应用数学和力学，第14卷 第7期（1993年7月） 应用数学和力学编委会编
Applied Mathematics and Mechanics 重庆出版社出版

概率度量空间中的Ekeland变分原理与集值映象的Caristi重合定理*

张石生

（四川大学数学系，1992年4月9日收到）

摘 要

借助偏序方法，本文得到概率度量空间中之一推广形式的Ekeland变分原理及一集值形式的Caristi重合定理，同时证明了这两个定理之间的等价性。本文结果是[1,2,5,6,7,9]中相应结果的改进和推广。

关键词 概率度量空间 Caristi重合定理 Ekeland变分原理 偏序集

一、引言及预备知识

在本文中我们借助于偏序方法，得到了概率度量空间之一推广形式的Ekland变分原理及一集值形式的Caristi重合定理。在本文之末，我们还证明了这两条定理的等价性。本文结果改进和推广了引文[1,2,5,6,7,9]中的相应结果。

本文以下记$R=(-\infty,+\infty)$，$\mathscr{D}$表一切左连续的分布函数的集合，$\mathscr{D}^+=\{f\in\mathscr{D}:f(0)=0\}$.

定义1 (E,F,T)称为Menger概率度量空间（Menger PM-空间），如果E是一非空集，T：$[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$是一t-范数，F：$E\times E\to\mathscr{D}^+$是满足下述条件的映象（以后常用$F_{x,y}$表$F(x,y)$）：

(a) $F_{x,y}(t)=H(t)$，$\forall t\in R\Longleftrightarrow x=y$，其中

$$H(t)=\begin{cases}1 & （当t>0）\\ 0 & （当t\leqslant 0）\end{cases}$$

(b) $F_{x,y}=F_{y,x}$；

(c) $F_{x,y}(t_1+t_2)\geqslant T(F_{x,z}(t_1),\ F_{z,y}(t_2))$，
$\forall x,y,z\in E$，$\forall t_1\geqslant 0$，$t_2\geqslant 0$.

Schweizer, Sklar[8]已经证明，如果(E,F,T)是一Menger PM-空间，且T满足条件

$$\sup_{t<1}T(t,t)=1 \tag{1.1}$$

* 国家自然科学基金资助课题.

则E是由(ε,λ)-邻域系$\{U_y(\varepsilon,\lambda):\ y\in E,\ \varepsilon>0,\ \lambda>0\}$所导出的拓扑$\mathscr{T}$的Hausdorff拓扑空间，其中

$$U_y(\varepsilon,\lambda)=\{x\in E:\ F_{x,y}(\varepsilon)>1-\lambda\},$$

而且这一拓扑结构是可度量化的[4].

在本文中，除相反的声明外，均假定(E,F,T)是一$\mathscr{T}$-完备的Menger PM-空间，其中T还进一步假定其满足条件：

$$\lim_{t\to 1^-}T(t,a)=a \qquad (\forall a\in[0,1]) \tag{1.2}$$

易知T满足条件(1.2)则必满足条件(1.1). 又(E,F,T)中的序列或网收敛，均指按(E,F,T)中的拓扑$\mathscr{T}$的收敛.

下面的两个引理，在讨论本文的主要结果中将起到重要的作用.

引理1[6] 设$\{x_n\}$，$\{y_n\}$是(E,F,T)中的任意二序列，且$x_n\to x$，$y_n\to y$，则

(i) 对任一$t\in(-\infty,+\infty)$有

$$\liminf_{n\to\infty}F_{x_n,y_n}(t)\geqslant F_{x,y}(t);$$

(ii) 当$t\in R$是$F_{x,y}$的连续点时，有

$$\lim_{n\to\infty}F_{x_n,y_n}(t)=F_{x,y}(t).$$

引理2 设(E,F,T)是一$\mathscr{T}$-完备的Menger PM-空间，$\varphi:\ E\to(-\infty,+\infty)$是下有界的下半连续函数. 设$\beta:\ (0,1)\to(0,\infty)$是一有界的不增函数. 令

$$\beta(1-0)=M=\inf_{r\in(0,1)}\beta(r),\quad m=\sup_{r\in(0,1)}\beta(r)<+\infty \tag{1.3}$$

在E上定义关系如下：

$$x\leqslant y\Longleftrightarrow F_{x,y}(t)\geqslant rH(t-\beta(r)(\varphi(x)-\varphi(y)))$$
$$(\forall t>0,\quad \forall r\in(0,1)) \tag{1.4}$$

于是下列结论成立：

(i) 当$x\leqslant y$时，则$\varphi(y)\leqslant\varphi(x)$；

(ii) "$\leqslant$"是E上的偏序；

(iii) 偏序集$(E,\leqslant)$中至少有一极大元.

证 (i). 如果$x\leqslant y$，而$\varphi(x)<\varphi(y)$，故$x\neq y$，于是存在$t_1=t_1(x)>0$,使得$F_{x,y}(t_1)=a<1$，于是有

$$a=F_{x,y}(t_1)\geqslant rH(t_1-\beta(r)(\varphi(x)-\varphi(y)))$$
$$=r \qquad (\forall r\in(0,1))$$

让$r\uparrow 1$，故$a\geqslant 1$，这与$a<1$矛盾. 结论(i)得证.

(ii) "$\leqslant$"的反身性，对称性是显然的. 下证"$\leqslant$"的传递性. 设$x,y,z\in E$，$x\leqslant y$，$y\leqslant z$. 由结论(i)知

$$\varphi(z)\leqslant\varphi(y)\leqslant\varphi(x) \tag{1.5}$$

(a) 当$t\leqslant M(\varphi(x)-\varphi(z))$时，其中$M$是(1.3)中出现的常数. 因

$$H(t-M(\varphi(x)-\varphi(z)))=0,$$

又因β不增，从而$H(t-\beta(r)(\varphi(x)-\varphi(z)))=0$，$\forall r\in(0,1)$. 故

$$F_{x,z}(t)\geqslant rH(t-\beta(r)(\varphi(x)-\varphi(z))) \qquad (\forall r\in(0,1)) \tag{1.6}$$

(b) 当$t>M(\varphi(x)-\varphi(z))$时，取$t_1,t_2>0$，$t_1+t_2=t$，使得

$$t_1>M(\varphi(x)-\varphi(y)),\quad t_2>M(\varphi(y)-\varphi(z)).$$

于是对一切$r\in(0,1)$有

$$\begin{aligned}F_{x,z}(t)&\geqslant T(F_{x,y}(t_1),F_{y,z}(t_2))\\&\geqslant T(rH(t_1-\beta(r)(\varphi(x)-\varphi(y))),rH(t_2-\beta(r)(\varphi(y)-\varphi(z))))\end{aligned}$$

由于上式中$r\in(0,1)$的任意性，故有

$$\begin{aligned}F_{x,z}(t)&\geqslant T(H(t_1-\beta(1-0)(\varphi(x)-\varphi(y))),H(t_2-\beta(1-0)(\varphi(y)-\varphi(z))))\\&=T(H(t_1-M(\varphi(x)-\varphi(y))),H(t_2-M(\varphi(y)-\varphi(z))))\\&=T(1,1)=1\\&\geqslant rH(t-\beta(r)(\varphi(x)-\varphi(z)))\qquad\forall r\in(0,1)\end{aligned}\tag{1.7}$$

结合(1.6)和(1.7)即知对一切$r\in(0,1)$和一切$t>0$

$$F_{x,z}(t)\geqslant rH(t-\beta(r)(\varphi(x)-\varphi(z))).$$

故$x\leqslant z$，结论(ii)得证.

(iii)设$\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$是$(E,\leqslant)$中任一全序子集，$I$为一指标集. 我们规定

$$x_\alpha\leqslant x_\delta\Longleftrightarrow\alpha\leqslant\delta.$$

于是$(I,\leqslant)$是一定向集，且$\{\varphi(x_\alpha)\}_{\alpha\in I}$是$(-\infty,+\infty)$中之一递减的网. 设$\varphi(x_\alpha)\downarrow\mu$，由$\varphi$的下有界性，知$\mu$是一有限数. 于是对任给的$\lambda>0$和任一$\varepsilon>m\lambda$，存在$\alpha_0\in I$，当$\alpha\geqslant\alpha_0$时，有

$$\mu\leqslant\varphi(x_\alpha)<\mu+\lambda.$$

于是当$\alpha_0\leqslant\alpha\leqslant\delta$时，有

$$0\leqslant\varphi(x_\alpha)-\varphi(x_\delta)\leqslant\lambda$$

因而

$$\begin{aligned}F_{x_\alpha,x_\delta}(\varepsilon)&\geqslant rH(\varepsilon-\beta(r)(\varphi(x_\alpha)-\varphi(x_\delta)))\\&\geqslant rH(\varepsilon-\beta(r)\lambda)\\&\geqslant rH(\varepsilon-m\lambda)\\&=r\qquad(\forall r\in(0,1))\end{aligned}$$

上式表明$\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$是$E$中的Cauchy网，由$E$的完备性，设$x_\alpha\to x_*\in E$. 由$\varphi$的下半连续性，有

$$\begin{aligned}\varphi(x_*)&\leqslant\liminf_\alpha\varphi(x_\alpha)=\lim_\alpha\varphi(x_\alpha)\\&=\mu\leqslant\varphi(x_\alpha)\qquad(\forall\alpha\in I)\end{aligned}\tag{1.8}$$

下证x_*是全序集$\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$的上界.

事实上，当$t\in(0,\infty)$是F_{x_α,x^*}的连续点时，其中$\alpha\in I$是任意给定的，于是对任意的$\delta\in I$，$\alpha\leqslant\delta$，由引理1(ii)知

$$\begin{aligned}F_{x_\alpha,x_*}(t)&=\lim_\delta F_{x_\alpha,x_\delta}(t)\geqslant\lim_\delta rH(t-\beta(r)(\varphi(x_\alpha)-\varphi(x_\delta)))\\&\geqslant rH(t-\beta(r)(\varphi(x_\alpha)-\varphi(x_*)))\qquad(\forall r\in(0,1))\end{aligned}\tag{1.9}$$

当$t\in(0,\infty)$是任一正数时，由分布函数F_{x_α,x_*}的单调性，故存在F_{x_α,x_*}的连续点序列$\{t_n\}$：

$$0<t_1<t_2<\cdots<t_n<\cdots,\quad t_n\to t.$$

于(1.9)中代t以t_n，并让$n\to\infty$取极限，并注意F_{x_α,x_*}和H的左连续性，即得

$$F_{x_\alpha,x_*}(t)\geqslant rH(t-\beta(r)(\varphi(x_\alpha)-\varphi(x_*)))\qquad(\forall r\in(0,1))\tag{1.10}$$

结合(1.9)和(1.10)即知$x_\alpha \leqslant x_*$，$\forall \alpha \in I$，故x_*是全序集$\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$的上界，于是由Zorn引理知$(E,\leqslant)$有极大元.

引理2得证.

二、Menger PM-空间中集值映象的 Caristi重合定理和不动点定理

在本节中，我们仍处处假定(E,F,T)是一完备的Menger PM-空间，T满足条件(1.2). 设β：$(0,1)\to(0,\infty)$是任一不增的有界函数.

我们有下面的结果.

定理1 设$D\subset E$是一非空集，f：$D\to E$是一满映象，设φ：$E\to(-\infty,+\infty)$是下半连续的下有界函数. 设$\{S_\alpha\}_{\alpha\in I}$：$D\to 2^E\backslash\{\phi\}$是一族集值映象. 如果对每一$x\in D$，当$f(x)\notin \bigcap\limits_{\alpha\in I} S_\alpha(x)$时，则存在某一$\alpha_0\in I$及某一$y\in S_{\alpha_0}(x)\backslash\{f(x)\}$，使得

$$F_{f(x),y}(t)\geqslant rH(t-\beta(r)(\varphi(f(x))-\varphi(y))) \tag{2.1}$$

$$\forall r\in(0,1),\quad \forall t>0.$$

则在E中存在f与$\{S_\alpha\}_{\alpha\in I}$的重合点，即存在$u\in E$，使得

$$f(u)\in\bigcap_{\alpha\in I}S_\alpha(u) \tag{2.2}$$

证 在E中按下面的式子定义偏序"$\leqslant$"：

$$x\leqslant y\Longleftrightarrow F_{x,y}(t)\geqslant rH(t-\beta(r)(\varphi(x)-\varphi(y))),$$

$$(\forall r\in(0,1),\quad \forall t>0)$$

由引理2(iii)，$(E,\leqslant)$中有极大元z. 又因f：$D\to E$满射，故存在$u\in D$，使得$f(u)=z$. 如果

$$f(u)\notin\bigcap_{\alpha\in I}S_\alpha(u),$$

则由定理的条件知，存在$\alpha_0\in I$和$y\in S_{\alpha_0}(u)\backslash\{f(u)\}$，使得

$$F_{f(u),y}(t)\geqslant rH(t-\beta(r)(\varphi(f(u))-\varphi(y))) \tag{2.3}$$

$$(\forall r\in(0,1),\quad \forall t>0)$$

故$f(u)\leqslant y$. 但因$f(u)=z$是E中的极大元，故有

$$z=f(u)=y\in S_{\alpha_0}(u)\backslash\{f(u)\}.$$

矛盾. 由此矛盾知$f(u)\in\bigcap\limits_{\alpha\in I}S_\alpha(u)$.

定理得证.

由定理1直接可得下面三个推论.

推论1 设E,D,f,φ满足定理1中的条件. 设S：$D\to 2^E\backslash\{\phi\}$，如果对任一$x\in D$，当$f(x)\notin S(x)$时，则存在$y\in S(x)$，使得

$$F_{f(x),y}(t)\geqslant rH(t-\beta(r)(\varphi(f(x))-\varphi(y))) \tag{2.4}$$

$$(\forall r\in(0,1),\quad \forall t>0)$$

则存在$u\in D$，使得$f(u)\in S(u)$.

推论2 设φ满足定理1中条件，是S：$E\to E$一单值映象，满足条件：对每一$x\in E$，及一

切$r\in(0,1)$及一切$t>0$,

$$F_{x,S(x)}(t)\geqslant rH(t-\beta(r)(\varphi(x)-\varphi(S(x)))) \tag{2.5}$$

则S在E中存在不动点.

推论3 设(E,d)是一完备的度量空间，φ：$E\to[0,\infty)$是一下半连续泛函，S：$E\to 2^E\backslash\{\phi\}$是一多值映象，$f$：$E\to E$是一满映象，$\beta$：$(0,1)\to(0,\infty)$是一不增的有界的映象.设对每一$x\in E$，存在$y\in S(x)$，使得

$$d(f(x),y)\leqslant\beta(r)(\varphi(f(x))-\varphi(y))\qquad(\forall r\in(0,1)) \tag{2.6}$$

则存在$u\in E$，使得$f(u)\in S(u)$.

证 定义映象F：$E\times E\to\mathscr{D}^+$如下：

$$F_{x,y}(t)=H(t-d(x,y))\qquad(\forall x,y\in E,\ \forall t\in R)$$

易知(E,F,T_3)是一Menger PM-空间（见，例如[8,第9章]），其中$T_3=\min$，即$T_3(a,b)=\min\{a,b\},a,b\in[0,1]$. 因$T_3$满足条件（1.2）. 故由推论3的条件，对每一$x\in E$，存在$y\in S(x)$，使得

$$F_{f(x),y}(t)\geqslant H(t-\beta(r)(\varphi(f(x))-\varphi(y)))\qquad(\forall t>0,\forall r\in(0,1)) \tag{2.7}$$

于是结论由推论1直接可得.

注 著名的Caristi定理[1]是推论3当$\beta(r)\equiv1,\forall r\in(0,1)$，$f\equiv I$（恒等映象），$S$为单值映象时的特例. 另外推论了也是Park[9]中主要定理的推广.

三、Menger PM-空间中加强形式的Ekeland变分原理

定理2 设(E,F,T)是一完备的Menger PM-空间，其中T满足条件(1.2)，φ：$E\to(-\infty,+\infty)$是下半连续的下有界函数. 设对任给的$\varepsilon>0$，存在$x_0\in E$使得

$$\varphi(x_0)\leqslant\inf\{\varphi(x):x\in E\}+\varepsilon \tag{3.1}$$

则对任一有界不增函数β：$(0,1)\to(0,\infty)$，存在$u\in E$，使得

(i) $F_{x_0,u}(t)\geqslant rH(t-\beta(r)(\varphi(x_0)-\varphi(u)))$,

$$(\forall r\in(0,1),\ \forall t>0);$$

(ii) $F_{x_0,u}(t)\geqslant rH(t-\varepsilon\beta(r))\qquad(\forall r\in(0,1),\ \forall t>0)$;

(iii) 对任一$x\in E$，当$x\neq u$时，存在$r_0\in(0,1)$及$t_0=t_0(x)>0$，使得

$$F_{u,x}(t_0)<r_0H(t_0-\beta(r_0)(\varphi(u)-\varphi(x))).$$

证 令

$$E_0=\{x\in E:F_{x_0,x}(t)\geqslant rH(t-\beta(\lambda)(\varphi(x_0)-\varphi(x)))\qquad(\forall r\in(0,),\ \forall t>0\}) \tag{3.2}$$

因$x_0\in E_0$，故$E_0\neq\phi$.

下证E_0是E中的闭集

事实上，设$\{x_n\}\subset E_0$且$x_n\to x_*$. 当$t\in(0,\infty)$是E_{x_0,x_*}的连续点时，由引理1(ii)知

$$F_{x_0,x_*}(t)=\lim_{n\to\infty}F_{x_0,x_n}(t)\geqslant\varliminf_{n\to\infty}rH(t-\beta(r)(\varphi(x_0)-\varphi(x_n)))$$

$$\geqslant rH(t-\beta(r)(\varphi(x_0)-\varphi(x_*)))\qquad(\forall r\in(0,1))$$

仿引理2中的证明一样可证上式对一切$t\in(0,\infty)$成立，故$x_*\in E_0$，即E_0是闭集. 故(E_0,F,T)

是$\mathscr{T}$-完备的Menger MP-空间．现在E_0中引入偏序"$\leqslant$"：

$$x\leqslant y\Longleftrightarrow F_{x,y}(t)\geqslant rH(t-\beta(r)(\varphi(x)-\varphi(y))),$$
$$(\forall r\in(0,1),\quad \forall t>0)$$

因而$(E_0,\leqslant)$是一偏序集，由引理2知其有极大元$u\in E_0$，于是有

$$F_{x_0,u}(t)\geqslant rH(t-\beta(r)(\varphi(x_0)-\varphi(u)))\qquad(\forall r\in(0,1),\forall t>0)$$

故结论(i)成立．

另由条件(3.1)知$0\leqslant\varphi(x_0)-\varphi(u)\leqslant\varepsilon$，故由结论(i)知

$$F_{x_0,u}(t)\geqslant rH(t-\beta(r)\cdot\varepsilon)\qquad(\forall r\in(0,1),\quad \forall t>0)$$

故结论(ii)成立．

如果结论(iii)不成立，则存在某一有界的不增的函数 β：$(0,1)\to(0,\infty)$，使得对每一$x\in E$存在$y\in E$，$y\neq x$，使得

$$F_{x,y}(t)\geqslant rH(t-\beta(r)(\varphi(x)-\varphi(y))),\quad(\forall r\in(0,1),\forall t>0).$$

令$f(x)=y$，则f：$E\to E$且有

$$F_{x,f(x)}(t)\geqslant rH(t-\beta(r)(\varphi(x)-\varphi(f(x)))),(\forall r\in(0,1),\forall t>0)$$

于是由推论2知f在E中有不动点．可是由f的定义，f不能在E中有不动点，矛盾．由此矛盾知结论(iii)成立．

定理证毕．

注 定理2是著名的 Ekeland 变分原理在 PM-空间中的推广和加强形式，同时也是［6,定理4］的推广．

四、定理1和定理2的等价性

在本节中我们将证明定理1和定理2的等价性．我们有下面的结果．

定理3 定理1和定理2是等价的．

证 定理1⇒定理2，由定理2的证明过程即可得知．

定理2⇒定理1．任取$\bar{x}\in E$，$\varphi(\bar{x})\neq+\infty$，如果

$$\varphi(\bar{x})=\inf\{\varphi(x):x\in E\}\tag{4.1}$$

则由定理1的假设条件，f：$D\to E$满射，故存在$u\in D$，使得$f(u)=\bar{x}$，因而有

$$\varphi(f(u))=\varphi(\bar{x})\leqslant\varphi(y)\qquad(\forall y\in\bigcup_{\alpha\in I}S_\alpha(u))\tag{4.2}$$

如果$f(u)\notin\bigcap_{\alpha\in I}S_\alpha(u)$，由定理1的假定，存在$\alpha_0\in I$和某一$y_0\in S_{\alpha_0}(u)\backslash\{f(u)\}$，使得

$$F_{f(u),y_0}(t)\geqslant rH(t-\beta(r)(\varphi(f(u))-\varphi(y_0)))\qquad(\forall r\in(0,1),\forall t>0)\tag{4.3}$$

由(4.2)及上式知

$$F_{f(u),y_0}(0_+)\geqslant F_{f(u),y_0}(\beta(r)(\varphi(f(u))-\varphi(y_0))+0)$$
$$\geqslant r\qquad(\forall r\in(0,1).)$$

故$F_{f(u),y_0}(0_+)=1$，即$f(u)=y_0\in S_{\alpha_0}(u)\backslash\{f(u)\}$，这是一个矛盾．由此矛盾得知$f(u)\in\bigcap_{\alpha\in I}S_\alpha(u)$，故此时定理1的结论得证．

如果$\varphi(\bar{x})>\inf\{\varphi(x):x\in E\}$，取

$$\varepsilon=\varphi(\bar{x})-\inf\{\varphi(x):x\in E\}.$$

于是由定理2，对任一有界的不增的函数β：$(0,1)\to(0,\infty)$，存在$u\in E$，使得对任一$x\in E$，当$x\neq u$时，存在$r_0\in(0,1)$及$t_0=t_0(x)>0$，使得

$$F_{u,x}(t_0)<r_0H(t_0-\beta(r_0)(\varphi(u)-\varphi(x))). \tag{4.4}$$

另由定理1的假设条件，f：$D\to E$满射，故存在$x_0\in D$，使得$f(x_0)=u$。如果$f(x_0)\notin\bigcap\limits_{\alpha\in I}S_\alpha(x_0)$，则由定理1的条件，存在$y_0\in S_{\alpha_0}(x_0)\backslash\{f(x_0)\}$，其中$\alpha_0$是$I$中的某一元，使得

$$F_{f(x_0),y_0}(t)\geqslant rH(t-\beta(r)(\varphi(f(x_0))-\varphi(y_0))),(\forall r\in(0,1),\forall t>0)$$

即

$$F_{u,y_0}(t)\geqslant rH(t-\beta(r)(\varphi(u)-\varphi(y_0))),(\forall r\in(0,1),\forall t>0) \tag{4.5}$$

因$y_0\in S_{\alpha_0}(x_0)\backslash\{f(x_0)\}=S_{\alpha_0}(x_0)\backslash\{u\}$，故$y_0\neq u$，于是上式与(4.4)式相矛盾。由此矛盾知$f(x_0)\in\bigcap\limits_{\alpha\in I}S_\alpha(x_0)$。故定理1的结论得证。

定理3证毕。

注 定理3是引文[2,5,6,7]中相应结果的推广。

参考文献

[1] Caristi, J., Fixed point theorem for mappings satisfying inwardness conditions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 215(1976), 241—251.

[2] Ekeland, I., Nonconvex minimization problems, *Bull. Amer. Math. Soc.* (New Series), 1(1979), 443—474.

[3] Schweizer B. and A. Sklar, Statistical metric spaces, *Pacific J. Math.*, 10 (1960), 313—334.

[4] Schweizer, B., A. Sklar and E. Thoip, The metrization of statistical metric spaces, *Pacific J. Math.*, 10(1960), 673—675.

[5] Zhang Shi-sheng and Luo Qun, Set-valued Caristi's fixed point theoem and Ekeland's variational principle, *Applied Math. and Mech.*, 10(1989),119—121

[6] Zhang Shi-sheng, Chen Yu-qing and Guo Jin-li, Ekeand's variational principle and Caristi's fixed point theorem in probabilistic metric spaces, *Acta. Math. Appl. Sinica*, 3(1991).

[7] 史树中，Ekeland变分原理与Caristi不动点定理的等价性，数学进展，16(1987)，203—206.

[8] 张石生，《不动点理论及应用》，重庆出版社（1984）.

[9] Park, S., *J. Korean Math. Soc.*, 19(1983), 143—151.

Ekeland's Variational Principle and Caristi's Coincidence Theorem for Set-Valued Mappings in Probabilistic Metric Spaces

Chang Shih-sen

(*Department of Mathematics, Sichuan University, Chengdu*)

Abstract

By using partial ordering method, a more general type of Ekeland's variational principle and a set-valued Caristi's coincidence theorem in probabilistic metric spaces are obtained. In addition, we give a simple direct proof of the equivalence between these two theorems in probabilistic metric spaces.

Key words Probabilistic metric space, Caristi's coincidence theorem, Ekeland's variational principle, partial ordering set