应用数学和力学，第14卷第7期（1993年7月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

运动边界球对称爆炸波的激发

吕国皓　董连科　官忠信

（中科院国际材料物理中心）（西北工业大学）

（钱伟长推荐，1991年12月27日收到）

摘　要

本文给出了含扩展球腔无穷大弹性体中爆炸波的激发问题分析解，并给出了解的收敛范围．最后就解的几个性质进行了讨论．

关键词　运动边界问题　弹性波动问题　波的激发　爆炸波

一、引　言

自从J. Stefan[1]给出运动边界热传导方程的第一个分析解以来，已经出现了大量的关于这类问题分析解的结果．大部分作者都是运用半递解法将运动边界问题转化为特征值问题．Dong等人[2,3]运用与时间相关的空间压缩映射方法将无热源的运动边界热传导问题转化为含运动热源的固定边界热传导问题，从而用经典方法得到了该问题的分析解．另外各种近似解也大量出现．虽然如此，另一类重要方程——波动方程的运动边界问题却尚少结果．这方面具有代表性的工作是由Yoffe[4]和Sih[5]等人完成的．文献[4]和[5]都是关于含Yoffe裂纹即运动保持恒定长度的裂纹弹性体的．由于Yoffe裂纹模型的不合理性，故其意义受到限制．关于其它形式的运动边界波动方程问题的分析结果目前尚未见报道．

由于波动方程含有关于时间变量t的二阶偏导数，故求解这种方程的运动边界问题更为复杂和困难．但随着科学与技术的高度发展，运动边界波动方程问题已被大量提出，迫切需要加强这方面的研究．

与运动边界热传导方程不同，除个别问题外，在运动边界波动方程定解问题中往往不存在由位移表达的运动边界物理定律，而边界运动规律由其它类型方程的运动边界问题或实验给出．因此，在求运动边界波动方程定解问题的解析解时，往往事先给定边界运动规律．

本文研究含匀速扩展球腔的无穷大弹性体爆炸波的激发问题．我们运用散射函数法，将运动边界球对称弹性波的激发问题转化常微分方程的定解问题，给出了级数形式解，并就解的性质进行了讨论．

二、基本方程

设有弹性体$\Omega=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\geqslant a^2(t)\}$，其中$a(t)=a_0+vt$，$v$是球腔扩展速度，

是常量．在球腔上作用爆炸载荷$\sigma_r=-p_0\exp(-kt)$，其中p_0和k都是常量，k是载荷衰减系数．r方向为球坐标系的径向．显然，这是一个运动边界球对称弹性波动问题．位移场有如下形式

$$\begin{cases} u_r=u(r,t) & (2.1\text{a}) \\ u_\theta=u_\rho=0 & (2.1\text{b}) \end{cases}$$

引进位移场的Lame′势$\varphi=\varphi(r,t)$，

$$u=\varphi_{,r} \tag{2.2}$$

则由Lame′势表述的含扩展球腔的无穷大弹性介质的爆炸波的激发问题为

$$\begin{cases} \varphi_{,rr}+\dfrac{2}{r}\varphi_{,r}=\dfrac{1}{C_1^2}\varphi_{,tt} \qquad (r>a(t)) & (2.3\text{a}) \\ C_1^2\left(\varphi_{,rr}+\dfrac{2}{r}\varphi_{,r}\right)-4C_2^2\dfrac{1}{r}\varphi_{,r} & \\ \qquad =-\dfrac{C_2^2}{\mu}p_0\exp(-kt) \qquad (r=a(t)) & (2.3\text{b}) \\ \varphi_{,r}=0 \qquad (t=0) & (2.3\text{c}) \\ \varphi_{,rt}=0 \qquad (t=0) & (2.3\text{d}) \\ a=a_0+vt \qquad (t\geqslant 0) & (2.3\text{e}) \end{cases}$$

其中

$$C_1=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$$

$$C_2=\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

分别是介质的体膨胀波速度和畸变波速度，λ和μ是介质的Lame′弹性常数，ρ是介质的密度．我们设$v<C_1$．

三、位移分析解

引进变换

$$\tau=t-\frac{r-a_0}{C_1} \tag{3.1}$$

根据含球腔无穷大弹性体中波的传播特性，我们设

$$\varphi(r,t)=\frac{1}{r}F(\tau) \tag{3.2}$$

其中 $F(\tau)$是待定函数．(3.2)式意味着我们只考虑自空腔向无穷处传播的波．容易验证，形如(3.2)式所示的Lame′势满足问题(2.3)的泛定方程．因此，问题就转化为由问题(2.3)的初始条件和内边界应力条件确定的单变量函数$F(\tau)$的问题．

虽然，由问题(2.3)的初始条件得到$\tau\leqslant 0$时$F(\tau)$为零

$$F(\tau)\equiv 0 \qquad (\tau\leqslant 0) \tag{3.3}$$

(3.3)式表明，波阵面为$\tau=0$，$\tau<0$是未扰动区域．

下面讨论$\tau>0$区域中$F(\tau)$的解．

在球形内壁$r=a(t)$上，

$$\tau=\alpha t \tag{3.4}$$

其中$\alpha=1-v/C_1$．将(3.2)式和(3.4)式代入问题(2.3)的应力边界条件中得到关于$F(\tau)$的泛定方程

$$\frac{1}{a}F''(\alpha t)+\frac{4C_2^2}{C_1a^2}F'(\alpha t)+\frac{4C_2^2}{a^3}F(\alpha t)=-\frac{C_2^2}{\mu}p\exp(-kt) \tag{3.5}$$

记

$$g(a)=F(\alpha t) \tag{3.6}$$

将(3.6)式代入(3.5)式中得

$$B_1g''(a)+\frac{1}{a}B_2g'(a)+\frac{1}{a^2}B_3g(a)=B_4a\exp\left(-\frac{k}{v}a\right) \tag{3.7}$$

其中

$$\begin{cases} B_1=v_1^2, \\ B_2=4v_1\dfrac{C_2^2}{C_1} \\ B_3=4C_2^2, \\ B_4=-\dfrac{C_2^2}{\mu}p_0\exp\left(\dfrac{k}{v}a_0\right) \end{cases}$$

而 $v_1=v/\alpha$。

方程(3.7)的齐次方程是一个Euler方程，其通解$g_0(a)$依判别式

$$D=(B_2-B_1)^2-4B_1B_3 \tag{3.8}$$

的正负和零点而分为三种情况．容易验证，当$v=v_0$时，$D=0$，而

$$v_0=\frac{4C_1C_2(C_1+C_2)}{C_1^2+4C_1(C_1+C_2)} \tag{3.9}$$

当$v>v_0$时，$D>0$；$v<v_0$时，$D<v_0$.因此有下面三种情况下的解

1) $v=v_0$时，

$$g_0(a)=A_1\left(\frac{a}{a_0}\right)^m\left(A_2+\ln\frac{a}{a_0}\right) \tag{3.10}$$

其中 A_1和A_2是待定常数，m如下式所示

$$m=\frac{B_1-B_2}{2v_1^2} \tag{3.11}$$

2) $v<v_0$时，

$$g_0(a)=\left(\frac{a}{a_0}\right)^{k_1}\left[A_3\cos\left(k_2\ln\frac{a}{a_0}\right)+A_4\sin\left(k_2\ln\frac{a}{a_0}\right)\right] \tag{3.12}$$

其中 A_3和A_4是待定常数，k_1和k_2由下式所示

$$\begin{cases} k_1=\dfrac{B_1-B_2}{2v_1^2} & \text{(3.13a)} \\ k_2=\dfrac{\sqrt{-D}}{2v_1^2} & \text{(3.13b)} \end{cases}$$

3) $v>v_0$时，

$$g_0(a)=A_5\left(\frac{a}{a_0}\right)^{n_1}+A_6\left(\frac{a}{a_0}\right)^{n_2} \tag{3.14}$$

其中 A_5和A_6是待定常数，n_1和n_2如下式所示

$$\begin{cases} n_1=\dfrac{B_1-B_2+\sqrt{D}}{2v_1^2} & (3.15a) \\ n_2=\dfrac{B_1-B_2-\sqrt{D}}{2v_1^2} & (3.15b) \end{cases}$$

在(3.10)式，(3.12)式和(3.14)式中，常数$A_i(i=1,2,\cdots,6)$由问题(2.3)的初始条件确定。

下面我们求方程(3.7)的一个特解。为此，设

$$g_1=f(a)\exp\left(-\frac{k}{v}a\right) \tag{3.16}$$

将(3.16)式代入方程(3.7)中经整理得到关于$f(a)$的方程

$$\begin{aligned} &a^2B_1f''(a)+(aB_2-2B_1\alpha_1a^2)f'(a) \\ &\quad+(a^2\alpha_1^2B_1-a\alpha_1B_2+B_3)f(a)=B_4a^3 \end{aligned} \tag{3.17}$$

其中 $\alpha_1=k/v$。

设$f(a)$为级数形式

$$f(a)=\sum_{n=0}^{\infty}b_na^n \tag{3.18}$$

将级数(3.18)代入方程(3.17)中得到系数$b_n(n=0,1,\cdots)$的递推公式

$$\begin{cases} b_i=0 \qquad (i=0,1,2) & (3.19a) \\ b_3=\dfrac{B_4}{6B_1+3B_2+B_3} & (3.19b) \\ b_4=\dfrac{(6\alpha_1B_1+\alpha_1B_2)b_3}{2B_1+4B_2+B_3} & (3.19c) \\ b_n=\dfrac{\alpha_1[2(n-1)B_1+B_2]b_{n-1}-\alpha_1^2B_1b_{n-2}}{n(n-1)B_1+nB_2+B_3} \qquad (n\geqslant5) & (3.19d) \end{cases}$$

现在讨论级数(3.18)的收敛性。由(3.19)式可得

$$\frac{b_n}{b_{n-2}}=\frac{\alpha_1[2(n-1)B_1+B_2]\dfrac{b_{n-1}}{b_{n-2}}-\alpha_1^2B_1}{n(n-1)B_1+nB_2+B_3}$$

从上式易得

$$\begin{aligned} &\frac{b_{n-1}}{b_{n-2}}\left\{\frac{b_n}{b_{n-1}}-\frac{\alpha_1[2(n-1)B_1+B_2]}{n(n-1)B_1+nB_2+B_3}\right\} \\ &=-\frac{\alpha_1^2B_1}{n(n-1)B_1+nB_2+B_3} \end{aligned} \tag{3.20}$$

由(3.20)式不难证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{b_{n-1}}=0$$

这个结果表明级数(3.18)的收敛区域为 $0\leqslant a(t)\leqslant+\infty$。

因此

$$g_1(a)=\exp(-\alpha_1 a)\sum_{n=3}^{\infty} b_n a^n$$

由于

$$a=a_0+v(\alpha t)$$

故

$$F(\tau)=g_0(a_0+v_1\tau)+\exp[-\alpha_1(a_0+v_1\tau)]\cdot\sum_{n=3}^{\infty} b_n(a_0+v_1\tau)^n \qquad (\tau\geqslant 0) \tag{3.21}$$

由上面的分析可知，(3.21)式对任何 $\tau>0$ 都收敛.

从(3.21)式可得到 $\tau\geqslant 0$ 时的位移表达式.

当 $v=v_0$ 时

$$u=F_0(r,\tau)-\left[\frac{1}{r^2}+\frac{v_1}{C_1a_0^2(1+\omega\tau)}\right]A_1(1+\omega\tau)^m[mA_2+1+m\ln(1+\omega\tau)] \tag{3.22}$$

其中

$$F_0(r,\tau)=\frac{3\omega}{C_1r}b_3a_0^3(1+\omega\tau)^2+r^2\sum_{n=3}^{\infty}[\omega a_0(n+1)C_1^{-1}rb_{n+1}-C_1^{-1}\alpha_1v_1rb_n-b_n]a_0^n(1+\omega\tau)^n\exp[-\alpha_1a_0(1+\omega\tau)] \tag{3.23}$$

和 $\omega=v_1/a_0$。

当 $v<v_0$ 时

$$u=F_0(r,\tau)-\left\{\left[\frac{A_3}{r^2}+\frac{v_1(k_1A_1+k_2A_2)}{C_1ra_0(1+\omega\tau)}\right]\cos[k_2\ln(1+\omega\tau)]+\left[\frac{A_4}{r^2}+\frac{v_1(k_1A_2-k_2A_1)}{C_1ra_0(1+\omega\tau)}\right]\sin[k_2\ln(1+\omega\tau)]\right\}(1+\omega\tau)^{k_1} \tag{3.24}$$

当 $v_0<v<C_1$ 时

$$u=F_0(r,\tau)-\left\{\left[\frac{1}{r^2}+\frac{v_1n_1}{C_1ra_0(1+\omega)}\right]A_5(1+\omega\tau)^{n_1}+\left[\frac{1}{r^2}+\frac{v_1n_2}{C_1ra_0(1+\omega\tau)}\right]A_6(1+\omega\tau)^{n_2}\right. \tag{3.25}$$

从(3.3)式可知，当 $\tau<0$ 时

$$u\equiv 0 \tag{3.26}$$

式(3.22)，(3.24)和(3.25)中的常数 $A_i(i=1,2,\cdots,6)$ 由初始条件决定.

四、运动边界问题位移的几个特点

我们从(3.22)式，(3.24)式和(3.25)式可以看到，位移由两项组成. 表面上可以认为，

第一项$F_0(r,\tau)$是由爆炸压力所决定的，而另一项则是由边界的运动所决定的，即表征边界运动效应的。这一项依边界的运动速度v不同而有三种形式。

由于

$$\alpha_1 a_0 \omega \tau = \frac{k}{1-v/C_1}\tau$$

所以，各点上由爆炸压力所决定的位移量的衰减速度要高于爆炸压力的衰减速度。当v趋于C_1时，载荷效应很快会衰减掉。而当$v=0$时，二者衰减速度相同。

当$k=0$即内腔作用恒定载荷时，由(3.19)式可知，级数(3.18)的非零系数只有一个，即b_3.这时再令边界运动速度为零，则$F_0(r,\tau)$为

$$\lim_{\substack{k\to 0\\ v\to 0}} F_0(r,\tau)=\frac{a^3 p_0}{4\mu r^2}$$

即静力学问题解。这说明运动边界问题是静止边界静力学问题的一个自然推广。

五、结 束 语

上述结果表明，含运动边界球对称波的激发问题，可以利用变量变换

$$\begin{cases} \tau = t-(r-a_0)C_1^{-1} \\ r' = r \end{cases}$$

将偏微分方程转化为常微分方程，以获得解析解。

在形式上，位移由两项所组成，即动载荷效应项和边界运动效应项。

运动边界的弹性动力学问题是固定边界弹性静力学问题的一个自然推广。不难证明，这个问题也是固定边界弹性动力学问题的一个自然推广。

显然，本文的方法只限于内边界作匀速扩展的情况。

参 考 文 献

[1] John Grank, *Free and Moving Boundary Problems*, Clarendon Press, Oxford, (1984), 2.

[2] Dong L. K., L. Y. Bai and B. L. Zhou, A method to obtain the analytical solution of the thermal conduction equation with moving boundaries, *Thermal Conductivity*, 17 p349.

[3] Dong L. K. and B. L. Zhou, A problem of the heat conduction equation with moving boundary in space E^3, *Thermal Corducticity*, 18, p31.

[4] Yoffe. E. H, The moving, Griffith crack, *Philos. Mag.*, 42 (1957), 139—750.

[5] G. C. Sih and E.P.Chen,Crack propagation in a strip of material under plane extension, *I.T.J.Engng*, 10(1972), 537—551.

Excitation of Spherical Symmetric Exploding Wave With Moving Boundary

Lü Guo-hao Dong Lian-ke

(International Centre of Material Physics, Academia Sinica)

Guan Zhong-xin

(North-west Polytechnology University, Xi'an)

Abstract

In this paper, we have given an analytic excitation solution of exploding wave in infinite elastic medium with growing spherical inner boundary and the covergence region of series in this solution determined. Some characteristics of displacement wave have also been discussed.

Key words moving boundary, elastic wave problems, excitation of wave, exploding wave