应用数学和力学，第14卷第7期（1993年7月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

$(\Omega, A_{\mu\nu})$场的引力辐射理论

余　燊

（香港理工学院，1992年11月26日收到）

摘　要

本文进一步探讨作者提出的Ω场论用于包含引力辐射的测试粒子运动方程．这一理论包含严格的引力辐射方程，它是场方程的逻辑结果而无需引入额外的假定，在一般动力学问题中，这一理论应改称为$(\Omega,\ A_{\mu\nu})$场论．

关键词　Ω场　引力辐射方程　$(\Omega,\ A_{\mu\nu})$场

一、引　　言

Bryce Dewitt在评价Einstein 1920年在Leyden大学的演讲时有这样一段话[2]："Einstein的意思很清楚，按照广义相对论，时空本身就是介质，否定以太实际是假定空的空间不再有任何物理属性，而广义相对论不仅恢复了空的空间的动力学性质而且赋予它能量、动量及角动量．原则上，引力辐射可以作为推进器"最后一句话提出，与带电粒子类似，一个加速的"电中性"粒子会有辐射，这种"引力"辐射会对粒子有反作用。然而，就象从球对称场的Schwarzschild解导出那样，粒子的运动方程（测地线）不含与引力辐射的反作用有关的项，自那时起确有数位作者考虑过（运动粒子的）辐射衰减；但在这些处理中辐射衰减基本上是"平放进去的"．此外，最近作者的一项研究[10]表明Einstein给出的广义相对论的辐射理论（这也是迄今唯一的逻辑推导）可能是靠不住的．本文作为作者所提出的Ω场论[9]的进一步探讨将证明，无需引入任何新假设，这一理论中严格的单粒子运动方程就已包含了引力辐射的反作用．同时，本文对运动方程的各种结果也做了研究．此外，正如将要证明的那样，这一理论用于运动的场还包含了严格的引力辐射方程，它也不需要借助任何近似手段．

二、在静态球对称Ω场中的运动方程

作者曾给出各向同性坐标中Ω场论中静态球对称引力场的解为[9]

$$ds^2=\exp[-2\Omega]dt^2-\exp[2\Omega]d\mathbf{r}\cdot d\mathbf{r} \tag{2.1}$$

其中

$$\Omega=\frac{m}{r}\qquad (m\text{是中心引力物体的质量}) \tag{2.2}$$

为方便起见，我们已取$C=1$和$G=1$因此，测试粒子的拉氏量可取为

$$L=\exp[-2\Omega]\dot{t}^2-\exp[2\Omega]\dot{\mathbf{r}}^2; \qquad \dot{\mathbf{r}}=\frac{d\mathbf{r}}{ds} \tag{2.3}$$

其中点代表对"固有时"的导数，在测试粒子的轨道上$L=1$，测试粒子遵守Lagrange方程，即

$$\frac{\partial L}{\partial t}-\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{t}}\right)=0 \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}}-\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}}\right)=0 \tag{2.5}$$

将(2.3)式代入(2.4)和(2.5)式并经适当运算(见附录A)，得

$$\ddot{\mathbf{r}}+(E^2+\dot{\mathbf{r}}^2)\frac{m\mathbf{r}}{r^3}-2\left(\frac{m\mathbf{r}}{r^3}\right)\cdot\dot{\mathbf{r}}\,\dot{\mathbf{r}}=0 \tag{2.6}$$

其中E是常数，它由对应原理确定，由于$\dot{\mathbf{r}}$是测试粒子的速度与光速之比，在初级近似(低速近似)中$\dot{\mathbf{r}}$的平方项可以略去，故

$$\ddot{\mathbf{r}}+E^2\frac{m\mathbf{r}}{r^3}=0 \tag{2.7}$$

因此，如与对应原理谐调，在Newton近似下，必有$E^2=1$，Ω场论的运动方程最后化为

$$\ddot{\mathbf{r}}+(1+\dot{\mathbf{r}}^2)\frac{m\mathbf{r}}{r^3}-2\left(\frac{m\mathbf{r}}{r^3}\right)\cdot\dot{\mathbf{r}}\,\dot{\mathbf{r}}=0 \tag{2.8}$$

（当与Newton的运动方程相比较）在这种形式中方程说明，粒子的表现"质量"将增加一个与动能成正比的因子，另外还有一额外项

$$-2\left(\frac{m\mathbf{r}}{r^3}\right)\cdot\dot{\mathbf{r}}\,\dot{\mathbf{r}} \tag{2.9}$$

它可解释为由于中心物体的吸引造成的"辐射衰减"，这是由于

$$\frac{m\mathbf{r}}{r^3}\cdot\dot{\mathbf{r}}$$

是由引力造成的功率耗散．因此(2.9)就是因引力功率耗散的输运引起的衰减力，由此我们可得出结论，在Ω场论中在静态引力场中运动的粒子会产生引力辐射，相反，Murray曾给出在Einstein理论中测试粒子在Schwarzschild场中的运动方程[5]，

$$\ddot{\mathbf{r}}+\frac{m}{r^3}\left[1+\frac{3A^2}{r^2}\right]=0 \tag{2.10}$$

其中A是测试粒子单位质量的角动量，(2.10)并未给出任何明显的引力辐射项．

三、角动量守恒律与能量输运律

用$\mathbf{r}$叉乘(2.8)得

$$\mathbf{r}\wedge\ddot{\mathbf{r}}=\left[2\frac{m\mathbf{r}}{r^3}\cdot\dot{\mathbf{r}}\right]\mathbf{r}\wedge\dot{\mathbf{r}} \tag{3.1}$$

此即

$$\mathbf{r}\wedge\ddot{\mathbf{r}}=-2\frac{d\Omega}{ds}\mathbf{r}\wedge\dot{\mathbf{r}} \tag{3.2}$$

此方程有如下解

$$\mathbf{r}\wedge\dot{\mathbf{r}}=\mathbf{A}_0\exp[-2\Omega] \tag{3.3}$$

其中$\mathbf{A}_0$是常矢量，此后我们用

$$\mathbf{A}=\mathbf{r}\wedge\dot{\mathbf{r}} \tag{3.4}$$

记粒子的单位质量的角动量．因此，当角动量用固有时间隔ds定义时，粒子的角动量不守恒．

取(3.3)绝对值

$$\mathbf{A}=\mathbf{A}_0\exp[-2\Omega];\qquad A=|\mathbf{A}|;\qquad A_0=|\mathbf{A}_0| \tag{3.5}$$

且有

$$\frac{dA}{ds}=-2A_0\exp[-2\Omega]\frac{d\Omega}{ds}$$

此即

$$\dot{\Omega}=-\frac{1}{2A_0}\exp[2\Omega]\frac{dA}{ds} \tag{3.6}$$

由于对圆形轨道$\dot{\Omega}=0$，由方程(3.6)知$\dot{A}=0$．

将(3.6)代入(2.8)，得

$$\ddot{\mathbf{r}}+\frac{m\mathbf{r}}{r^3}(1+\dot{r}^2)\mathbf{r}=\left[\frac{\exp[2\Omega]}{A_0}\frac{dA}{ds}\right]\dot{\mathbf{r}} \tag{3.7}$$

因此，引力辐射衰减是正比于轨道角动量的减少率，这一点与直角相等．另外，中心吸引质量越大，辐射越强．

由$\dot{\mathbf{r}}$点乘(3.7)得

$$\frac{d\mathscr{E}}{ds}=\left[\frac{\exp[2\Omega]}{2A_0}\frac{dA}{ds}\right]v^2 \tag{3.8}$$

其中

$$\mathscr{E}=\left[\frac{1}{2}v^2-\frac{m}{r}\right]\qquad v=|\dot{\mathbf{r}}| \tag{3.9}$$

如果将$\mathscr{E}$解释为粒子的“总”能量，方程(3.8)就是因引力辐射而产生的能量输运的方程，很明显(3.8)与单个加速电荷电磁辐射的Larmor公式有所不同．

由前面的讨论可以得到如下重要结论：当测试粒子在球对称引力场中做圆周运动，它无引力辐射，此时，

$$\frac{dA}{ds}=0$$

(3.7)和(3.8)的右方均为零．

另一方面，当测试粒子从一个轨道跳到另一轨道，$\frac{dA}{ds}\neq0$，于是就会有引力辐射．

四、运动方程的另一种形式

由

$$\mathbf{A}=\mathbf{r}\wedge\dot{\mathbf{r}} \tag{4.1}$$

得

$$\dot{\mathbf{r}}=\left(\frac{\mathbf{A}}{r^2}\right)\wedge\mathbf{r}+\left(\frac{\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}}}{r^2}\right)\mathbf{r} \tag{4.2}$$

所以，对于圆周运动，

$$\dot{\mathbf{r}}=\left(\frac{\mathbf{A}}{r^2}\right)\wedge\mathbf{r}$$

而矢量

$$\boldsymbol{\omega}=\frac{\mathbf{A}}{r^2}=\frac{\mathbf{A}_0\exp[-2\Omega]}{r^2} \tag{4.3}$$

可认为是粒子的轨道角速度矢量．因此，Kepler第三定律不再成立．

由(4.1)式点乘自身得

$$(\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}})^2=\mathbf{r}^2\dot{\mathbf{r}}^2-A^2 \tag{4.4}$$

于是，(2.8)现可写成

$$\ddot{\mathbf{r}}+\frac{m\mathbf{r}}{r^3}+\frac{m}{r}[\dot{\mathbf{r}}^2\mathbf{r}-(\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}})\dot{\mathbf{r}}]-\frac{m}{r^3}(\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}})\dot{\mathbf{r}}=0 \tag{4.5}$$

但$\dot{\mathbf{r}}\wedge$(4.1)给出

$$\dot{\mathbf{r}}\wedge\mathbf{A}=\dot{\mathbf{r}}^2\mathbf{r}-(\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}})\dot{\mathbf{r}} \tag{4.6}$$

所以，(4.5)变为

$$\ddot{\mathbf{r}}+\frac{m\mathbf{r}}{r^3}=\frac{m}{r^3}[\mathbf{A}\wedge\dot{\mathbf{r}}+(r\cdot\dot{\mathbf{r}})\dot{\mathbf{r}}] \tag{4.7}$$

这就是运动方程的另一形式．当粒子沿径向自由下落时，$A=0$，所以，

$$\ddot{\mathbf{r}}+\frac{m\mathbf{r}}{r^3}=\frac{m}{r^3}[(\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}})\dot{\mathbf{r}}] \tag{4.8}$$

这意味着径向运动引力辐射不为零，另一方面，按照(2.10)，在Einstein理论中同样的运动满足

$$\ddot{\mathbf{r}}+\frac{m\mathbf{r}}{r^3}=0 \tag{4.9}$$

它与Newton运动方程相似，无引力辐射的迹象，与Einstein理论中的Schwarzschild解不同，解(2.1)不含视界．(4.8)式的右端代表因粒子运动反作用的排斥力，它可解释为这样一个事实，即在此理论中黑洞无法形成．

对(4.8)和(4.9)的能量积分进行比较有特别的意义，由(4.8)得

$$v^2=1-\exp\left[2m\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{r}\right)\right],\qquad v\equiv\frac{dr}{ds} \tag{4.10}$$

其中a是测试粒子开始下落的半径，因此，当$r\to 0$，$v\to 1$；即随着粒子接近吸引中心，它的速度接近光速，加上狭义相对论，这一结果表明粒子永远不会达到吸引中心．另一方面，由(4.9)得

$$\frac{1}{2}v^2-\frac{m}{r}=E=\text{常数}；\qquad v\equiv\frac{dr}{ds} \tag{4.11}$$

因此，当$r\to 0$时，$v\to\infty$．

当采用"坐标时"t时，情况有很大不同，对(4.10)我们有

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2=\exp\left[-\frac{4m}{r}\right]\left(1-\exp\left[2m\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{r}\right)\right]\right) \tag{4.12}$$

因此，当$r\to 0$时，$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\to 0$，即粒子无法达到吸引中心．另一方面，方程(4.11)给出

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2=\left(1-\frac{2m}{r}\right)^2\left(E+\frac{2m}{r}\right) \tag{4.13}$$

假定$E\geqslant 1$，(4.13)说明当$\frac{2m}{r}\to 1$时

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)\to 0 \tag{4.14}$$

当$r\to 0$时，

$$\frac{dr}{dt}\to\pm\infty \tag{4.15}$$

五、运动引力场的辐射方程

一个完备的辐射理论至少应具有如下要素：

(1) 产生辐射的粒子或物体的运动方程；

(2) 描述动力学源所产生辐射场的辐射方程；

(3) 在广义相对性理论中，还应有描述由物质及波分布决定的时空几何的场方程原则上，上述所有方程是相互联系的。

在得到静态球对称引力场中测试粒子的运动方程后，我们来进一步研究在没有象广义相对论中所用的线性化手续情况下Ω场论是否能给出辐射方程。在Ω场论中完备的方程组由下列方程组成

$$\mathring{R}_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathring{R}=2\left[h_\mu h_\nu-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}h_\alpha h^\alpha\right]+T_{(\mu\nu)} \tag{5.1}$$

$$\mathring{\nabla}_\rho S_{\mu\nu}{}^\rho=2T_{[\mu\nu]} \tag{5.2}$$

$$S^{\lambda\mu\nu}=\mathscr{E}^{\lambda\mu\nu\rho}h_\rho \tag{5.3}$$

其中$\mathring{R}_{\mu\nu}$是用Levi-Civita连络定义的Ricci张量，$\mathring{\nabla}$是用Christoffel符号$\left\{\begin{matrix}\lambda\\ \mu\nu\end{matrix}\right\}$定义的。

已证明当$T_{[\mu\nu]}=0$时

$$h_\rho=\mathring{\nabla}_\rho\Omega \tag{5.4}$$

此式说明四矢h_λ起引力场动量矢量的作用，即便对$T_{[\mu\nu]}\neq 0$的情况亦是如此。

在某种意义上，h是能动张量的平方根，这种对h的解释与Eddington所给的解释[4]相符。在一般情况下可令

$$h^\lambda=\mathring{\nabla}^\lambda\Omega+p^\lambda \tag{5.5}$$

由于打印错误，文献[9]中引力的能量动量张量的系数2被误写成1/2。所幸，这一系数不影响静态球对称场的解[6]。

其中分量p^λ在某种意义下与转动或自旋相关联的引力场的动力学有关，这是由于Ω或是静态场或是与单极辐射有关[9]。因此我们可以令

$$p^\lambda=\mathscr{E}^{\lambda\mu\nu\rho}\mathring{\nabla}_\rho A_{\mu\nu} \tag{5.6}$$

其中 $A_{\mu\nu}=A_{[\mu\nu]}$称为二次可微"辐射势"。从而，(5.5)变为

$$h^{\lambda}=\mathring{\nabla}^{\lambda}\Omega+\mathscr{E}^{\lambda\mu\nu\rho}\mathring{\nabla}_{\rho}A_{\mu\nu} \tag{5.7}$$

它与E^3中矢量场的Helmhelz分解.

$$\mathbf{f}=-\mathrm{grad}\phi+\mathrm{curl}\mathbf{A} \tag{5.8}$$

相似

将(5.7)代入(5.3)和(5.2)得

$$\mathring{\Box}A_{\mu\nu}=T_{[\mu\nu]},\qquad \mathring{\Box}\equiv\mathring{\nabla}_{a}\mathring{\nabla}^{a} \tag{5.9}$$

它具有以$T_{[\mu\nu]}$为源的时空流形上辐射方程的形式.

与量子电动力学[1]比较知，方程(5.2)可解释成非封闭系统角动量平衡方程，它与Eddingto首先阐明的广义相对论中的同一性原理[3]相符，(5.2)右端的$\mathbf{S}^{\lambda}_{\mu\nu}$代表引力场的角动量张量，$T_{[\mu\nu]}$应与角动量张量$\mathbf{M}^{\lambda}_{\mu\nu}$有如下关系

$$2T_{[\mu\nu]}=-\mathring{\nabla}_{\lambda}\mathbf{M}^{\lambda}_{\mu\nu} \tag{5.10}$$

结合(5.2)和(5.10)就给出场与物质的总角动量"守恒律"：

$$\nabla_{\lambda}(\mathbf{S}^{\lambda}_{\mu\nu}+\mathbf{M}^{\lambda}_{\mu\nu})=0 \tag{5.11}$$

显然，辐射方程(5.9)应是(5.11)的直接推论．我们回过头来看一眼就会发现这一点也不奇怪，也没有什么不和谐．因为，(3.7)已清楚地说明"辐射衰减"直接与粒子轨道角动量流有关，不必赘言，$M^{\lambda}_{\mu\nu}$包含了系统的自旋角动量也包含了系统的轨道角动量.自PSR 1913+16发现以来，文献中已很多有关于紧密双星的转动与自旋对引力辐射影响的讨论，但尚无一个是从Einstein场方程出发的自洽讨论，因为在Einstein理论中没有一个作为场方程直接推论的类似于(5.11)的轨道与自旋角动量守恒律.

确实，严格的辐射方程(5.9)的存在是Ω场论与现有理论的主要区别，它不仅有别于Einstein理论，也有别于Yilmaz理论[7]及他最近改善的理论[8]．(5.9)两体问题的解与作为耦合偏微分方程组一元的(5.1)的解有关，到目前为止，对任何现实模型的严格解尚不清楚，下面还有待对方程组(5.1)和(5.9)采用合理的近似手段以计及PSR 1913+16的观测数据．但现在又可以说，此理论框架内有一个（不需基本场方程以外的任何假设）可以逻辑上推出的严格的辐射方程，这就有了成功的希望.

六、结论：(Ω,$\mathbf{A}_{\mu\nu}$) 场

当这一理论在[9]中首次提出时，只考虑了标量部份，因此称之为Ω场论.

现在由(5.7)易见，整个动力学场由两部分组成：标量场Ω和斜对称张量场$\mathbf{A}_{\mu\nu}$，因此，完备的理论应称之为(Ω，$\mathbf{A}_{\mu\nu}$)场论.

附 录 A

为导出(2.6)式，由(2.3)和(2.4)

$$\frac{d}{ds}(\exp[-2\Omega]\dot{t})=0$$

得

$$\dot{t}=E\exp[2\Omega]\qquad(E=\text{常数}) \tag{A.1}$$

此外，

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}}=-2\exp[-2\Omega]\dot{t}^2\frac{\partial\Omega}{\partial \mathbf{r}}-2\exp[2\Omega]\frac{\partial\Omega}{\partial \mathbf{r}}\dot{\mathbf{r}}^2$$

$$=-2\exp[2\Omega](E^2+\dot{r}^2)\frac{\partial\Omega}{\partial r}$$

其中已用到(A.1)，这样，在轨道上有

$$\frac{\partial L}{\partial r}=-\exp[2\Omega](E^2+\dot{r}^2)\frac{\partial\Omega}{\partial r} \tag{A.2}$$

$$=\exp[2\Omega](E^2+\dot{r}^2)\frac{m r}{r^3}$$

类似地，

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}=-\exp[2\Omega]\dot{r} \tag{A.3}$$

因此，

$$\frac{d}{ds}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right]=-\exp[2\Omega]\ddot{r}-\left[2\dot{r}\exp\frac{d\Omega}{ds}\right]$$

$$\frac{d\Omega}{ds}=\frac{d}{ds}\left[\frac{m}{r}\right]=-\frac{m}{r^2}\frac{dr}{ds}=-\frac{m}{r^3}r\cdot\dot{r}$$

$$\frac{d}{ds}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right]=-\exp[2\Omega]\left[\ddot{r}-2\left[\frac{m r}{r^3}\right]\cdot\dot{r}\ \dot{r}\right] \tag{A.4}$$

将(A.2)、(A.4)代入(2.5)即得(2.6)。

参 考 文 献

[1] Bjorken, J. D. and S. D. Drell, *Relativistic Quantum Fields*, McGraw-Hill, Chapter 11 (1965).

[2] Dewitt, B.S., Quantum gravity: the new synthesis in general relativity, *An Einstein Centenary Survey*, Ed. by S. W. Hawking and W. Israel, CUP, (1979), 680.

[3] Eddington, A.S., *Mathematical Theory of Relativity*, CUP (1924), 222.

[4] Eddington, A.S., *Fundamental Theory*, CUP (1948), 31.

[5] Murray, C.A., *Vectorial Astromery*, Adam Hilger Ltd, Bristol (1983), 11.

[6] Tupper, B. O. J., The tests of general relativity and scalar fields, *Nuovo Cimento*, 19 (1974), 135-148.

[7] Yilmaz, H., *Phys. Rev.* 111 (1958), 1417.

[8] Yilmaz, H., Correspondence paradox in general relativity Lett, *Nuvo Cilemnto* 7 (1973), 337-340.

[9] Yu Xin, The Ω-field theory of gravitationa and cosmology, *Astrophysics and Space Science*, 154 (1989), 321-331.

[10] Yu Xin, Does Einstein's G.R. theory predict gravitational radiation of PSR 1913+16? *Astrophysics and Space Science*, 194 (1992), 159-163.

Theory of Gravitational Radiation of the $(\Omega, A_{\mu\nu})$-Field

Alfred Yu (Yu Xin)

(Department of Applied Mathematics, Hong Kong Polytechnic, Hong Kong)

Abstract

Further exploration of the Ω -field theory as first proposed by Yu (1989) is here presented to cover the equation of motion of a test particle which induces gravitational radiation. The same theory is shown to contain an exact gravitational radiation equation derived as a logical consequence of field equation without extra postulates. In this general dynamic context the theory is renamed "The $(\Omega,\ A_{\mu\nu})$-field Theory".

Key words Ω-field, gravitational radiation equation, $(\Omega,\ A_{\mu\nu})$-field