

薄板弯曲问题的非奇异核边界元法*

王左辉

(合肥工业大学, 1992年6月1日收到)

摘 要

本文从满足一定条件的Fourier级数出发, 得到非奇异的基本解。用它作积分方程的核函数, 从而给出了又一种薄板弯曲问题的边界元解法。本文方法可适应各种载荷和边界条件的要求, 并且计算简单, 精度高。

关键词 边界积分方程 基本解-级数

一、引 言

奇异积分方程在各方面都得到了广泛的应用^[1], 在板壳弯曲问题上也是如此^[2,3]。因此, 如何处理奇异积分一直是人们极为关心的课题。而另一方面, 与边界元奇异解法平行的非奇异积分方程却因种种原因, 工作做得不多^[4,5]。文[4]于1986年首先明确提出了利用解的完备系作权函数来建立积分方程的方法。文[6]从原微分方程的解与加权残值方法的解应具有等价性的观点出发, 讨论了边界积分方程的充要性。本文则主要针对薄板的弯曲问题加以讨论(壳也类似)。在板壳的弯曲问题中, 经典法是用Fourier级数来逼近板壳中面的挠曲面。著名的纳维法、李维法早为大家熟知^[8]。本文也是如此, 不过在这里不是用Fourier级数去逼近原问题的挠曲面, 而是把其作为权函数。本文不同于以往的方法, 权函数的选取, 不仅取其在某一 Ω^* 域内满足 $\nabla^4 w^* + b^* = 0$, 而且让其满足 Ω^* 的边界条件。对于这样的函数, 它们仅起着辅助的互换加权作用, 对它们没有收敛快慢的要求, 只要求它们相互独立和在 Ω^* 域上完备。而Fourier级数恰恰能满足这些条件。

由于Fourier级数本身特有的性质, 它应用于解析求解中早已涉及到各种各样的力学问题, 且方法较方便, 表达较简明, 这就为本文方法的推广提供了有利条件。因为对弹性体而言, 有了Fourier级数解析解就有了本方法中的基本解, 所以, 非奇异核边界元法将会有广阔的前景。

本文主要从薄板的弯曲问题来讨论, 实际上可很容易地推广本法到其它问题上, 如中厚板、壳体等。

* 刘人怀推荐。

国家自然科学基金资助课题。

二、薄板的积分方程与基本解

Kirchhoff理论中各向同性板的弯曲问题归结为

$$\Omega: D\nabla^4 w = q \quad (2.1)$$

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_1: w = \bar{w}, \psi_n = \psi_n n_\alpha = \bar{\psi}_n \\ \Gamma_2: w = \bar{w}, M_n = M_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta = \bar{M}_n \\ \Gamma_3: V_n = \bar{V}_n, M_n = M_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta = \bar{M}_n \end{aligned} \right\} \quad (2.1a)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} \psi_\alpha = w_{,\alpha}, \quad M_{\alpha\beta} = (1-\mu)D(w_{,\alpha\beta} + \frac{\mu}{1-\mu}w_{,rr}\delta_{\alpha\beta}) \\ Q_n = -D\frac{\partial}{\partial n}\nabla^2 w, \quad T_n = M_{\alpha\beta}n_\alpha t_\beta, \quad V_n = Q_n + \frac{\partial}{\partial s}T_n \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

n_α, t_α 为外法线 n 和正切线的方向余弦.

取 w^* 为权函数, (2.1) 式的加权残值方程为

$$\int_{\Omega} (D\nabla^4 w - q)w^* d\Omega = 0 \quad (2.3)$$

式中, $w, q \in \Omega, w^* \in \Omega^*, \Omega^* \supset \Omega$

由(2.3)可得如下积分方程

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} b^* w d\Omega + \sum_i (w_i \hat{T}_i^* - \hat{T}_i w^*) \\ + \int_{\Gamma} (V_n^* w - M_n^* \psi_n + M_n \psi_n^* - V_n w^*) ds \\ = \int_{\Omega} q w^* d\Omega \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\text{式中} \quad D\nabla^4 w^* = b^* \quad (2.5)$$

可以证明, 对于满足方程(2.5)的 $w^* \in \Omega^*$, 求解积分方程(2.4)与求解方程(2.1)等价.

这是因为, 用加权残值法取(2.5)的弱形式

$$\int_{\Omega^*} (D\nabla^4 w^* - b^*) w d\Omega = 0$$

$$\begin{aligned} \text{即} \quad \int_{\Omega} D\nabla^4 w w^* d\Omega - \sum_i (w_i \hat{T}_i^* - \hat{T}_i w_i^*) \\ + \int_{\Gamma} (V_n w^* - M_n \psi_n^* + M_n^* \psi_n - V_n^* w) ds \\ = \int_{\Omega} b^* w d\Omega \end{aligned}$$

将方程(2.4)代入得

$$\int_{\Omega} (D\nabla^4 w - q)w^* d\Omega = 0$$

$\therefore w^*$ 为 $\Omega^* \supset \Omega$ 域内的任一非零量

$\therefore D\nabla^4 w - q = 0$

因而问题集中在怎样选用权函数 w^* 上. 众所周知, 奇异解法在积分方程(2.4)中, 取

$b^* = \delta(\xi, \eta)$ 且 Ω^* 为无限域, 从而将方程(2.5)的一个特解用作基本解. 而本文则是用Fourier级数作权函数, 这是因为它只涉及初等函数, 计算方便, 又避免了奇异积分. 根据实践, Fourier级数按以下三种方式选择, 将收到最好的效果, 决非偶然的是它们正好对应于薄板力学中的三种经典解法.

第一种选择

$$\text{取 } w^* = \sum_1^{\infty} Y_m \sin \frac{m\pi x}{a}$$

$Y_m = Y_m(y)$, $x, y \in \Omega^*$, w^* 和 Ω^* 相当于一块两对边简支的板, y 是简支边方向, a 为跨度.

由方程(2.5), 取 $b^* = 0$, 有

$$Y_m^{(4)} - 2\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 Y_m'' + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 Y_m = 0$$

$$\text{解得: } Y_m = A_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + B_m y \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + C_m \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + D_m y \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a}$$

将 Y_m 代入 w^* , 再将 w^* 代入方程(2.4)有

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left[\left(\int \right)_{m_A} A_m + \left(\int \right)_{m_B} B_m + \left(\int \right)_{m_C} C_m + \left(\int \right)_{m_D} D_m \right] = 0$$

由于 A_m, B_m, C_m 和 D_m 为任意常数, 故有

$$\left(\int \right)_{m_K} = 0, \quad m=1, 2, 3, \dots; \quad K=A, B, C, D$$

而 $\left(\int \right)_{m_K} = 0$ 就是下面的积分方程

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} [(V_n^*)_{m_K} w - (M_n^*)_{m_K} \psi_n + M_n(\psi_n^*)_{m_K} - V_n(w^*)_{m_K}] ds \\ & + \sum_i [w_i(\hat{T}_i^*)_{m_K} - \hat{T}_i(w_i^*)_{m_K}] \\ & = \int_{\Omega} q(w^*)_{m_K} d\Omega \end{aligned} \quad (2.6)$$

式中 $(*)_{m_K}$ 为基本解, 由下列表达式给出:

$$\left. \begin{aligned} (w^*)_{m_A} &= \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} \sin \frac{m\pi x}{a}, & (w^*)_{m_B} &= y \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} \\ (w^*)_{m_C} &= \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \sin \frac{m\pi x}{a}, & (w^*)_{m_D} &= y \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

由式(2.7)就可利用(2.2)和(2.1a)确定其它基本解, 如 $(\psi_n^*)_{m_K}, \dots, (V_n^*)_{m_K}$ 等显式. 显然, 积分方程(2.6)的核函数只是函数级数的某一项.

$$m=1, 2, 3, \dots, \bar{m}; \quad K=A, B, C, D \quad (2.7a)$$

\bar{m} 由板的未知量个数决定. 原则是使所列的积分方程数与未知量个数相等. 比如, 若有一板, 满足 $\Omega \subset \Omega^*$, 经剖分插值后共有 8 个未知量. 在非对称情况下, $K=A, B, C, D, \bar{m}=2$, 这样正好可以提供 8 个积分方程.

第二种选择

$$\text{取 } w^* = \sum_{m=0}^{\infty} [w_m^*(r) \cos m\theta + \tilde{w}_m^*(r) \sin m\theta]$$

r, θ 为无限域 Ω^* 内的极坐标, 取 $b^* = 0$, 由方程(2.5), 即 $\nabla^4 w^* = 0$ 求得 w_m^* 和 \tilde{w}_m^* .

考虑到 $r=0$ 时, 位移为有限值, 得

$$w_m^* = \tilde{w}_m^* = C_{m1} r^m + C_{m2} r^{m+2} \quad (m=0, 1, 2, 3, \dots)$$

仿照第一种选择时的推导, 仍得积分方程(2.6). 而基本解如下:

$$\left. \begin{aligned} (w^*)_{mA} &= r^m \cos m\theta, & (w^*)_{mB} &= r^m \sin m\theta \\ (w^*)_{mC} &= r^{m+2} \cos m\theta, & (w^*)_{mD} &= r^{m+2} \sin m\theta \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

此结果与文[4]中用复变函数方法求得的板的完备解几乎是一样的.

根据式(2.8)给出 $(w^*)_{mK}$, 就可以用(2.2)和(2.1a) 确定其它基本解 $(w^*)_{mK}$ 的显式.

由: $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, (2.8)式可写成以 x, y 表示的双调和多项式:

$$\begin{aligned} &1, x, y, xy, x^2 + y^2, x^2 - y^2 \\ &\operatorname{Re}(zz^{k-1}), \operatorname{Im}(zz^{k-1}), \operatorname{Re}(z^k), \operatorname{Im}(z^k) \quad k=3, 4, \dots, \end{aligned}$$

其中 $z = x + iy, \bar{z} = x - iy$

第三种选择

$$\text{取 } w^* = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{lm} \sin \frac{l\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{a}$$

$x, y \in \Omega^*$, Ω^* 是一块边长为 a 的四边简支的正方板. 由方程(2.5)得:

$$b^* = D \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{lm} \left(\frac{\pi}{a}\right)^4 (l^2 + m^2)^2 \sin \frac{l\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{a}$$

代入方程(2.4)得:

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} b_{lm}^* w d\Omega + \sum_l [w_l(\hat{T}_l^*)_{lm} - \hat{T}_l(w_l^*)_{lm}] \\ &\quad + \int_r [(V_n^*)_{lm} w - (M_n^*)_{lm} \psi_n + M_n(\psi_n^*)_{lm} - V_n(w^*)_{lm}] ds \\ &= \int_{\Omega} q(w^*)_{lm} d\Omega \end{aligned} \quad (2.9)$$

基本解为:

$$\left. \begin{aligned} (w^*)_{lm} &= \sin \frac{l\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{a} \\ b_{lm}^* &= D \left(\frac{\pi}{a}\right)^4 (l^2 + m^2)^2 (w^*)_{lm} \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

由式(2.10)和(2.2)与(2.1a)式可确定其它基本解 $(\psi_n^*)_{lm}, \dots, (V_n^*)_{lm}$ 的显式.

$$l=1, 2, 3, \dots, l; \quad m=l, l+1, l+2, \dots, m$$

l 和 m 由板插值后的未知量个数确定. 原则仍是所列积分方程数与未知量个数相等. 同样. l 和 m 必须从低向高顺序取而不可跳项.

由上可见, 不论在何种选择下, 每一项 $(w^*)_{mK}$ 都是一个初等函数型的基本解, 它们只起着辅助的互换加权作用, 对它们没有收敛快慢的要求, 也不会引起积分奇性; 而且可以满

足各种载荷、形状和边界条件的要求。至于单元剖分，分段插值与普遍采用的奇异解法相同^[2]。但是计算上要方便得多。

三、地基板与正交异性板的积分方程与基本解

前述方法可以推广到许多问题的求解中去。本节只就两个问题加以讨论，且用前述的第一种选择

$$w^* = \sum_1^{\infty} Y_m \sin \frac{m\pi x}{a}$$

作为权函数。

1. 弹性地基板

双参数地基上的薄板弯曲问题为^[7]

$$\Omega: D\nabla^4 w - G\nabla^2 w + Kw = q \quad (3.1)$$

边界条件见式(2.1a)。

G 和 K 为两个独立的地基弹性参数。

$G=0$ 时， K 就是Winkler地基基床系数。

类似第二节的推导后，得积分方程：

$$\int_{\Gamma} [(V_n^* + G\psi_n^*)_{mK} w - (M_n^* + Gw^*)_{mK} \psi_n + M_n(\psi_n^*)_{mK} - V_n(w^*)_{mK}] ds + \sum_1^i [w_i(\hat{T}_i^*)_{mK} - \hat{T}_i(w^*)_{mK}] = \int_{\Omega} q(w^*)_{mK} d\Omega \quad (3.2)$$

基本解的表达式如下：

$$\left. \begin{aligned} (w^*)_{mA} &= \text{chaycos}\beta y \sin \frac{m\pi x}{a} \\ (w^*)_{mB} &= \text{shaysin}\beta y \sin \frac{m\pi x}{a} \\ (w^*)_{mC} &= \text{chaysin}\beta y \sin \frac{m\pi x}{a} \\ (w^*)_{mD} &= \text{shaycos}\beta y \sin \frac{m\pi x}{a} \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

式中

$$\alpha = \left[\frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{K}{D} + \frac{G}{D} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2} + \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 + \left(\frac{G}{2D} + \frac{m^2\pi^2}{a^2} \right) \right) \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\beta = \left[\frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{K}{D} + \frac{G}{D} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2} + \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 - \left(\frac{G}{2D} + \frac{m^2\pi^2}{a^2} \right) \right) \right]^{\frac{1}{2}}$$

其它的基本解，如 $(\psi_n^*)_{mK}$ ， \dots ， $(V_n^*)_{mK}$ 仍通过式(3.3)，再利用式(2.2)和(2.1a)给出。

$$m=1, 2, 3, \dots, m, \quad K=A, B, C, D \quad (3.3a)$$

m 由插值剖分后的未知量个数决定。原则与第二节同。

2. 正交各向异性的薄板

正交各向异性板在横向荷载作用下的弹性曲面微分方程

$$D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = q \quad (3.4)$$

其中

$$D_3 = \mu_2 D_1 + 2D_K = \mu_1 D_2 + 2D_K$$

$$D_1 = \frac{E_1 t^3}{12(1-\mu_1 \mu_2)}, \quad D_2 = \frac{E_2 t^3}{12(1-\mu_1 \mu_2)}, \quad D_K = \frac{G t^3}{12}$$

弯矩、扭矩及剪力的表达式如下:

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -D_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), & M_y &= -D_2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ M_{xy} &= -2D_K \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, & Q_x &= \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}, & Q_y &= \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

积分方程(2.6)同样适用于正交各向异性板。只是方程中的力学量是由式(3.5)和(2.1a)控制的。而此时的基本解表达式如下:

a) $D_3^2 > D_1 D_2$ 时,

$$r_1 = \left[\frac{D_3}{D_2} + \left(\frac{D_3^2}{D_2^2} - \frac{D_1}{D_2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad r_2 = \left[\frac{D_3}{D_2} - \left(\frac{D_3^2}{D_2^2} - \frac{D_1}{D_2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$(w^*)_{mA} = \operatorname{ch} \frac{m\pi r_1 y}{a} \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad (w^*)_{mB} = \operatorname{sh} \frac{m\pi r_1 y}{a} \sin \frac{m\pi x}{a}$$

$$(w^*)_{mC} = \operatorname{ch} \frac{m\pi r_2 y}{a} \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad (w^*)_{mD} = \operatorname{sh} \frac{m\pi r_2 y}{a} \sin \frac{m\pi x}{a}$$

b) $D_3^2 = D_1 D_2$ 时, $r = \sqrt{D_3/D_2}$

$$(w^*)_{mA} = \operatorname{ch} \frac{m\pi r y}{a} \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad (w^*)_{mB} = y \operatorname{ch} \frac{m\pi r y}{a} \sin \frac{m\pi x}{a}$$

$$(w^*)_{mC} = \operatorname{sh} \frac{m\pi r y}{a} \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad (w^*)_{mD} = y \operatorname{sh} \frac{m\pi r y}{a} \sin \frac{m\pi x}{a}$$

c) $D_3^2 < D_1 D_2$ 时, $r_1 = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{D_1}{D_2} + \frac{D_3}{D_2}} \right)}$, $r_2 = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{D_1}{D_2} - \frac{D_3}{D_2}} \right)}$

$$(w^*)_{mA} = \operatorname{ch} \frac{m\pi r_1 y}{a} \cos \frac{m\pi r_2 y}{a} \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad (w^*)_{mB} = \operatorname{ch} \frac{m\pi r_1 y}{a} \sin \frac{m\pi r_2 y}{a} \sin \frac{m\pi x}{a}$$

$$(w^*)_{mC} = \operatorname{sh} \frac{m\pi r_1 y}{a} \cos \frac{m\pi r_2 y}{a} \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad (w^*)_{mD} = \operatorname{sh} \frac{m\pi r_1 y}{a} \sin \frac{m\pi r_2 y}{a} \sin \frac{m\pi x}{a}$$

其它 $(w^*)_{mK}$ 仍由式(3.5)和(2.1a)确定。 $m=1, 2, \dots, m; K=A, B, C, D$ 。

可见, 基础板和正交各向异性板的基本解形式相近, 对它们的求解也类同。

四、算 例

在以下各题中, 为计算方便, 置 Ω 与 Ω^* 两板心重合。

例1 一均布荷载下的四边简支方板(图1)。半边长 $a/2$ 为一个单元, 每单元上二次样条

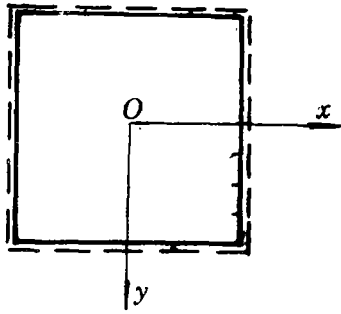


图 1

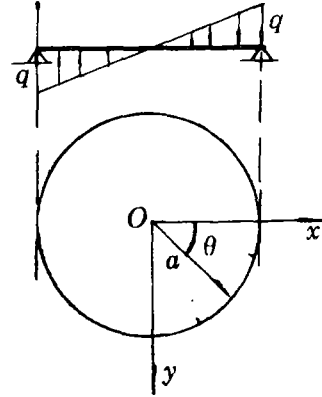


图 2

插值, 5个结点. 取

$$w^* = \sum_m Y_m \sin \frac{m\pi x}{b}, \quad b/a=5 \quad K=A, B, \quad m=1, 3, \dots, \bar{m}, \bar{m}=9$$

计算结果见表1.

表1

($q=1, a=1, \mu=0.3$)

y	0	0.25a	0.5a	0.75a	a
$x=a$					
DV_n	-0.42046 *-0.420	-0.40497	-0.35470	-0.25229	-0.06245
ψ_n	-0.13489	-0.12568	-0.98521	-0.55160	
R					0.064935 *0.064964
$x=0$					
Dw	0.0040602 *0.0040623				

* 精确解

例2 周边简支圆板, 承受反对称荷载, 半径为 a (图2). 1/4圆弧为一单元, 二次样条插值, $n+1=$ 结点数, 取

$$w^* = \sum_m Y_m \sin \frac{m\pi x}{b}, \quad b/a=5, \quad m=2, 4, 6, \dots, \bar{m}, \quad K=A, B, \quad \bar{m}=2(n+1)$$

$q = \frac{q_1}{a} r \cos \theta$, 计算结果见表2, 3.

表2

$n=4 \quad (q=1, a=1, \mu=0.3)$

$r=a$

θ	0	$\pi/8$	$\pi/4$	$3\pi/8$
ψ_n	-0.01262 **-0.01264 *-0.01262	-0.01166 **-0.01168 *-0.01166	-0.008926 **-0.00894 *-0.00892	-0.00483 **-0.00484 *-0.00483
V_n	-0.24999 **-0.24995 *-0.25	-0.23095 **-0.23092 *-0.23097	-0.17675 **-0.17675 *-0.17677	-0.09566 **-0.09565 *-0.09567

表3 $n=2$ ($q=1, a=1, \mu=0.3$) $r=a$

θ	0	$\pi/4$
ψ_n	-0.012615 *-0.01262	-0.008912 *-0.00892
V_n	-0.24968 *-0.25	-0.17647 *-0.17677

**奇异解, *精确解

例3 周边固支的正交异性圆板, 弹性主向与 x, y 轴平行, 承受均载. $1/4$ 圆弧为一单元, 二次样条插值, 5个结点. 取

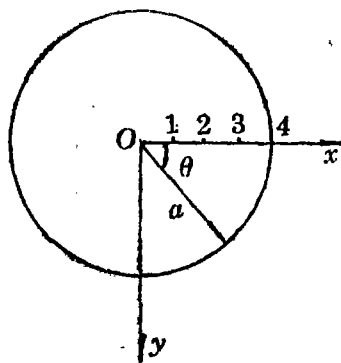


图 3

$$w^* = \sum_m Y_m \sin \frac{m\pi x}{b}, \quad b/a=4, \quad K=A, B \quad m=1, 3, 5, \dots, 9. \quad \text{如图3.}$$

$$D_1 D_2 > D_3^2, \quad D_1 = 1.425p, \quad D_2 = 0.119p, \quad D_3 = 0.2946p$$

$$D_1 D_2 = D_3^2, \quad D_1 = 1p, \quad D_2 = 5.0625p, \quad D_3 = 2.25p \quad p = 10^5 \frac{h^3}{12}$$

$$D_1 D_2 < D_3^2, \quad D_1 = 1p, \quad D_2 = 0.5p, \quad D_3 = 1.215p$$

计算结果见表4.

表 4

$r=a$		$D_1 D_2 > D_3^2$		$D_1 D_2 = D_3^2$		$D_1 D_2 < D_3^2$		因 子
	θ	本文解	文[9]	本文解	文[9]	本文解	文[9]	
M_n	0	-0.2725	-0.273	-0.04391	-0.0440	-0.1441	-0.144	qa^2
	$\pi/4$	-0.1025	-0.102	-0.1164	-0.116	-0.1415	-0.142	qa^2
	$\pi/2$	-0.0231	-0.0228	-0.2231	-0.223	-0.0719	-0.0721	qa^2
V_n	0	-0.660	-0.659	-0.2845	-0.287	-0.638	-0.639	qa
	$\pi/2$	-0.155	-0.158	-0.6446	-0.645	-0.491	-0.499	qa

例4 一均载下的周边固支圆板, 如图3. 取

$$w^* = \sum_m \sum_n \sin \frac{m\pi x}{b} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad b/a=5, \quad \text{对于} \int_a b^* w d\Omega$$

将 w 沿径向2次样条插值, 5个结点. $m=1, n=1, 3, 5; m=3, n=3, 5; m=5, n=5$. 计算结果见表5 (此题若用轴对称问题解析求解本是非常简单的, 而这里之所以弃简从繁, 完全是为了检验在第三种选择下, 方法的有效性.)

表 5

($q=1, a=1, \mu=0.3$)

	$D_w(0)$	$D_w(1)$	$D_w(2)$	$D_w(3)$	$Q(4)$	$M(4)$
本文解	0.01568	0.01372	0.008780	0.002988	-0.499999	-0.12499
精确解	0.01562	0.01373	0.008789	0.002907	-0.50	-0.125

五、讨 论

1. 除前述三种选择外,当然还可以选择其它级数作权函数.本文之所以选Fourier级数是因为它形式最简单,使用最方便.而更重要的是它在解析解中应用相当广泛.简单地说,本方法就是对原问题 \mathcal{L} , $\mathcal{L} \in \Omega$, 选简单域 Ω^* , 使 $\Omega^* \supset \Omega$, 用 Ω^* 上且满足一定条件的级数解析解 \mathcal{L}^* 的第 i 项作基本解($i=1, 2, 3, \dots, m$), 通过积分方程求解原问题.可见,用Fourier级数作权函数可很方便地推广本方法到其它各类问题中去.

2. 至于本文的三种选择,在薄板弯曲问题中使用都很方便,但也有各自的优缺点.如求解球壳就需要第二种选择,然而在地基板中第二种选择下的基本解将是特殊函数.第三种选择使用最直观、简单.它不需通过求解微分方程来得到基本解,不论是地基板还是正交异性板,它的基本解除 $b_{m\kappa}^*$ 以外没有变化,而 $b_{m\kappa}^*$ 也只需要进行简单的算术运算便可得到.也就是说对不同的问题,只须更换不同的 $b_{m\kappa}^*$ 即可.但代价是对于

$$\int_{\Omega} b_{m\kappa}^* w d\Omega$$

须将 w 在整个 Ω 域内剖分插值,从而未知量要多些.作者认为最方便使用的是第一种选择,如果选

$$w^* = \sum_0^{\infty} \left(Y_m \cos \frac{m\pi x}{a} + \bar{Y}_m \sin \frac{m\pi x}{a} \right)$$

甚至还可以解决一般各向异性板问题.

3. 由基本解的形式可见,它们总包含sh, ch, sin, cos这些函数,所以只要对高斯积分做一定的处理,比如以它们为数值积分中的权函数来制表,会得到更好的结果.

4. 尽管域内量可用许多方法求得^[4],但相对来说还是奇异解法的积分方程解最方便,更重要的是,此时积分方程的核函数也是非奇异核.所以对边界积分方程采用Fourier级数作为基本解,解出边界量后,利用 $b^* = \delta(\xi, \eta)$ 所对应的基本解求域内量将是最好的匹配.

参 考 文 献

- [1] Brebbia, C. A., et al., *Boundary Element Techniques*, Springer-Verlag (1984).
- [2] 王有成, Kirchhoff型板样条边界元, 计算结构力学及其应用, 3(1) (1986), 41—50.
- [3] Wang, Y. C., et al., SBEM with thin-plate analogue for shallow shells, *Proc. of Int. Colloquium on Space Structures for Sport Buildings*, Beijing, Oct. (1987).
- [4] 唐立民、金吾根, 边界元的基本问题和一个新途径, 计算结构力学及其应用, 3(3) (1986), 7—12.
- [5] Zheng, X. P. and T. Q. Ye, P -version trefftz BEM for plate bending problems, *Theory and Applications of BEM*, Ed. by Q. H. Du and T. Masataka, International Academic Publishers (1991), 315—323.
- [6] 赵成刚等, 关于加权残值法的充要性问题及其权函数的选择, 力学学报, (3) (1991), 332—338.
- [7] Selvaclurai, A. P. S., *Elastic Analysis of Soil-Foundation Interaction*, Elsevier Scientific Publishing Company (1979).
- [8] Timoshenko, S., et al., *Theory of Plates and Shells*, McGraw-Hill (1959).
- [9] Wang, Y. C., et al., SBEM for plate bending problems, *Boundary Elements*, Ed. by Q. H. Du, Pergmon Press (1986).

Nonsingular Kernel Boundary Element Method for Thin-Plate Bending Problems

Wang Zuo-hui

(Hefei University of Technology, Hefei)

Abstract

In this paper, the nonsingular fundamental solutions are obtained from Fourier series under some given conditions. These solutions can be taken as the kernels of integral equation. So a new boundary element method is presented, with which all kinds of thin-plate bending problems can be solved, even with complicated loadings and sinuous boundaries. The calculation is much simpler and more accurate.

Key words boundary integral equation, fundamental solutions, series