应用数学和力学，第14卷第6期（1993年6月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

关于Bertrand一个定理的推广*

史荣昌　　梅凤翔

（北京理工大学，1992年5月20日收到）

摘　　要

本文将Bertrand的一个定理：已知完整系统的一个第一积分可确定作用在系统上的力，推广到非完整力学系统．并举例说明新结果的应用．

关键词　分析力学　非完整系统　第一积分　动力学逆问题

一、引　　言

在Whittaker 的经典著作[1]中，提到Bertrand于1852年得到的一个定理：已知系统的一个第一积分，可确定作用在系统上的力．假设力仅依赖于坐标，而不依赖于速度．这是有关动力系统积分的一个重要性质，同时又是一个重要的动力学逆问题．著作[1]指出："但是，这个积分不能随意选取，而必须满足某些条件．"尽管如此，这种只用极少信息就可以研究动力学逆问题的方法仍是一个相当好的结果．近年，苏联学者Галиуллин在他的著作[2]中，引入Еругин函数[3]，将这一结果加以推广，然而，这些研究仅限于完整力学系统．

本文试图将Bertrand 的这个定理推广并应用于非完整系统，从而得到非完整系统积分的一个重要性质，并解决非完整系统的一个动力学逆问题．首先，将非完整系统带乘子的方程表为显式，并将其当作有条件的完整系统力学问题来研究，得到一个二阶常微分方程组．其次，将给定的积分对时间t求导数，并引入 Еругин 函数，得到一个二阶常微分方程；利用前面的二阶微分方程组消去广义加速度而得到一个包含广义力的，关于坐标、速度和时间的方程．最后，由这个方程得到确定广义力的代数方程组，解此方程组便可确定广义力．本文给出两个例子来说明新结果的具体应用．

二、非完整系统运动方程的显式

设力学系统的位形由n个广义坐标$q_s(s=1,2,\cdots,n)$ 来确定，在系统的运动上施加有g个理想Четаев型非完整约束

$$f_\beta(q_s,\dot{q}_s,t)=0 \qquad (\beta=1,2,\cdots,g;\ s=1,2,\cdots,n) \tag{2.1}$$

* 樊大钧推荐．
国家自然科学基金资助课题．

系统的运动方程可表为Routh方程形式[4]

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial T}{\partial q_s}=Q_s+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\qquad(s=1,2,\cdots,n)\tag{2.2}$$

其中T为系统的动能，Q_s为广义力，λ_β为不定乘子．方程(2.2)可展开为显式[4]，有

$$\sum_{k=1}^{n}A_{sk}\ddot{q}_k+\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}[k,m;\ s]\dot{q}_k\dot{q}_m$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial B_k}{\partial q_s}-\frac{\partial B_s}{\partial q_k}\right)\dot{q}_k+Q_s-\frac{\partial B_s}{\partial t}+\frac{\partial T_0}{\partial q_s}-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial A_{ks}}{\partial t}\dot{q}_k+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}$$

$$(s=1,2,\cdots,n)\tag{2.3}$$

其中 $A_{sk}=A_{ks}=\sum_{i=1}^{N}m_i\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k}$， $B_s=\sum_{i=1}^{N}m_i\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}$， $T_0=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}$

这里m_i为系统中第i个质点的质量，$\boldsymbol{r}_i$为它的矢径，N为质点的总数目．

$$[k,m;\ s]=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_{ks}}{\partial q_m}+\frac{\partial A_{ms}}{\partial q_k}-\frac{\partial A_{km}}{\partial q_s}\right)\tag{2.4}$$

为系数A_{ks}的第一类Christoffel记号．由(2.3)解得广义加速度

$$\ddot{q}_l=\sum_{s=1}^{n}\frac{\Delta_{sl}}{\Delta}\left\{-\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}[k,m;\ s]\dot{q}_k\dot{q}_m+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial B_k}{\partial q_s}-\frac{\partial B_s}{\partial q_k}\right)\dot{q}_k+Q_s\right.$$

$$\left.-\frac{\partial B_s}{\partial t}+\frac{\partial T_0}{\partial q_s}-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial A_{ks}}{\partial t}\dot{q}_k+\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\right\}\qquad(l=1,2,\cdots,n)\tag{2.5}$$

其中$\Delta=|A_{ks}|\neq 0$，Δ_{sl}为Δ中元素(s,l)的代数余子式．

将约束方程(2.1)对t求导数，得到

$$\sum_{l=1}^{n}\left(\frac{\partial f_r}{\partial q_l}\dot{q}_l+\frac{\partial f_r}{\partial \dot{q}_l}\ddot{q}_l\right)\frac{\partial f_r}{\partial t}=0\qquad(r=1,2,\cdots,g)\tag{2.6}$$

将(2.5)代入(2.6)，得到为确定乘子λ_β的代数方程

$$\sum_{\beta=1}^{g}\sum_{s=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\frac{\Delta_{sl}}{\Delta}\frac{\partial f_r}{\partial \dot{q}_l}\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\lambda_\beta+\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial f_r}{\partial q_l}\dot{q}_l+\frac{\partial f_r}{\partial t}$$

$$+\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial f_r}{\partial \dot{q}_l}\sum_{s=1}^{n}\frac{\Delta_{sl}}{\Delta}\left\{-\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}[k,m;\ s]\dot{q}_k\dot{q}_m+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial B_k}{\partial q_s}-\frac{\partial B_s}{\partial q_k}\right)\dot{q}_k\right.$$

$$\left.+Q_s+\frac{\partial T_0}{\partial q_s}-\frac{\partial B_s}{\partial t}-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial A_{ks}}{\partial t}\dot{q}_k\right\}=0\qquad(r=1,2,\cdots,g)\tag{2.7}$$

由于(2.1)满足Читаев条件，故未知量λ_β的系数矩阵$(\partial f_\beta/\partial \dot{q}_l)$的秩为$g$，于是解方程(2.7)得到

$$\lambda_\beta=\sum_{s=1}^{n}a_{\beta s}(q,\dot{q},t)Q_s+b_\beta(q,\dot{q},t)\tag{2.8}$$

将(2.8)代入(2.5)，便消除了乘子λ_β，得到n个二阶常微分方程．这n个二阶方程称为相应完整系统的运动方程．当初始条件满足非完整约束(2.1)时，相应完整系统的解就给出原非完整系统的运动．

三、广义力的确定

假设已知非完整系统的一个积分

$$\omega(q_s,\dot{q}_s,t)=C \qquad (s=1,2,\cdots,n) \tag{3.1}$$

其中ω对其所有变量有连续的偏导数．当C为任意常数时，(3.1) 为系统的第一积分；当C为某固定常数时，(3.1)是系统的特殊积分．设广义力Q_s不依赖于广义速度，我们根据(3.1)来确定这些广义力．

将(3.1)对t求导数，并引入Еругин函数，便有

$$\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial\omega}{\partial q_s}\dot{q}_s+\frac{\partial\omega}{\partial\dot{q}_s}\ddot{q}_s\right)+\frac{\partial\omega}{\partial t}=\Phi(q,\dot{q},t) \tag{3.2}$$

其中Φ称为Еругин函数．当C为任意常数时，有

$$\Phi=0 \tag{3.3}$$

当C为某固定常数时，Φ为满足

$$\Phi|_{\omega=C}=0 \tag{3.4}$$

的任意函数．Еругин 函数的引入，对研究动力学逆问题，特别是建立稳定系统和构造规划运动系统具有重要意义[2]．

将(2.5)和(2.8)代入(3.2)，消去$\ddot{q}_l$，得到

$$\begin{aligned}&\sum_{s=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\frac{\Delta_{sl}}{\Delta}\frac{\partial\omega}{\partial\dot{q}_l}Q_s+\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial\omega}{\partial q_l}\dot{q}_l+\frac{\partial\omega}{\partial t}-\Phi\\&\quad+\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial\omega}{\partial\dot{q}_l}\sum_{s=1}^{n}\frac{\Delta_{sl}}{\Delta}\left\{-\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}[k,m;\ s]\dot{q}_k\dot{q}_m+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial B_k}{\partial q_s}-\frac{\partial B_s}{\partial q_k}\right)\dot{q}_k\right.\\&\quad+\frac{\partial T_0}{\partial q_s}-\frac{\partial B_s}{\partial t}-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial A_{ks}}{\partial t}\dot{q}_k+\sum_{\beta=1}^{g}\left[\sum_{k=1}^{n}a_{\beta k}(q,\dot{q},t)Q_k\right.\\&\quad\left.\left.+b_\beta(q,\dot{q},t)\right]\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_s}\right\}=0\end{aligned} \tag{3.5}$$

将(3.5)简写成

$$\sum_{s=1}^{n}a_s(q,\dot{q},t)Q_s+b(q,\dot{q},t)-\Phi=0 \tag{3.6}$$

其中

$$a_s=\sum_{l=1}^{n}\frac{\Delta_{sl}}{\Delta}\frac{\partial\omega}{\partial\dot{q}_l}+\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial\omega}{\partial\dot{q}_l}\sum_{k=1}^{n}\frac{\Delta_{kl}}{\Delta}\sum_{\beta=1}^{g}a_{\beta s}\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_k}$$

$$b=\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial\omega}{\partial q_l}\dot{q}_l+\frac{\partial\omega}{\partial t}+\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial\omega}{\partial\dot{q}_l}\sum_{s=1}^{n}\frac{\Delta_{sl}}{\Delta}\left\{-\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}[k,m;\ s]\dot{q}_k\dot{q}_m\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial B_k}{\partial q_s}-\frac{\partial B_s}{\partial q_k}\right)\dot{q}_k+\frac{\partial T_0}{\partial q_s}-\frac{\partial B_s}{\partial t}-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial A_{ks}}{\partial t}\dot{q}_k+\sum_{\beta=1}^{g}b_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_s}\right\} \qquad (3.7)$$

关系(3.6)仅包含q，$\dot{q}$和t，它对出现于其中任意独立的量应是一个恒等式．因此，它对任何一个$\dot{q}_k$的偏导数应等于零．根据假设Q_s不依赖于广义速度，于是得到

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial a_s}{\partial\dot{q}_k}Q_s+\frac{\partial b}{\partial\dot{q}_k}-\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{q}_k}=0 \qquad (k=1,2,\cdots,n) \qquad (3.8)$$

方程(3.8)就是我们得到的为确定Q_s的n个代数方程．解此代数方程组，便有可能确定广义力Q_s．如果给定的积分(3.1)是系统的一个第一积分，即C为任意常数时，则(3.8)成为

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial a_s}{\partial\dot{q}_k}Q_s+\frac{\partial b}{\partial\dot{q}_k}=0 \qquad (k=1,2,\cdots,n) \qquad (3.9)$$

上述结果可归纳为如下定理．

定理 若已知非完整系统(2.1)、(2.2)的结构．假设广义力不依赖于速度，当已知积分(3.1)为第一积分时，系统的广义力Q_s由(3.9)确定；当已知积分(3.1)为特殊积分时，广义力Q_s由(3.8)确定．

根据上述定理，就有可能在仅仅知道一个积分（无论是第一积分，还是特殊积分）的情况下，来确定非完整系统的广义力．这个定理可称为非完整系统的广义Bertrand定理．

广义Bertrand 定理，一方面揭示了非完整系统积分的一个重要性质，另一方面为解非完整系统动力学逆问题提供了一种重要而又简便的方法．如果系统没有非完整约束，且已知积分为第一积分，则广义Bertrand定理成为Bertrand 原来的定理[1]；如果系统没有非完整约束，且已知积分为特殊积分，则广义Bertrand定理成为Галиуллин的定理[2]．

必须注意的是，由方程(3.8)或(3.9)不一定能够唯一地确定所有的 Q_s． 这是因为，第一，当已知积分(3.1)为特殊积分时，方程(3.8)中出现Еругин函数Φ对$\dot{q}_k$的偏导数$\partial\Phi/\partial\dot{q}_k$，而$\Phi$除了满足条件(3.4)外，仍是任意的；第二，如果已知积分(3.1)中不是所有$\dot{q}_k(k=1,2,\cdots,n)$都出现的话，方程(3.8)或(3.9)的数目就小于n．在这些情况下，为最终确定广义力，必须施加其它补充条件，例如关于稳定性，或优化的限制．

四、算 例

为说明上述结果的具体应用，我们给出以下两个例子．

例1 设某非完整系统的位形由三个广义坐标q_1，q_2和q_3来确定，系统的动能为

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\dot{q}_3^2) \qquad (4.1)$$

它的运动受有一个非线性非完整约束

$$f=\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2-\frac{a^2}{b^2}\dot{q}_3^2=0 \qquad (4.2)$$

其中a，b为常数．已知系统有一个第一积分

$$\omega=\frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\dot{q}_3^2)+mgq_3=h \tag{4.3}$$

其中g为重力加速度，h为任意常数．我们利用广义Bertrand定理来确定问题的广义力Q_1，Q_2，Q_3。假设它们仅依赖于坐标。

首先，利用(2.7)求出不定乘子λ，由动能表达式(4.1)知

$$A_{ks}=\begin{cases}m, & k=s\\ 0, & k\neq s\end{cases}\qquad (k,s=1,2,3,)$$

而

$$\frac{\Delta_{sl}}{\Delta}=\begin{cases}\frac{1}{m}, & s=l\\ 0\ , & s\neq l\end{cases}\qquad (s,l=1,2,3) \tag{4.4}$$

以及

$$[k,m;\ s]=0 \tag{4.5}$$

又

$$B_s=0,\ T_0=0,\ \frac{\partial A_{ks}}{\partial t}=0 \tag{4.6}$$

由约束方程(4.2)得

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_1}=2\dot{q}_1,\quad \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_2}=2\dot{q}_2,\quad \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_3}=-2\frac{a^2}{b^2}\dot{q}_3\\ &\frac{\partial f}{\partial q_s}=0\quad (s=1,2,3),\ \frac{\partial f}{\partial t}=0\end{aligned}\right\} \tag{4.7}$$

将(4.4)～(4.7)代入(2.7)，得到

$$\frac{\lambda}{m}\left[(2\dot{q}_1)^2+(2\dot{q}_2)^2+\left(-2\frac{a^2}{b^2}\dot{q}_3\right)^2\right]+\frac{1}{m}\left[2\dot{q}_1Q_1+2\dot{q}_2Q_2-2\frac{a^2}{b^2}\dot{q}_3Q_3\right]=0$$

由此解得

$$\lambda=\frac{-\dot{q}_1Q_1-\dot{q}_2Q_2+a^2b^{-2}\dot{q}_3Q_3}{2(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+a^4b^{-4}\dot{q}_3^2)} \tag{4.8}$$

其次，导出形如(3.6)的代数方程．问题的Routh方程为

$$m\ddot{q}_1=Q_1+2\lambda\dot{q}_1,\ m\ddot{q}_2=Q_2+2\lambda\dot{q}_2,\ m\ddot{q}_3=Q_3-2\lambda\frac{a^2}{b^2}\dot{q}_3 \tag{4.9}$$

将(4.8)代入(4.9)，得

$$\left.\begin{aligned}m\ddot{q}_1&=Q_1+\frac{\dot{q}_1(-\dot{q}_1Q_1-\dot{q}_2Q_2+a^2b^{-2}\dot{q}_3Q_3)}{\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+a^4b^{-4}\dot{q}_3^2}\\ m\ddot{q}_2&=Q_2+\frac{\dot{q}_2(-\dot{q}_1Q_1-\dot{q}_2Q_2+a^2b^{-2}\dot{q}_3Q_3)}{\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+a^4b^{-4}\dot{q}_3^2}\\ m\ddot{q}_3&=Q_3-\frac{a^2b^{-2}\dot{q}_3(-\dot{q}_1Q_1-\dot{q}_2Q_2+a^2b^{-2}\dot{q}_3Q_3)}{\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+a^4b^{-4}\dot{q}_3^2}\end{aligned}\right\} \tag{4.10}$$

将第一积分(4.3)对t求导数，因h为任意常数，故Еругин函数为零，我们有

$$m(\dot{q}_1\ddot{q}_1+\dot{q}_2\ddot{q}_2+\dot{q}_3\ddot{q}_3)+mg\dot{q}_3=0 \tag{4.11}$$

将(4.10)代入(4.11)，并利用约束(4.2)，得到

$$\dot{q}_1Q_1+\dot{q}_2Q_2+\dot{q}_3Q_3+mg\dot{q}_3=0 \tag{4.12}$$

这就是形如(3.6)的代数方程。

最后，方程(3.9)给出为

$$Q_1=0,\ Q_2=0,\ Q_3=-mg \tag{4.13}$$

问题归结为经典Appell例[4]的逆问题．

如果给出问题的一个特殊积分为

$$\omega=\dot{q}_1/\dot{q}_2=1 \tag{4.14}$$

则(3.6)给出

$$\frac{Q_1\dot{q}_2-Q_2\dot{q}_1}{m\dot{q}_2^2}-\Phi=0 \tag{4.15}$$

或写成

$$Q_1\dot{q}_2-Q_2\dot{q}_1-\Phi_1=0 \tag{4.16}$$

其中

$$\Phi_1=m\dot{q}_2^2\Phi \tag{4.17}$$

而(3.8)成为

$$-Q_2-\frac{\partial\Phi_1}{\partial\dot{q}_1}=0,\quad Q_1-\frac{\partial\Phi_1}{\partial\dot{q}_2}=0,\quad -\frac{\partial\Phi_1}{\partial\dot{q}_3}=0 \tag{4.18}$$

将(4.18)前两式代入(4.16)，得到

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial\dot{q}_1}\dot{q}_1+\frac{\partial\Phi_1}{\partial\dot{q}_2}\dot{q}_2-\Phi_1=0 \tag{4.19}$$

考虑到(4.18)最后一式，上述方程通解可表为

$$\Phi_1=\dot{q}_2\varphi\left(\frac{\dot{q}_1}{\dot{q}_2},q_1,q_2,q_3,t\right) \tag{4.20}$$

其中φ为任意函数．但按Еругин函数的要求，有

$$\Phi|_{\dot{q}_1/\dot{q}_2=1}=0$$

即

$$\varphi(1,q_1,q_2,q_3,t)=0 \tag{4.21}$$

例如，可取

$$\Phi_1=(\dot{q}_2-\dot{q}_1)\psi(q_1,q_2,q_3,t) \tag{4.22}$$

其中ψ为任意函数，于是由(4.18)得

$$Q_1=Q_2=\psi(q_1,q_2,q_3,t) \tag{4.23}$$

因此，当给定特殊积分(4.14)时，不但不能求出全部的 $Q_s(s=1,2,3)$，而且 Q_1,Q_2 只是满足(4.23)的任意函数．

例2 一雪撬在水平面上滑动．雪撬质心C在平面上的投影和雪撬与平面的接触点相重合，令m和J分别表示雪撬质量和它对质心的转动惯量．系统的位置由3个参数确定：质心在平面上投影的坐标(x,y)以及雪撬对称轴与固定轴Ox的夹角θ．系统的动能为

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 \tag{4.24}$$

所受非完整约束为

$$f=\dot{y}-\dot{x}\mathrm{tg}\theta=0 \tag{4.25}$$

已知系统的一个第一积分

$$\omega=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2+V(x,y,\theta)=h \tag{4.26}$$

假设广义力Q_x，Q_y，Q_θ仅依赖于坐标．试确定这些广义力．

令$q_1=x$，$q_2=y$，$q_3=\theta$，通过计算，容易得到(3.6)的具体表达式为

$$\dot{q}_1Q_1+\dot{q}_2Q_2+\dot{q}_3Q_3+\frac{\partial V}{\partial q_1}\dot{q}_1+\frac{\partial V}{\partial q_2}\dot{q}_2+\frac{\partial V}{\partial q_3}\dot{q}_3=0 \tag{4.27}$$

这是因为h为任意常数，$\Phi=0$，而(3.9)给出

$$Q_1+\frac{\partial V}{\partial q_1}=0,\quad Q_2+\frac{\partial V}{\partial q_2}=0,\quad Q_3+\frac{\partial V}{\partial q_3}=0$$

由此得到广义力

$$Q_1=-\frac{\partial V}{\partial q_1},\quad Q_2=-\frac{\partial V}{\partial q_2},\quad Q_3=-\frac{\partial V}{\partial q_3} \tag{4.28}$$

参 考 文 献

[1] Whittaker, E. T., *A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies*, Fourth Edition, Cambridge Press (1952).

[2] Галиуллин А. С., *Методы Решения Обратных Задач Динамики*, М., Наука (1986).

[3] Еругин Н. П., Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую, *П. М. М.*, 16(6)(1952), 659—670.

[4] 梅凤翔，《非完整系统力学基础》，北京工业学院出版社（1985）.

On a Generalization of Bertrand's Theorem

Shi Rong-chang　　Mei Feng-xiang

(*Beijing Institute of Technology, Beijing*)

Abstract

Bertrand's theorem for the determination of the applied forces to a holonomic system from one of its first integrals, is extended to nonholonomic systems. Some interesting applications of this new result are also given.

Key words analytical mechanics, nonholonomic system, first integral, inverse problem of dynamics