt'_{2n}-t'_{1n}}{2q_nC_n} & (\text{当}t'_{1n}\geqslant C_nt'_{2n}\text{时}) \\ \dfrac{C_nt'_{2n}-t'_{1n}}{q_nC_n}\geqslant 0\geqslant \dfrac{t'_{1n}-C_nt'_{2n}}{2q_n\sqrt{A_nB_n}} & (\text{当}t'_{1n}\leqslant C_nt'_{2n}\text{时}) \end{cases}$$

$$\frac{A_nB_nt'_{2n}-C_nt'_{1n}+\sqrt{\Delta_{3n}}}{2q_nA_nB_n} \leqslant \begin{cases} \dfrac{t'_{1n}-C_nt'_{2n}}{q_n\sqrt{A_nB_n}} & (\text{当}t'_{2n}\leqslant 0\text{且}t'_{1n}\geqslant C_nt'_{2n}\text{时}) \\ \dfrac{C_nt'_{2n}-t'_{1n}}{q_nC_n} & (\text{当 }t'_{2n}\leqslant 0\text{且}\sqrt{A_nB_n}\,t'_{2n}\leqslant t'_{1n}\leqslant C_nt'_{2n}\text{时}) \\ \dfrac{A_nB_nt'_{2n}-C_nt'_{1n}}{q_nA_nB_n} & (\text{当 }t'_{2n}\geqslant 0\text{且}t'_{1n}\leqslant \sqrt{A_nB_n}\,t'_{2n}\text{时}) \end{cases}$$

$$\frac{(2A_nB_n-C_n^2)t'_{2n}-C_nt'_{1n}}{2q_nA_nB_n} \leqslant \begin{cases} \dfrac{A_nB_nt'_{2n}-C_nt'_{1n}+\sqrt{\Delta_{3n}}}{2q_nA_nB_n} & (\text{当}t'_{2n}\leqslant 0\text{时}) \\ \dfrac{A_nB_nB_nt'_{2n}-C_nt'_{1n}}{q_nA_nB_n} & (\text{当}|t'_{1n}|\leqslant C_nt'_{2n}\text{时}) \end{cases}$$

（Ⅲ）当 $t'_{1n}>\dfrac{(\sqrt{A_nB_n}+C_n)t'_{2n}+\sqrt{\Delta_{2n}}}{2}$时，下列各式成立：

$$t'_{1n}>\max\{C_n t'_{2n},\sqrt{A_nB_n}\,t'_{2n}\};\quad \frac{A_nB_nt'_{2n}-C_nt'_{1n}}{q_nA_nB_n}<\frac{(\sqrt{A_nB_n}-C_n)t'_{2n}}{q_n\sqrt{A_nB_n}};$$

$$\frac{(2A_nB_n-C_n^2)t'_{2n}-C_nt'_{1n}}{2q_nA_nB_n}<\frac{A_nB_nt'_{2n}-C_nt'_{1n}+\sqrt{\Delta_{3n}}}{2q_nA_nB_n}<0\quad (当t'_{2n}\leqslant 0时);$$

$$\frac{(\sqrt{A_nB_n}-C_n)(\Delta_{0n}-t'^2_{2n})}{2q_n(t'_{1n}-\sqrt{A_nB_n}\,t'_{2n})}>\begin{cases}\dfrac{(\sqrt{A_nB_n}-C_n)t'_{2n}}{q_n\sqrt{A_nB_n}} & 当2t'_{1n}t'_{2n}<\sqrt{A_nB_n}(\Delta_{0n}+t'^2_{2n})\\ \dfrac{A_nB_nt'_{2n}-C_nt'_{1n}+\sqrt{\Delta_{1n}}}{q_nA_nB_n} & 当t'^2_{1n}\leqslant A_nB_n\Delta_{0n}时\end{cases}$$

2° 如果 $a_{0n}=0$，那么$\sum\limits_{i=1}^{s}\frac{\lambda_i\beta_i\rho_n}{|\beta_n|\rho_i}=1$，因而$\lambda_i$不能全为零．不妨设$\lambda_1=1$．取

$\theta_1=\frac{\sqrt{\beta_1\rho_1|\beta_n|\rho_1}}{|\beta_n|\rho_1}-\varepsilon_1$（$\varepsilon_1>0$且充分小）；$\theta_i=\frac{\lambda_i\sqrt{\beta_i\rho_i|\beta_n|\rho_n}}{|\beta_n|\rho_i}$ $(i=2,3,\cdots,s)$．这时

$$q=2\rho_n|\beta_n|\Big(1-\sum_{i=1}^{s}\theta_i^2\Big)=2\rho_n|\beta_n|\varepsilon_1\Big(\frac{2\sqrt{\beta_1\rho_1|\beta_n|\rho_n}}{|\beta_n|\rho_1}-\varepsilon_1\Big)>0$$

令$\alpha=\varepsilon=0$，则存在$K>0$使(1.5)、(1.6)、(1.7) 式同时成立的充分条件是下列两式成立：

$$\begin{aligned}\Delta_1=&\Big[qa_{1n}+\frac{\beta_1|\beta_n|\rho_n}{\rho_1}\varepsilon_1^2+q\Big(p-t_{2n}-\frac{\sqrt{\beta_1\rho_1|\beta_n|\rho_n}}{\rho_1(\rho_1+\rho_n)}\varepsilon_1\Big)\\&+2\varepsilon_1^2\frac{|\beta_n|\rho_n\sqrt{\beta_1\rho_1|\beta_n|\rho_n}}{\rho_1(\rho_1+\rho_n)}\Big(\frac{\sqrt{\beta_1\rho_n}}{\sqrt{|\beta_n|\rho_1}}-\varepsilon_1\Big)\Big]^2+\Big[qa_{1n}+\frac{\beta_1|\beta_n|\rho_n}{\rho_1}\varepsilon_1^2\Big]\\&\cdot\Big[-\Big(qa_{1n}+\frac{\beta_1|\beta_n|\rho_n}{\rho_1}\varepsilon_1^2\Big)+2q\Big(t_{2n}-t_{3n}-\varepsilon_1\sqrt{\beta_1\rho_1|\beta_n|\rho_n}(2\rho_1\beta_1\\&+\sqrt{\beta_1\rho_1|\beta_n|\rho_n}\varepsilon_1)+\frac{\sqrt{\beta_1\rho_1|\beta_n|\rho_n}}{\rho_1(\rho_1+\rho_n)}\varepsilon_1\Big)\\&-4\varepsilon_1^2\frac{|\beta_n|\rho_n}{\rho_1+\rho_n}\Big(\frac{\sqrt{\beta_1\rho_n}}{\sqrt{|\beta_n|\rho_1}}-\varepsilon_1\Big)\Big(\frac{\sqrt{\beta_1\rho_1|\beta_n|\rho_n}}{\rho_1}\\&+\frac{|\beta_n|\rho_n}{\rho_1+\rho_n}\Big(\frac{\sqrt{\beta_1\rho_n}}{\sqrt{|\beta_n|\rho_1}}-\varepsilon_1\Big)\Big)\Big]>0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}K_1=&qa_{1n}+\frac{\beta_1|\beta_n|\rho_n}{\rho_1}\varepsilon_1^2+q\Big(p-t_{2n}-\frac{\sqrt{\beta_1\rho_1|\beta_n|\rho_n}}{\rho_1(\rho_1+\rho_n)}\varepsilon_1\Big)\\&+2\varepsilon_1^2\frac{|\beta_n|\rho_n\sqrt{\beta_1\rho_1|\beta_n|\rho_n}}{\rho_1(\rho_1+\rho_n)}\Big(\frac{\sqrt{\beta_1\rho_n}}{\sqrt{|\beta_n|\rho_1}}-\varepsilon_1\Big)+\sqrt{\Delta_1}>0\end{aligned}$$

由于

$$\lim_{\varepsilon_1\to 0}\frac{\Delta_1}{q^2}=(p-t_{2n})^2+2a_{1n}(p-t_{3n})$$

$$\lim_{\varepsilon_1\to 0}\frac{K_1}{q}=p+a_{1n}-t_{2n}+\sqrt{(p-t_{2n})^2+2a_{1n}(p-t_{3n})}$$

$$a_{1n}-2(t_{2n}-t_{3n})=\sum_{i=s+1}^{n-1}\frac{|\beta_i|}{2\rho_i}+\sum_{i=1}^{s}\frac{(\rho_i-\lambda_i\rho_n)^2\beta_i}{2\rho_i(\rho_i+\lambda_i\rho_n)^2}\geqslant 0$$

综合1°.2°易知当(2.4)式成立时，系统(1.1)的平凡解绝对稳定。

(ii) 当(2.5)式成立时，不失一般性可设

$$\min_{1\le i\le s}\min_{\mu\in M_i} N_{i\mu}=\min_{\mu\in M_1} N_{1\mu}=N_{1\mu}$$

这里$\mu=(\mu_{s+1},\cdots,\mu_n)\in M_1$. 取$G=(g_{ij})$其中$g_{ii}=|\beta_i|(i=1,\cdots,n)$, $g_{j1}=g_{1j}=\dfrac{-2\theta_j\sqrt{\beta_1\rho_1|\beta_j|\rho_j}}{(\rho_1+\rho_3)}$ $(j=s+1,\cdots,n)$，其它的g_{ij}全为零。然后分两种情况来选取θ_j：

1° 当$a_{0i}>0$时，取 $\theta_j=\dfrac{\mu_j\sqrt{\beta_1\rho_1|\beta_j|\rho_j}}{\beta_1\rho_j}$ $(j=s+1,\cdots,n)$；

2° 当$a_{0i}=0$时，不妨设$\mu_n=1$，并取$\theta_j=\dfrac{\mu_j\sqrt{\beta_1\rho_1|\beta_j|\rho_j}}{\beta_1\rho_j}$ $(j=s+1,\cdots,n-1)$，

$\theta_n=\dfrac{\sqrt{\beta_1\rho_1|\beta_n|\rho_n}}{\beta_1\rho_n}-\varepsilon_2(\varepsilon_2>0$且充分小)．完全仿照前段的证明不难验证，当(2.5)式成立时，能保证存在$K>0$，$\alpha\geqslant0$，$\varepsilon\geqslant0$使$\dot V|_{(1.1)}<0$．从而保证(1.1)的平凡解为绝对稳定．

致谢 感谢导师赵素霞教授的热情指导!

参 考 文 献

[1] 裘晓钢、舒仲周，控制系统第二标准型的绝对稳定性准则，应用数学和力学，7(9)(1986)，785—789.

[2] 廖晓昕，关于控制系统的绝对稳定性准则，应用数学和力学，3(2)(1982)，235—247.

[3] 王慕秋，稳定性参数区域之扩大，数学学报，18(2)(1975)，107—122.

[4] Michel, A. N., Stability analysis of interconnected systems, *Siam. J. Conirol*. 12(8)(1974), 554—579.

[5] Letov, A. M., *Stability of Nonlinear Controls*, 1st ed. Princeton Univ. Press. Princeton. New Jersey, (1961).

[6] Zhao Su-xia. On absolute stability of control system with several executive elements, *Scientia* (Series A), (8)(1987), 785—782

[7] 高国成，控制系统第二标准型绝对稳定性实用准则，山东矿业学院学报，9(3)(1990)，306—313.

Explicit Criteria of Absolute Stability for the Real Second Canonical Form of Control System

Gao Guo-cheng

(Ji'nan Branch of Shandong Min. Inst., Ji'nan)

Abstract

In this paper, some explicit criterions of absolute stability for the trivial solution of the real second canonical form of non-linear control system are given, which include and improve the criterions in paper[1]. By applying these criterions to the well-known equation of the longitudinal motion of aircraft, some results are obtained, which include and improve the corresponding results in papers [1,2,3,4].

Key words autonomous system; non-linear control system; equation of motion; positive definite function; absolute stability