

双筒粘度计中牛顿流体的振荡解*

李平 严宗毅 庄逢源

(北京大学力学系) (北京 中日友好医院生物流变学研究室)

(吴望一推荐, 1992年5月15日收到)

摘 要

当双筒粘度计的一筒振摆时, 静止的另一筒上所测得的力矩表现出相位滞后, 一个重要的原因是两筒间狭隙中的流体有惯性效应。本文提出一种化为常微分方程两点边值问题的方案, 得到 Navier-Stokes 方程的一个新的精确解, 可以说明这一效应。计算结果表明, 随着 Womersley 数 α 和无量纲隙宽 δ 的增大, 隙中流体速度剖面逐渐偏离线性而过渡到边界层型, 从而使所测得力矩量值变小且相位滞后加大。本文所提出的计算方案具有数值精度高、稳定性好的优点, 很容易推广到求解其它线性周期性问题的。

关键词 Navier-Stokes方程 精确解 两点边值问题 粘性流动 粘度测量 惯性效应

一、引 言

用双筒粘度计来测量非牛顿流体的动态粘弹性时, 常令其一筒往复振摆而使另一筒保持静止。这时在静止筒上所测得的力矩通常不与另一筒的振摆同相, 一般认为这一相位滞后就反映了非牛顿流体本身的粘弹性效应^[1]。可是实验表明, 即使在粘度计中使用牛顿流体仍能观测到力矩与振摆不同相。我们认为, 它的一个重要原因是两筒间的流体有惯性。因此, 在分析实验数据时, 必须把这一惯性效应除外, 才能推算出非牛顿流体本身的粘弹性。本文将对牛顿流体建立一个数学模型, 估算它在双筒粘度计中振荡时惯性的影响。至于非牛顿流体振荡的情形, 我们将在后续的工作中讨论。

双筒粘度计由两个同心长圆柱筒组成, 内外筒的半径分别为 R_1^* 和 R_2^* 。由于隙宽 $R_2^* - R_1^*$ 远小于长度, 可以忽略其端面的影响。隙中充满运动学粘度为 ν^* 的不可压缩牛顿流体。设其中一筒(图1中画的是外筒)以速度 $U_0^* \cos \omega^* t^*$ 振摆, 另一筒静止。若径向坐标 r^* 相对于 R_1^* 无量纲化, 时间 t^* 相对于 R_1^{*2}/ν^* , 流体速度(沿圆周方向) u^* 相对于 U_0^* , 并且用不带 * 的符号来表示无量纲量, 则内外筒分别相应于 $r=1$ 和 $r=1+\delta$, 这里

$$\delta = (R_2^* - R_1^*) / R_1^* \quad (1.1)$$

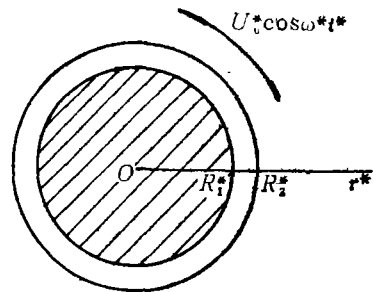


图1 双筒粘度计示意图

* 国家自然科学基金资助课题。

是无量纲隙宽。隙中流体运动服从 Navier-Stokes 方程, 其无量纲形式为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ur) \right] \quad (1.2)$$

若外筒振摆而内筒不动 (下文简称为“外筒动时”), 则边界条件为

$$r=1: u=0; r=1+\delta: u=\cos\alpha^2 t \quad (1.3)$$

反之, 若内筒振摆而外筒不动 (下文简称为“内筒动时”), 边界条件为

$$r=1: u=\cos\alpha^2 t; r=1+\delta: u=0 \quad (1.4)$$

这里 α 是 Womersley 数, 定义为

$$\alpha = R_1^* \sqrt{\omega^* / \nu^*} \quad (1.5)$$

对于双筒粘度计的一筒以匀速旋转另一筒静止 (或两筒各以匀速旋转) 的定常情形, 早已得到精确解析解^[2]。例如, 当外筒以匀速 U_0^* 旋转而内筒不动时, 有

$$u = \frac{1+\delta}{(1+\delta)^2-1} \left(r - \frac{1}{r} \right) \quad (1.6)$$

而当内筒以 U_0^* = 常数旋转而外筒不动时, 有

$$u = \frac{1}{(1+\delta)^2-1} \left[\frac{(1+\delta)^2}{r} - r \right] \quad (1.7)$$

但本文所讨论的振荡问题, 还从未见到有人求得过解。

对于一些更简单边界下的流体振荡问题倒是曾得到过精确解^[3], 其中包括单个无穷长平板沿其自身平面做简谐振动时所引起的流动 (Stokes 第二问题), 两平行平板之一做简谐振动所引起二板间流体的振荡。解这类周期性问题的基本思想通常是把速度 $u(r, t)$ 看作复变函数 $V(r) \exp[-i\alpha^2 t]$ 的实部, 然后求解复变函数 $V(r)$ 。这里 $i = \sqrt{-1}$ 是虚数单位。仿照这一思想, 我们容易导出双筒粘度计中流体振荡问题的解为

$$u(r, t) = \text{Re}[V(r) \exp[-i\alpha^2 t]] \quad (1.8)$$

式中

$$V(r) = C_1 J_1(\beta r) + C_2 Y_1(\beta r) \quad (1.9)$$

而

$$\beta = \alpha e^{i\pi/4} = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} (1+i) \quad (1.10)$$

J_1 和 Y_1 是第一类和第二类 1 阶 Bessel 函数, 复常数 C_1 和 C_2 须由下列条件确定:

外筒动时:

$$C_1 J_1(\beta) + C_2 Y_1(\beta) = 0, C_1 J_1[\beta(1+\delta)] + C_2 Y_1[\beta(1+\delta)] = 1 \quad (1.11)$$

内筒动时:

$$C_1 J_1(\beta) + C_2 Y_1(\beta) = 1, C_1 J_1[\beta(1+\delta)] + C_2 Y_1[\beta(1+\delta)] = 0 \quad (1.12)$$

从形式上说, (1.8) 式给出的 $u(r, t)$ 可以说也是 Navier-Stokes 方程的一个精确解, 可是用于实际计算时其精度却随 α 增大而急剧变坏。这是因为: (i) 在用级数表达式^[4]来计算复变函数 J_1 和 Y_1 时, 级数中一些项实部和虚部的绝对值随 α 增大而急剧增大, 但正负项相消后净剩的结果却是十分小的数, 其真值往往被舍入误差所淹没; (ii) 更为重要的是, 当 $\alpha \rightarrow \infty$ 时, 比值 $J_1(\beta)/Y_1(\beta)$ 趋近于 $-i$ 。这一点可由 J_1 和 Y_1 的渐近展开式^[4]导出:

$$J_1(z) = \sqrt{2/\pi z} \{ \cos(z - 3\pi/4) + \exp[\text{Im}(z)] O(|z|^{-1}) \}$$

$$Y_1(z) = \sqrt{2/\pi z} \{ \sin(z - 3\pi/4) + \exp[\text{Im}(z)] O(|z|^{-1}) \}$$

如表 1 的计算值所示, 这一趋近过程很快, 所以在 α 还不太大时 (1.11) 或 (1.12) 式中的 J_1 与 Y_1 即已几乎线性相关, 于是该线性代数方程组变得高度奇异, 甚至连 C_1 和 C_2 的大致近似值也求不出来. 我们在 IBM-286 微机上的数值试验表明, 即使采用双精度运算, 用此法也不能对 α 约大于 10 时得到可信的结果. 我们曾试用 FORTRAN 语言自行定义四倍精度的运算

(即用两个双精度数连接起来表示一个量), 勉强可以把能求解的 α 范围扩展数倍 (表 1 就

是这样算出来的), 但这种运算极其繁琐, 无法推广于大量实际运算. 为了克服这一困难, 本文下面将提出一种新的计算方案, 可以用来简便地求得可靠的解.

表 1 $J_1(\beta)/Y_1(\beta)$ 趋近于 $-i$ 的过程

α	$J_1(\beta)/Y_1(\beta) - (-i)$	
2	-1.5×10^{-1}	$+1.6 \times 10^{-2}i$
4	7.0×10^{-3}	$-3.7 \times 10^{-3}i$
6	-3.0×10^{-4}	$+3.4 \times 10^{-4}i$
8	9.8×10^{-6}	$-2.4 \times 10^{-5}i$
10	-8.9×10^{-8}	$+1.5 \times 10^{-6}i$
12	-2.3×10^{-8}	$-8.6 \times 10^{-8}i$
14	2.9×10^{-9}	$+4.4 \times 10^{-9}i$
16	-2.4×10^{-10}	$-8.1 \times 10^{-10}i$
18	1.7×10^{-11}	$+6.3 \times 10^{-12}i$
20	-1.1×10^{-12}	$-3.9 \times 10^{-13}i$

是这样算出来的), 但这种运算极其繁琐, 无法推广于大量实际运算. 为了克服这一困难, 本文下面将提出一种新的计算方案, 可以用来简便地求得可靠的解.

二、计算方案

为了求解 (1.2)~(1.4) 式所描述的问题, 根据问题的周期性和线性, 我们假设

$$u(r, t) = P(r) \cos \alpha^2 t + Q(r) \sin \alpha^2 t \tag{2.1}$$

将它代入 (1.2) 式可得如下的常微分方程组:

$$r^2 P'' + r P' - P - \alpha^2 r^2 Q = 0, \quad r^2 Q'' + r Q' - Q + \alpha^2 r^2 P = 0 \tag{2.2}$$

式中 ' 表示对 r 的微商. 边界条件是:

外筒动时:

$$r=1: P=0, Q=0; \quad r=1+\delta: P=1, Q=0 \tag{2.3}$$

内筒动时:

$$r=1: P=1, Q=0; \quad r=1+\delta: P=0, Q=0 \tag{2.4}$$

这样定义的问题是常微分方程组的两点边值问题^[6]. 对此线性问题, 只需解两次初值问题 (无须迭代) 并解一个线代数方程组即可求得它的解. 例如, 当外筒动时, 求解步骤如下:

(i) 在下列初始条件下数值积分 (2.2) 式 (我们采用定步长四阶 Runge-Kutta 法):

$$r=1: P=0, Q=0, P'=1, Q'=0 \tag{2.5}$$

这样得到的解记作 $P_1(r)$, $Q_1(r)$;

(ii) 在下列初始条件下数值积分 (2.2) 式:

$$r=1: P=0, Q=0, P'=0, Q'=1 \tag{2.6}$$

所得的解记作 $P_2(r)$ 和 $Q_2(r)$;

(iii) 于是, (2.2) 式满足边界条件 (2.3) 式的解可表示成上述二解的线性组合, 即

$$P(r) = D_1 P_1(r) + D_2 P_2(r); \quad Q(r) = D_1 Q_1(r) + D_2 Q_2(r) \tag{2.7}$$

式中的常数 D_1 和 D_2 须由下述线代数方程组解出:

$$D_1 P_1(1+\delta) + D_2 P_2(1+\delta) = 1, \quad D_1 Q_1(1+\delta) + D_2 Q_2(1+\delta) = 0 \tag{2.8}$$

注意, 这样得到的 D_1 和 D_2 正是 $P(r)$ 和 $Q(r)$ 在 $r=1$ 处的斜率:

$$D_1 = P'(1), \quad D_2 = Q'(1) \tag{2.9}$$

当内筒动时, 可由 $r=1+\delta$ 向 $r=1$ 积分, 仿上法求解.

一旦求得流体速度剖面之后, 便可对它微分求出作用在不动筒上的力矩. 仍以外筒动^时

为例,若流体浸没内筒的深度为 L^* ,流体粘度为 μ^* ,则内筒所受力矩(有量纲形式)为

$$M^* = 2\pi\mu^*R_1^{*2}L^* \left(\frac{\partial u^*}{\partial r^*} - \frac{u^*}{r^*} \right)_{r^*=R_1^*} \quad (2.10)$$

若定义无量纲力矩为

$$M = \frac{M^*}{2\pi\mu^*R_1^*U_0^*L^*} \quad (2.11)$$

则可把它用模 A 和滞后相角 φ 表示为

$$M = A\cos(\alpha^2 t - \varphi) \quad (2.12)$$

由(2.1)和(2.9)式易知

$$A = \sqrt{D_1^2 + D_2^2}, \quad \tan\varphi = D_2/D_1 \quad (2.13)$$

三、结果与讨论

在我们的问题中有两个无量纲参数: α 和 δ 。(1.5)式所定义的 Womersley 数 α 是流体非定常惯性效应大小的度量。 $\alpha=0$ 相应于一筒匀速旋转的定常情形。而 $\alpha \rightarrow 0$ 相应于振摆周期为无限长的准定常情形,其中流体惯性不起任何作用,隙中流体时时刻刻保持与筒振摆同相。由(1.5)式知,若筒振摆的角频率 ω^* 越大,内筒半径 R_1^* 越大或流体运动粘度 ν^* 越小,则 α 值越大。例如:对于 Low Shear 30 (MS-LS 2T-2T型) 双筒粘度计, $R_1^*=5.5\text{mm}$, $R_2^*=6\text{mm}$,故 $\delta=1/11$ 。对于水, $\nu^* \approx 10^{-6}\text{m}^2/\text{s}$ 。这时,当振摆频率 $f^* = \omega^*/(2\pi)$ 为2, 10和200Hz时, α 分别为19.5, 43.6和195。

用我们的方案进行了数值计算,对于 α 由0直到5000,没有遇到任何困难。由于在我们的方案中,问题的数学提法最终化为求解常微分方程组的初值问题,所以这样得到的数值解也属于 Navier-Stokes 方程的精确解的范畴。

首先介绍外筒动时的计算结果。图2给出 $\delta=1/11$ 时三种不同 α 值所对应的流体速度剖面。每幅图右侧的竖直虚线相应于外筒位置 $r=1+\delta$ 。沿此虚线自上而下,各曲线顺序对应于 $\alpha^2 t=0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ$ 和 180° 各个时相。对图2(a)所示的准定常态,各时刻的速度剖面都几乎是线性的,这与定常时的(1.6)式是一致的(令 $r=1+\varepsilon$, $\varepsilon \ll \delta \ll 1$,对 ε 展开可证)。当 α 逐渐增大时,流体的非定常惯性增大,离外筒越远处对外筒振摆的响应越迟,如图2(b)所示。当 α 再增高时(对某一确定粘度计和流体,这相当于加快振摆频率 f^*),靠近内筒的流体来不及跟随外筒振摆,几乎完全停滞,只有紧靠外筒的一薄层流体随之往复流动,这时的速度剖面可称为“边界层型”的(图2(c))。

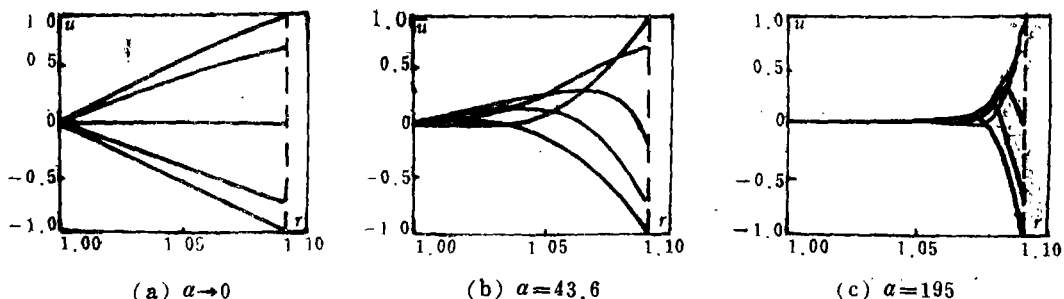


图2 外筒动时典型的流体速度剖面($\delta=1/11$)

图3(a),(b)中的无量纲隙宽较图2(b)的 $\delta=1/11$ 分别缩小或放大一倍,而其 α 值同图2(b).由图看出,随 δ 变大,流体的惯性效应越来越显著.当 δ 很大时,流体速度剖面也会过渡到边界层型.

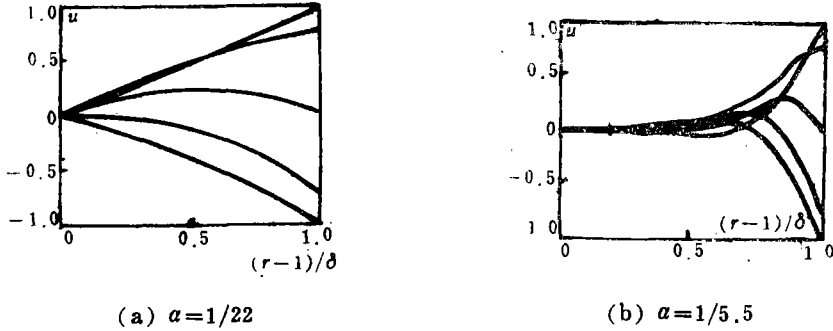


图3 δ 对速度剖面的影响 (外筒动时, $\alpha=43.6$)

由(2.10), (2.11)和(1.3)式知,作用于内筒的力矩 M 正比于 $(\partial u/\partial r)_{r=1}$.由图2和图3知,当 α 很小或 δ 很小时,速度剖面 $u(r,t)$ 接近于线性,因而 M 基本上与外筒的振摆同相.而当 α 或 δ 增大时,外筒的振摆所带动的流体振荡越来越局限于外筒附近的区域.当 α 或 δ 很大时,内筒附近流体几乎不动.所以如图4所示,当 α 或 δ 增大时, M 的模 A 会变小,而其滞后相角 φ 则会变大.举例说,当 $\alpha=20$ (对前述Low Shear 粘度计,相当 $f^*=2.1\text{Hz}$)时,对于 $\delta=1/22, 1/11$ 和 $1/5.5$, φ 分别为 $7.9^\circ, 30.9^\circ$ 和 101.9° ,而 A 分别衰减到 $\alpha \rightarrow 0$ 时数值的99.6%, 94.4%和55.8%.当 $\alpha=40$ (相当 $f^*=8.4\text{Hz}$)时,相应的 φ 为 $30.9^\circ, 102^\circ$ 和 250° ,而 A 衰减到94.4%, 55.7%和8.5%.可见当 δ 较小时,直到 α 相当大才显露出惯性效应,而当 δ 较大时对不太大的 α 即不可忽略惯性效应.

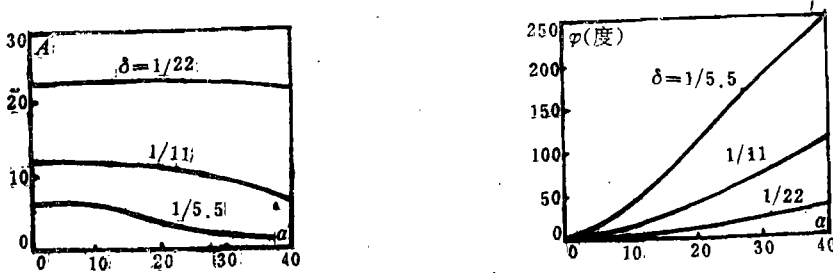


图4 力矩的模和滞后相角随 α 和 δ 而变

图5对 $\delta=1/11$ 情形画出了不同 α 值下在一个振荡周期($0^\circ \leq at < 360^\circ$)内 M 的变化.其中 $\alpha \rightarrow 0$ 的曲线与外筒振摆同相.随 α 加大, M 的峰值越来越小而滞后越来越严重.

以上结果都是外筒动的情形.下面给出内筒动时的部分结果.图6的速度剖面可与同一 α, δ 下外筒动时的速度剖面(图2(b))对比,二者相对于 $r=1+\delta/2$ 这条竖直线说来几乎完全对称,也就是说,内筒或外筒动时流体惯性的影响是相似的.图7中画出三个不同 α 值下内筒动时 $\alpha^2 t=0$ 这一时相速度剖面随 δ 的变化.对图7(a)中的准定常情形,在 $\delta=1/22 \sim 1/5.5$ 范围内速度剖面与 δ 无关,为同一直线.当 $\alpha=19.5$ 时 $\delta=1/5.5$ 的剖面在外筒附近已有明显滞后(图7(b));而当 $\alpha=43.6$ 时,甚至 $\delta=1/11$ 的剖面也表现出明显的惯性效应,虽然这

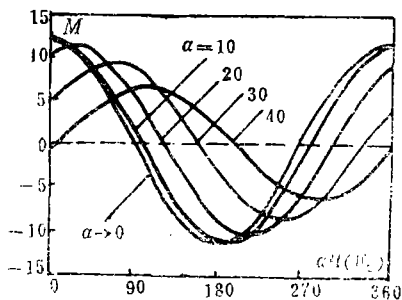


图5 一个振荡周期中力矩的变化($\delta=1/11$)

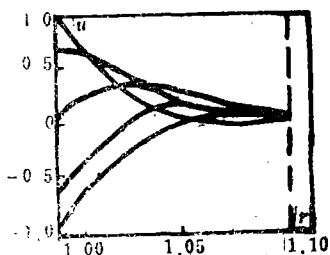
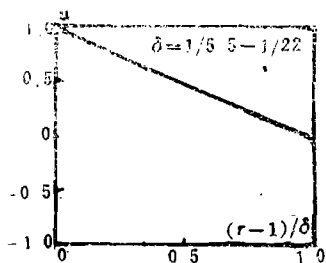
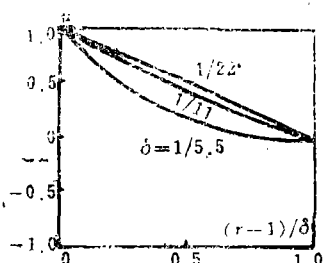


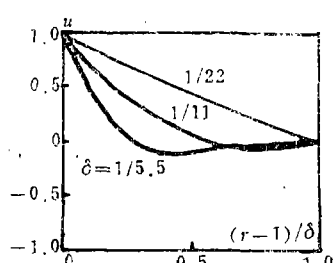
图6 内筒动时流体速度剖面($\alpha=43.6, \delta=1/11$)



(a) $\alpha \rightarrow 0$



(b) $\alpha=19.5$



(c) $\alpha=43.6$

图7 内筒动时 $\alpha^2 t=0$ 时相的流体速度剖面

时 $\delta=1/22$ 的剖面还几乎为线性(图7(c))。但是,如果考察 $\alpha=43.6$ 时 $\alpha^2 t=45^\circ, 90^\circ, 135^\circ$ 等时相,即使 $\delta=1/22$ 的速度剖面也已显示出非线性(图中未画出,但可参看外筒动时的图3(a))。由此可见,流体惯性对于双筒粘度计中流体振荡的速度剖面以及力矩的影响确实是深远的,除了频率很低、间隙很窄时之外都是不能忽略的。

四、结 束 语

Navier-Stokes 方程现有精确解的数目是很有限的,本文关于双筒粘度计中流体振荡的解为这一族精确解增添了一个新成员。以往解振荡问题常用复变函数方法,但当Womersley数较高时,由于舍入误差恶性放大与线代数方程组奇异,此法不能给出可靠的数值。本文提出的化为常微分方程组两点边值问题的新计算方案,成功地克服了上述困难,可以简便而精确地求解,适用的Womersley数范围实际上没有限制。我们相信,这一新方案不仅很容易推广于其它流体振荡问题(例如锥板粘度计中),而且用于求解一般线性周期性问题是优越的。

我们的计算结果表明,在双筒粘度计振摆实验中流体惯性所引起力矩大小与相位的变化一般是不可忽略的。如果不考虑这一效应,势必引起内在的误差。如何设计粘度计以尽量减小这种误差,或者如何处理数据以修正这一误差,是实际工作中急须解决的重要问题。本文的工作是朝向这一目标迈出的第一步。在实际操作中还有一些因素能引起力矩的大小与相位变化,本文没有计及。例如:粘度计筒自身的惯性和空气阻尼,光电量测中的相位滞后。本文只考虑了牛顿流体,没有涉及非牛顿流体。这些因素我们准备在后续的工作中陆续加以考虑。只有全面考虑了这些因素之后,才能与实验数据定量地比较,最终找出完善的数据处理方案。

参 考 文 献

- [1] 翁维良、廖福龙、吴云鹏等编著, 《血液流变学研究方法及其应用》, 科学出版社 (1989), 260—273.
- [2] 吴望一编著, 《流体力学》, 下册, 北京大学出版社 (1983), 252—255.
- [3] 张捷迁、章光华、陈允文著, 《真实流体力学》, 上册, 清华大学出版社 (1986), 130—141.
- [4] Abramowitz, M. and I. A. Stegun eds., *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, National Bureau of Standards (1964), 360—364.
- [5] 凌复华、殷学纲、何治奇编著, 《常微分方程数值方法及其在力学中的应用》, 重庆大学出版社 (1990), 55—92.

Solution for the Oscillation of a Newtonian Fluid in a Co-Axial Viscometer

Li Ping Yan Zong-yi

(Department of Mechanics, Peking University, Beijing)

Zhuang Feng-yuan

(Division of Hemorheology, China-Japan Friendship Hospital, Beijing)

Abstract

When one cup of a co-axial viscometer oscillates, the measured moment on the other (stationary) cup shows a phase lag, partly due to the inertial effect of the fluid within the gap between the cups. In this paper such an effect is illustrated by a new exact solution of the Navier-Stokes equation, which is derived herein by a scheme of reducing it to a two-point boundary value problem for ODEs. Our numerical results indicate that, as the Womersley number α or the dimensionless gap width δ increases, the fluid velocity profile within the gap gradually deviates from the linear one and transits to that of the boundary layer type, with the result that the moment decreases in the magnitude and lags behind in the phase. With the advantage of high accuracy and excellent stability, the scheme proposed herein can readily be extended to solve other linear periodic problems.

Key words Navier-Stokes equation, exact solution, two-point boundary value problem, viscous flow, viscometry, inertial effect